DOI:10.11721/cqnuj20230313

阻抗边界条件下 Maxwell 方程的传输特征值问题*

吴雪娇, 刘立汉, 汪晓青
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】讨论反散射问题的研究中起着关键作用的传输特征值问题。【方法】利用边界积分方程方法,研究了可穿透、非磁性和非均匀介质中带有阻抗边界条件的 Maxwell 方程的传输特征值问题。【结果】构造了阻抗-磁边界迹算子,并用边界积分算子表示阻抗-磁边界迹算子。【结论】证明了一种边界积分算子的强制性,以及另一种边界积分算子的紧性,进一步得出阻抗-磁边界迹算子的差算子是指数为 0 的 Fredholm 算子且解析。

关键词:边界积分方程方法;传输特征值问题;阻抗-磁边界迹算子;Fredholm 算子

中图分类号:O221.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2023)03-0114-08

近几十年来,声波和电磁波的反散射问题已发展成为应用数学中最重要的研究领域之一,相关研究成果在医学、地理学等众多学科中有着广泛应用,例如通过散射数据反演散射物体的边界、形状等[1-2],而反散射中传输特征值问题更是吸引了国内外众多学者的研究。Krisch[3] 首先在散射理论中引入传输特征值的概念。Cakoni 等人[4-7] 对传输特征值进行了一系列的研究,其中文献[4-5]证明了从远场数据中通过传输特征值可以得到散射物体的定性信息,文献[6]证明可以从远场数据中得到传输特征值的正则化解,文献[7]证明了传输特征值和特征向量在非均匀介质中的收敛性。Delbary 等人[8] 利用低频估计和 Fredholm 理论证明了传输特征值的离散性。Sun 等人[9] 采用迭代法求解各向异性的 Maxwell 方程组的传输特征值问题。Monk 等人[10] 采用有限元方法对传输特征值进行数值计算。Cossonniere 等人[11] 采用边界积分方程方法求解 Helmholtz 方程的传输特征值问题。Cakoni 等人在文献[12]证明了非传输特征值波数的存在性并表明传输特征值集是离散的且仅以正无穷为唯一聚点,又在文献[13]中研究了基于 Dirichlet-Neumann 算子和 Robin-Dirichlet 算子的 Helmholtz 方程的传输特征值问题,还在文献[14]采用边界积分方程方法求解常数折射率下 Maxwell 方程的传输特征值问题。Harris 等人[15] 研究了一种带有涂层边界的两种传输特征值问题。Kurz 等人[16] 利用等几何边界元和轮廓积分法求解 Maxwell 方程组的特征值问题,并讨论离散化的解析性质。Cakoni 等人在文献[17]中首次建立了 Maxwell 方程组传输特征值的离散性,又在文献[18]中研究了关于球层介质 Maxwell 方程组的所有传输特征值的定位和复传输特征值的存在性。同时,在研究中还出现了一系列相关的方法,比如:有限元分析法[10]、边界积分方程方法[11-14]、变分法[19-20] 等。

本文利用边界积分方程方法研究了可穿透、非磁性和非均匀介质中带有阻抗边界条件的 Maxwell 方程的传输特征值问题。该方法将边界积分方程组推广为一个边界积分方程公式,且非线性地依赖于传输特征值,这不仅很大程度上减少计算量,而且可以完全表示内部传输特征值问题,不需要增加附加条件来区分内部和外部传输特征值。首先,根据带有阻抗边界条件的 Maxwell 方程的传输特征值问题构造阻抗-磁边界迹算子,得到 k 是传输特征值的充要条件是阻抗-磁边界迹算子在任意折射率 n 和特殊折射率 $n=1$ 时的差算子的核非平凡;其次,应用边界积分算子表示阻抗-磁边界迹算子,从而得到与传输特征值问题等价的边界积分方程;再次,利用向量格林积分公式、Fredholm 变换、Riesz 定理、高斯散度定理和迹定理等,证明一种边界积分算子的强制性;接着,应

* **收稿日期:**2022-03-16 **修回日期:**2023-01-18 **网络出版时间:**2023-05-05T16:45

资助项目:国家自然科学基金青年项目(No. 12001075);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0167);重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJZD-K202100503, No. KJQN201900544);重庆市留学人员回国创新类项目(No. cx2021061, No. cx2019022);重庆师范大学青年拔尖人才培育计划(No. 02030307/0052);重庆市巴渝学者计划(No. BYQNCS2020002);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014)

第一作者简介:吴雪娇,女,研究方向为数学物理反问题,E-mail:2412422027@qq.com;**通信作者:**刘立汉,男,教授,博士,E-mail:mathsedu2013@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms2/detail/50.1165.N.20230504.1942.004.html

用紧嵌入定理，证明另一种边界积分算子的紧性；最后，结合上述两种算子的性质，证明了阻抗-磁边界迹算子的差算子是指数为 0 的 Fredholm 算子且解析。

1　可穿透非磁非均匀介质反散射问题中的传输特征值问题

在可穿透非磁非均匀介质时谐电磁波散射理论研究中，需要考虑 Maxwell 方程的传输特征值问题。如果 n 表示具有支集 $D\in\mathbf{R}^3$ 的非均匀介质在电磁散射理论中的折射率，则传输特征值问题可以表示为求解如下齐次问题的特征值参数 $k\in\mathbf{C}$：

$$\nabla\times\nabla\times W-k^2n(x)W=0,\text{在 } D \text{ 内}, \tag{1}$$

$$\nabla\times\nabla\times V-k^2V=0,\text{在 } D \text{ 内}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nu}\times W-\boldsymbol{\nu}\times V=0,\text{在}\partial D \text{ 上}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times W-\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times V=0,\text{在}\partial D \text{ 上}。 \tag{4}$$

式中：$n>0$ 且 $n\neq1$ 为常数，D 是有界的单连通区域，而且有连通补集 $\mathbf{R}^3\backslash D$ 和足够光滑的边界 ∂D，$\boldsymbol{\nu}$ 表示单位外法向量，齐次问题存在非平凡解 $W,V\in L^2(D)$。

本文主要是利用阻抗-磁边界迹算子 $\Gamma_{k,n}$ 对传输特征值进行表示，推导出一个积分方程。对任意场 $E\in D$，定义 $\gamma E:=\boldsymbol{\nu}\times(E\times\boldsymbol{\nu})$，它表示 E 在 ∂D 上的切向轨迹。

因此，结合方程组(1)～(4)，定义阻抗-磁边界迹算子 $\Gamma_{k,n}:c\times\boldsymbol{\nu}\rightarrow\gamma(\nabla\times E)$，式中：$E\in L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)$，$L^2_{\mathrm{curl}^2}(D):=\{E\in L^2(D):\nabla\times\nabla\times E\in L^2(D),\nabla\cdot E=0\}$，并且 $\|E\|^2_{L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)}=\|E\|^2_{L^2(D)}+\|\nabla\times\nabla\times E\|^2_{L^2(D)}$，$E$ 满足方程组：

$$\nabla\times\nabla\times E-k^2n(x)E=0,\text{在 } D \text{ 内}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times E-\mathrm{i}\lambda\gamma E=c,\text{在}\partial D \text{ 上}。 \tag{6}$$

式中：$\lambda>0$ 为正的常数；根据向量格林积分定理可知 $\mathrm{Re}(k)>0,\mathrm{Im}(k)\geqslant0$（假定 $\mathrm{Im}(k)<0$，在阻抗边界条件下用 $\lambda<0$ 替代）。令 $k_n:=k\sqrt{n}$，$\Gamma_{k,1}=\Gamma_k$，$\Gamma_{k,n}=\Gamma_{k_n}$。

引理 1　k 是方程(1)～(4)的传输特征值的充分必要条件是算子 $\Omega(k;\lambda):=\Gamma_{k,1}-\Gamma_{k,n}$ 的核是非平凡的。换句话说，假如 $(\Gamma_{k,1}-\Gamma_{k,n})c=0$，则传输特征值函数 W,V，即方程(1)～(4)的非平凡解是方程(5)、(6)中任意折射率 n 和特殊折射率 $n=1$ 的解。

证明　取任意折射率 n 时，$\Gamma_{k,n}:c\times\boldsymbol{\nu}\rightarrow\gamma(\nabla\times E)$，满足方程(5)、(6)。

当 $n=1$ 时，$\Gamma_{k,1}:c\times\boldsymbol{\nu}\rightarrow\gamma(\nabla\times V)$，满足方程组：

$$\begin{aligned}&\nabla\times\nabla\times V-k^2V=0,\text{在 } D \text{ 内},\\&\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times V-\mathrm{i}\lambda\gamma V=c,\text{在}\partial D \text{ 上}。\end{aligned} \tag{7}$$

根据方程(6)、(7)可知：

$$\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times E=\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times V+\mathrm{i}\lambda(\gamma E-\gamma V),\text{在}\partial D \text{ 上}。 \tag{8}$$

再由 $\Gamma_{k,n}:c\times\boldsymbol{\nu}\rightarrow\gamma(\nabla\times E)$ 和 $\Gamma_{k,1}:c\times\boldsymbol{\nu}\rightarrow\gamma(\nabla\times V)$ 可知：

$$\boldsymbol{\nu}\times E=\boldsymbol{\nu}\times V,\text{在}\partial D \text{ 上}, \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)，可得 $\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times E=\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times V$，在 ∂D 上。

所以，阻抗-磁边界迹算子以及方程组(5)、(6)与方程组(1)～(4)是等价的，进一步就可以应用阻抗-磁边界迹算子和方程组(5)、(6)去研究传输特征值问题。　证毕

使用边界积分算子来表征阻抗-磁边界迹算子，则需要引入单层势算子 $\mathcal{S}_k$：

$$(\mathcal{S}_k\psi)(x):=2\int_{\partial D}\psi(y)\Phi_k(x,y)\mathrm{d}s(y),x\in\mathbf{R}^3\backslash\partial D,$$

式中：$\Phi_k(x,y)=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{|x-y|}$，$x\neq y$，在 $\mathbf{R}^3$ 中。若 ∂D 是 $C^{2,1}$ 光滑，线性算子 $\mathcal{S}_k:H^{s-(1/2)}(\partial D)\rightarrow H^{s+1}(D)$ 在 $-1\leqslant s\leqslant2$ 上有界[21]。进一步定义 $\mathcal{S}_k$ 在 ∂D 上的迹 S_k 和它的法向导数 K'_k：

$$(S_k\psi)(x):=2\int_{\partial D}\psi(y)\Phi(x,y)\mathrm{d}s(y),x\in\partial D;(K'_k\psi)(x):=2\int_{\partial D}\psi(y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}_x}\Phi(x,y)\mathrm{d}s(y),\ x\in\partial D。$$

根据迹定理,有 $S_k:H^{s-1/2}(\partial D)\to H^{s+1/2}(\partial D)$,$K_k':H^{s-1/2}(\partial D)\to H^{s-1/2}(\partial D)$,且算子 S_k 和 K_k' 在 $-1\leqslant s\leqslant 2$ 上均有界。

为了讨论两个基本的电磁边界积分算子,需要定义空间 $H_t^s(\partial D):=\{a\in H^s(\partial D):\boldsymbol{\nu}\cdot a=0\}$ 和无散度的向量场空间 $H^{m,0}(D):=\{F\in H^m(D):\nabla\cdot F=0\}$,$m=0,1,2,\cdots$。假设给定场 $F\in H^{m,0}(D)$,$m=0,1$,密度 $g\in H_t^{m+3/2}(\partial D)$。因此引入磁偶极算子、电偶极算子[14]:

$$(M_k a)(x):=2\int_{\partial D}\boldsymbol{\nu}(x)\times\nabla_x\times\{\Phi_k(x,y)a(y)\}\mathrm{d}s(y),x\in\partial D,\tag{10}$$

$$(N_k a)(x):=2\gamma\left[\nabla\times\nabla\times\int_{\partial D}\Phi_k(x,y)a(y)\mathrm{d}s(y)\right],\ x\in\partial D。\tag{11}$$

易知,$M_k:H_t^{s-1/2}(\partial D)\to H_t^{s-1/2}(\partial D)$ 是紧算子且为 -1 阶的伪微分算子,$N_k:H_t^{s-1/2}(\partial D)\to H_t^{s-3/2}(\partial D)$ $(0\leqslant s\leqslant 2)$ 是 1 阶的伪微分算子且有界[22]。

根据前面提到的传输特征值问题的解 $W,V\in L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)$,因此它们的迹和相应旋度的迹在 ∂D 上分别属于 $H_t^{-1/2}(\partial D)$ 和 $H_t^{-3/2}(\partial D)$。如果 $E\in L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)$,则迹 $\gamma E\in H_t^{-1/2}(\partial D)$;旋度的迹 $\gamma(\nabla\times E)\in H_t^{-3/2}(\partial D)$,根据向量格林积分公式[22],$\gamma E\in H_t^{-1/2}(\partial D)$,存在以下对偶等式定义:

$$\langle\gamma E,f\rangle_{H_t^{-1/2}(\partial D),H_t^{1/2}(\partial D)}=\int_D(E\cdot\nabla\times\nabla\times F-F\cdot\nabla\times\nabla\times E)\mathrm{d}x,$$

$$\langle\gamma E,f\rangle_{H_t^{-1/2}(\partial D),H_t^{1/2}(\partial D)}=\int_D(E\cdot\nabla\times\nabla\times F-F\cdot\nabla\times\nabla\times E)\mathrm{d}x,$$

式中:$F\in H^2(D)$,使得在 D 内 $\nabla\cdot F=0$,在 ∂D 上 $\boldsymbol{\nu}\times\gamma F=0$ 和 $\gamma(\nabla\times F)=-f$。

同样地,$\gamma(\nabla\times E)\in H_t^{-3/2}(\partial D)$,存在以下对偶等式定义:

$$\langle\gamma(\nabla\times E),f\rangle_{H_t^{-3/2}(\partial D),H_t^{3/2}(\partial D)}=\int_D(E\cdot\nabla\times\nabla\times F-F\cdot\nabla\times\nabla\times E)\mathrm{d}x,$$

式中:$F\in H^2(D)$,使得在 D 内 $\nabla\cdot F=0$,在 ∂D 上 $\boldsymbol{\nu}\times\gamma F=f$ 和 $\gamma(\nabla\times F)=0$。

显然,在 D 内算子 $\mathcal{S}_k a$ 满足向量 Helmholtz 方程,因此 $\nabla\times\mathcal{S}_k:H^{-1/2}(\partial D)\to L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)$ 有界,通过对偶论证,可以将在 ∂D 上的跳跃关系扩展到密度 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$ 的情况,具体引理如下。

引理 2[14] $E=\nabla\times\mathcal{S}_k a:H_t^{-1/2}(\partial D)\to L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)$,密度 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$,边界迹分别为:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nu}\times\gamma E_{\pm}=M_k a\mp a\in H_t^{-1/2}(\partial D),\\ \gamma(\nabla\times E)=N_k a\in H^{-3/2}(\partial D)。\end{gathered}\tag{12}$$

式中:有界线性紧算子 $M_k:H_t^{s-1/2}(\partial D)\to H_t^{s-1/2}(\partial D)$,有界线性算子 $N_k:H_t^{s-1/2}(\partial D)\to H_t^{s-1/2}(\partial D)$,分别由式(10)、(11)给出(算子的下标“-”表示从 D 的内部靠近边界 ∂D;算子的下标“+”表示从 D 的外部靠近边界 ∂D)。

2 阻抗-磁边界迹算子的相关性质

定理 1 阻抗边界条件下 Maxwell 方程(5)~(6)有唯一解。

证明 为了证明 Maxwell 方程(5)~(6)的唯一性,假设 E 是阻抗问题 $c=0$ 的解,由式(6)可知,齐次边界条件:$\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times E=\mathrm{i}\lambda\gamma E\in H_t^{-3/2}(\partial D)$,因此,通过文献[14]的定理 3.2 中 $m=0$,结合文献[14]中引理 3.4 以及对偶空间定义可知,$E\in H^2(D)$,根据第一向量格林积分定理:

$$\int_D(E\cdot\Delta F+\nabla\times E\cdot\nabla\times F+\nabla\cdot E\ \nabla\cdot F)\mathrm{d}x=\int_{\partial D}(\boldsymbol{\nu}\times E\cdot\nabla\times F+\boldsymbol{\nu}\cdot E\ \nabla\cdot F)\mathrm{d}s,$$

令 $\overline{E}=F$,有:

$$\int_D(E\cdot\Delta F+\nabla\times E\cdot\nabla\times F+\nabla\cdot E\ \nabla\cdot F)\mathrm{d}x=\int_{\partial D}(\boldsymbol{\nu}\times E\cdot\nabla\times F+\boldsymbol{\nu}\cdot E\ \nabla\cdot F)\mathrm{d}s,$$

$$\int_D(E\cdot\Delta\overline{E}+\nabla\times E\cdot\nabla\times\overline{E})\mathrm{d}x=\int_{\partial D}(\boldsymbol{\nu}\times E\cdot\nabla\times\overline{E})\mathrm{d}s=\int_D\{|\nabla\times E|^2-k^2|E|^2\}\mathrm{d}x。$$

$$\int_{\partial D}(\boldsymbol{\nu}\times E\cdot\nabla\times\overline{E})\mathrm{d}s=-\int_{\partial D}(\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times\overline{E}\cdot E)\mathrm{d}s=-\int_{\partial D}(\overline{\mathrm{i}}\lambda\gamma\overline{E}\cdot E)\mathrm{d}s=$$

$$\int_{\partial D}(\mathrm{i}\lambda\gamma\overline{E}\cdot E)\mathrm{d}s=\mathrm{i}\lambda\int_{\partial D}(|\gamma E|^2)\mathrm{d}s=\mathrm{i}\lambda\int_{\partial D}(\gamma E\cdot\gamma\overline{E})\mathrm{d}s。$$

可得 $\int_D \{|\nabla\times E|^2-k^2|E|^2\}\mathrm{d}x=\mathrm{i}\lambda\int_{\partial D}(\gamma E\cdot\gamma\overline{E})\mathrm{d}s$，因此 $\gamma E=0$ 在 ∂D 上，根据 $\boldsymbol{v}\times\nabla\times E=\mathrm{i}\lambda\gamma E=0$ 在 ∂D 上，依据 Stratton-Chu 公式[22]，得到 $E=0$ 在 D 内，根据引理 2 可知解的形式：

$$E=\nabla\times\mathcal{S}_k a, \tag{13}$$

密度 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$，显然，由 Helmohotz 方程可得 E 满足式(5)，并且 $E\in L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)$。根据引理 2，若积分方程 $[N_k+\mathrm{i}\lambda(M_k-\boldsymbol{I})]a=2c\times\boldsymbol{v}$ 有解，其中 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，则满足边界条件(6)，令 $Q_k=N_k+\mathrm{i}\lambda(M_k-\boldsymbol{I})$，由 M_k 的紧性、$M_0-\boldsymbol{I}$ 为单射[23]以及 N_k 的有界性可知 Q_k 为单射，则该积分方程的解就是阻抗边界条件的唯一解，意味着 $Q_k a=0$ 的解 a，使得式(13)中定义的 $E=0$ 在 D 内，根据式(12)以及 $\gamma E=0$，则 $\boldsymbol{v}\times E_+=0$ 在 ∂D 上，由完美导体外边值问题的唯一性，在 $\mathbf{R}^3\backslash D$ 上 $E=0$，综上所述 $a=0$。

根据前面的定义，当 $s=0$ 时，映射 $M_k: H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{-1/2}(\partial D)$ 为线性紧算子，映射 $N_k: H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{-3/2}(\partial D)$ 有界线性算子，根据后者的对偶等式定义可知 $N_k: H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{3/2}(\partial D)$ 有界，应用紧嵌入定理，则 $N_k: H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{-1/2}(\partial D)$ 为紧算子，最后根据 Riesz 定理，$Q_k: H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{-1/2}(\partial D)$ 为紧算子，Q_k^{-1} 存在且有界，Q_k 为双射，则积分方程的解存在，故式(5)、(6)的解唯一得证。　　证毕

引理 3　如果 ∂D 是 $C^{2,1}$ 类的，映射 $[N_k+\mathrm{i}\lambda(M_k-\boldsymbol{I})]^{-1}: H_t^{s-1/2}(\partial D)\to H_t^{s-1/2}(\partial D)$ 和 $[N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})]^{-1}: H_t^{s-1/2}(\partial D)\to H_t^{s-1/2}(\partial D)$ $(0\leqslant s\leqslant 2)$ 存在且有界。

证明　主要以 $[N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})]^{-1}$ 为例进行证明。

已知算子 M_{k_n} 是 -1 阶伪微分算子，N_{k_n} 是 1 阶伪微分算子，且 M_{k_n} 在 $H_t^{s-1/2}(\partial D)$ 上为紧算子，N_{k_n} 在 $H_t^{s-1/2}(\partial D)$ 上为有界算子，因此，映射 $N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I}): H_t^{s-1/2}(\partial D)\to H_t^{s-1/2}(\partial D)$ 是指数为 0 的 Fredholm 算子。要想证明算子 $[N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})]^{-1}: H_t^{s-1/2}(\partial D)\to H_t^{s-1/2}(\partial D)$ $(0\leqslant s\leqslant 2)$ 存在且有界，即证算子 $N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})$ 在 $H_t^{s-1/2}(\partial D)$ 的核是平凡的即可。因此，取 $s=0$ 时，假设密度 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$ 是 $N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})$ 的核，且 $E=\nabla\times\mathcal{S}_{k_n}a$ 满足向量 Helmholtz 方程，$E\in L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)$，且满足方程：

$$\boldsymbol{v}\times\nabla\times E-\mathrm{i}\lambda\gamma E=0,\text{在}\partial D\text{ 上。}$$

由第一向量格林积分定理可知，如果 $\mathrm{Re}(k)>0$，$\mathrm{Im}(k)\geqslant 0$，则 $E=0$ 在 D 中；由完美导体外边值问题的唯一性，在 $\mathbf{R}^3\backslash D$ 上 $E=0$，得到 $a=0$，即 $N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})$ 的核在 $H_t^{-1/2}(\partial D)$ 是平凡的。由此，在对偶系统中利用 Fredholm 变换[24]，得到当 $0\leqslant s\leqslant 2$ 时，算子 $N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})$ 的核在 $H_t^{s-1/2}(\partial D)$ 中也是平凡的。同理，算子 $[N_k+\mathrm{i}\lambda(M_k-\boldsymbol{I})]^{-1}$ 的核在 $H_t^{s-1/2}(\partial D)$ 中也是平凡的。　　证毕

进一步考虑纯虚数 $k=\mathrm{i}$，$\lambda=\mathrm{i}$ 情况下的阻抗边值问题，边界条件为 $\boldsymbol{v}\times\nabla\times E+\gamma E=c$，在 ∂D 上。由引理 1 可知，k 是传输特征值的充分必要条件是算子 $\Omega(k;\lambda)\coloneqq\Gamma_{k,1}-\Gamma_{k,n}$ 的核是非平凡的。

通过以上分析，可以用边界积分算子表示阻抗-磁边界迹算子，即：

$$\Gamma_k=N_k[N_k+\mathrm{i}\lambda(M_k-\boldsymbol{I})]^{-1},\Gamma_{k_n}=N_{k_n}[N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})]^{-1}\text{。}$$

进一步分析阻抗-磁边界迹算子关于 k，k_n 的差：

$$\Omega(k;\lambda)\coloneqq N_kQ_k^{-1}-N_{k_n}Q_{k_n}^{-1}=N_k[N_k+\mathrm{i}\lambda(M_k-\boldsymbol{I})]^{-1}-N_{k_n}[N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})]^{-1}\text{。}$$

于是，有以下正则性结论。

引理 4　线性算子 $a\mapsto\nabla\times\mathcal{S}_kQ_k^{-1}a-\nabla\times\mathcal{S}_{k_n}Q_{k_n}^{-1}a$，从 $H_t^{-1/2}(\partial D)$ 映射到 $H^2(D)$，算子 $\Omega(k;\lambda)$：$H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{1/2}(\partial D)$，且两个算子均有界。

证明　设 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$，$\Omega(k;\lambda)a$ 是 $\nabla\times E$ 在边界上的切向轨迹，令 $E=\nabla\times\mathcal{S}_kQ_k^{-1}a-\nabla\times\mathcal{S}_{k_n}Q_{k_n}^{-1}a$，利用引理 2，$\gamma(\nabla\times E)\in H^{-3/2}(\partial D)$，有 $\Omega(k;\lambda)a=\gamma(\nabla\times E)=N_kQ_k^{-1}a-N_{k_n}Q_{k_n}^{-1}a$，则映射 $a\to\gamma(\nabla\times E)$ 是从 $H_t^{-1/2}(\partial D)$ 到 $H_t^{-3/2}(\partial D)$，且：

$$\nabla\times\nabla\times E=k^2\,\nabla\times\mathcal{S}_kQ_k^{-1}a-k_n^2\,\nabla\times\mathcal{S}_{k_n}Q_{k_n}^{-1}a,$$

式中：$Q_k: H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{-1/2}(\partial D)$ 为紧算子，$\mathcal{S}_k: H^{-1/2}(\partial D)\to H^1(D)$ 在 $s=0$ 时有界，显然 $E\in L^2_{\mathrm{curl}^2}(D)$，且 E 满足边界条件：

$$\boldsymbol{v}\times\nabla\times E-\mathrm{i}\lambda\gamma E=0,\text{在}\partial D\text{ 上。}$$

式中：$\boldsymbol{v}\times\nabla\times E\in H_t^{-3/2}(\partial D)$。根据对偶等式定义，则映射 $a\to\boldsymbol{v}\times\nabla\times E$ 是从 $H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{3/2}(\partial D)$，在文献

[14]的定理 3.2 及引理 3.4 中取 $m=0$ 时,则 $E\in H^2(D)$,由引理 3 可知:

$$[N_k+\mathrm{i}\lambda(M_k-\boldsymbol{I})]^{-1}:H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{-1/2}(\partial D),[N_{k_n}+\mathrm{i}\lambda(M_{k_n}-\boldsymbol{I})]^{-1}:H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{-1/2}(\partial D),$$

所以 $a\to\nabla\times\mathcal{S}_kQ_k^{-1}a-\nabla\times\mathcal{S}_{k_n}Q_{k_n}^{-1}a:H_t^{-1/2}(\partial D)\to H^2(D)$为有界线性映射,$E\in H^2(D)$则 $\gamma(\nabla\times E)\in H^1(D)$。最后根据迹定理,$\Omega(k;\lambda)$是$\nabla\times E$ 在边界上的切向轨迹,所以,线性算子 $\Omega(k;\lambda):H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{1/2}(\partial D)$有界。 证毕

定理 2 对任意的 $k>0,k_n:=k\sqrt{n},\lambda=\mathrm{i}$,算子$(k_n^2-k^2)\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i}):H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{1/2}(\partial D)$是强制的。即:对任意的 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$以及存在常数 $C>0$,有:

$$(k_n^2-k^2)\langle\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a,a\rangle_{H_t^{1/2}(\partial D),H_t^{-1/2}(\partial D)}\geqslant C\|a\|^2_{H_t^{-1/2}(\partial D)}。$$

证明 对任意的 $E\in H^2(D)$且$\nabla\cdot E=0$,根据变换可知:

$$\begin{aligned}&\overline{E}\cdot(\nabla\times\nabla+k^2)(\nabla\times\nabla+k_n^2)E-\nabla\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-(k^2+k_n^2)\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times E-k^2k_n^2\overline{E}\cdot E=\\&\overline{E}\cdot[\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times E+k_n^2\,\nabla\times\nabla\times E+k^2\,\nabla\times\nabla\times E+k^2k_n^2E]-\\&\nabla\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-(k^2+k_n^2)\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times E-k^2k_n^2\overline{E}\cdot E=\\&\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times E+(k^2+k_n^2)\nabla\times\nabla\times E\cdot\overline{E}-\nabla\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-(k^2+k_n^2)\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times E=\\&\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times E-\nabla\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-(k^2+k_n^2)\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times E+(k^2+k_n^2)\nabla\times\nabla\times E\cdot\overline{E}=\\&-\overline{E}\cdot\Delta(\nabla\times\nabla\times E)+\Delta\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-(k^2+k_n^2)\nabla\cdot(\overline{E}\times\nabla\times E)。\end{aligned}$$

进一步利用向量格林积分定理和高斯散度定理,得到:

$$\begin{aligned}&\int_D(\overline{E}\cdot(\nabla\times\nabla+k^2)(\nabla\times\nabla+k_n^2)E)\mathrm{d}x-\int_D[|\nabla\times\nabla\times E|^2+(k^2+k_n^2)|\nabla\times E|^2+k^2k_n^2|E|^2]\mathrm{d}x=\\&\int_D(\nabla\times\nabla\times E\cdot\Delta\overline{E}-\overline{E}\cdot\Delta(\nabla\times\nabla\times E))\mathrm{d}x-\int_D(k^2+k_n^2)\nabla\cdot(\overline{E}\times\nabla\times E)\mathrm{d}x=\\&\int_{\partial D}(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\nabla\times E\cdot\nabla\times\overline{E}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\nabla\times E\,\nabla\cdot\overline{E}-\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times\nabla\times E-\boldsymbol{v}\cdot\overline{E}\,\nabla\cdot(\nabla\times\nabla\times E))\mathrm{d}s-\\&\int_{\partial D}(k^2+k_n^2)(\overline{E}\times\nabla\times E)\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}s\\&\int_{\partial D}\{\boldsymbol{v}\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot[\nabla\times\Delta E+(k^2+k_n^2)\nabla\times E]\}\mathrm{d}s。\end{aligned}\tag{14}$$

现在,所有的密度 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$,定义 $E:=\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a-\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a$,根据引理 4,$E\in H^2(D)$,有:

$$(\nabla\times\nabla+k^2)(\nabla\times\nabla+k_n^2)E=0,\tag{15}$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathrm{E}=-k^2\,\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a+k_n^2\,\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a。$$

因此,得到边界条件:

$$\boldsymbol{v}\times\nabla\times E+\gamma E=0,\gamma(\nabla\times E)=\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a,在\partial D 上,$$

和

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}\times\nabla\times\nabla\times E+\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)=\\&\boldsymbol{v}\times(-k^2\,\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a+k_n^2\,\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a)+\gamma(-k^2\,\nabla\times\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a+k_n^2\,\nabla\times\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a)=\\&-k^2[\boldsymbol{v}\times\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a+\gamma(\nabla\times\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a)]+\\&k_n^2[\boldsymbol{v}\times\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a+\gamma(\nabla\times\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a)]=-(k^2-k_n^2)a,在\partial D 上。\end{aligned}\tag{16}$$

式中:$E:=\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a-\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a$。

进一步考虑:$\boldsymbol{v}\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot[\nabla\times\Delta E+(k^2+k_n^2)\nabla\times E]$,记为 $X+Y$,则:

$$\begin{aligned}&-X=-\boldsymbol{v}\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E=\boldsymbol{v}\times\nabla\times\nabla\times E\cdot\gamma(\nabla\times\overline{E})=\\&[\boldsymbol{v}\times\nabla\times\nabla\times E+\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)]\cdot\gamma(\nabla\times\overline{E})-\gamma(\nabla\times\overline{E})\cdot\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)=\\&-(k^2-k_n^2)a\cdot\overline{\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a}-\gamma(\nabla\times\overline{E})\cdot\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Y=-\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot[\nabla\times\Delta E+(k^2+k_n^2)\nabla\times E]=-\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot\nabla\times\Delta E-(k^2+k_n^2)\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot\nabla\times E=\\&\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times\nabla\times E-(k^2+k_n^2)\overline{E}\cdot\gamma E=-\gamma(\nabla\times\overline{E})\cdot\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)-(k^2+k_n^2)\overline{E}\cdot\gamma E。\end{aligned}$$

所以,有:

$$X+Y=\boldsymbol{v}\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot[\nabla\times\Delta E+(k^2+k_n^2)\nabla\times E]=$$

$$(k^2-k_n^2)a\cdot\overline{\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a}+\gamma(\nabla\times\overline{E})\cdot\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)-\gamma(\nabla\times\overline{E})\cdot\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)-(k^2+k_n^2)\overline{E}\cdot\gamma E=$$
$$(k^2-k_n^2)a\cdot\overline{\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a}-(k^2+k_n^2)\overline{E}\cdot\gamma E。$$

将式(15)代入式(14)有：

$$-\int_D[|\nabla\times\nabla\times E|^2+(k^2+k_n^2)|\nabla\times E|^2+k^2k_n^2|E|^2]\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\partial D}\{\boldsymbol{v}\times\nabla\times\overline{E}\cdot\nabla\times\nabla\times E-\boldsymbol{v}\times\overline{E}\cdot[\nabla\times\Delta E+(k^2+k_n^2)\nabla\times E]\}\mathrm{d}s=$$
$$\int_{\partial D}[(k^2-k_n^2)a\overline{\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a}-(k^2+k_n^2)\overline{E}\cdot\gamma E]\mathrm{d}s=\int_{\partial D}[(k^2-k_n^2)a\overline{\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a}-(k^2+k_n^2)\gamma\overline{E}\cdot\gamma E]\mathrm{d}s。$$

进一步有：

$$(k_n^2-k^2)\int_{\partial D}a\overline{\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a}\mathrm{d}s\geqslant\int_D[|\nabla\times\nabla\times E|^2+k^2k_n^2|E|^2]\mathrm{d}x,\tag{17}$$

并且有：

$$[\nabla\times\nabla]^2E=-(k^4+2k^2k_n^2)\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a+(k_n^4+2k^2k_n^2)\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a,$$

其中：

$$F(E):=(k^2+k_n^2)\nabla\times\nabla\times E-k^2k_n^2E=$$
$$(k_n^4+2k^2k_n^2)\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k_n}Q_{\mathrm{i}k_n}^{-1}a-(k^4+2k^2k_n^2)\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}k}Q_{\mathrm{i}k}^{-1}a=[\nabla\times\nabla]^2E。$$

因此，结合式(16)、迹定理，将文献[14]的定理 3.3 应用于∇×∇×E，有：

$$\|\boldsymbol{v}\times\nabla\times\nabla\times E+\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)\|_{H^{-1/2}(\partial D)}=\|-(k^2-k_n^2)a\|_{H^{-1/2}(\partial D)},$$
$$\|a\|_{H^{-1/2}(\partial D)}\leqslant c_1\|\boldsymbol{v}\times\nabla\times\nabla\times E\|_{H^{-1/2}(\partial D)}+c_2\|\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E\|_{H^{-1/2}(\partial D)}\leqslant$$
$$c_1\|\boldsymbol{v}\times\nabla\times\nabla\times E\|_{L^2(D)}+c_2\|\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E\|_{L^2(D)}。$$

因此，有：

$$\|a\|_{H_t^{-1/2}(\partial D)}\leqslant c\int_D[|\nabla\times\nabla\times E|^2+k^2k_n^2|E|^2]\mathrm{d}x,\tag{18}$$

结合式(17)、(18)，则：

$$(k_n^2-k^2)\int_{\partial D}a\overline{\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a}\mathrm{d}s\geqslant\int_D[|\nabla\times\nabla\times E|^2+k^2k_n^2|E|^2]\mathrm{d}x\geqslant C\|a\|_{H^{-1/2}(\partial D)},$$
$$(k_n^2-k^2)\langle\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i})a,a\rangle_{H_t^{1/2}(\partial D),H_t^{1/2}(\partial D)}\geqslant C\|a\|^2_{H_t^{-1/2}(\partial D)}。$$

式中：任意的 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$ 以及存在常数 $C>0$。　证毕

定理 3　$\Omega(k;\lambda)+\dfrac{k^2-k_n^2}{|k|^2-|k_n|^2}\Omega(\mathrm{i}|k|;\mathrm{i}):H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{1/2}(\partial D)$ 是紧算子。

证明　对任意的 $a\in H_t^{-1/2}(\partial D)$，定义：

$$E_0:=\nabla\times\mathcal{S}_kQ_k^{-1}a-\nabla\times\mathcal{S}_{k_n}Q_{k_n}^{-1}a,\ E_{\mathrm{i}}:=\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}|k|}Q_{\mathrm{i}|k|}^{-1}a-\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}|k_n|}Q_{\mathrm{i}|k_n|}^{-1}a。$$

然后令 $E:=E_0+\dfrac{k^2-k_n^2}{|k|^2-|k_n|^2}E_{\mathrm{i}}$，由引理 4 可知 $E\in H^2(D)$，在边界上得到：

$$\boldsymbol{v}\times\nabla\times E+\gamma E=(1+\mathrm{i}\lambda)\gamma E_0,$$
$$\boldsymbol{v}\times\nabla\times\nabla\times E+\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)=(1+\mathrm{i}\lambda)\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E_0)。$$

此外：

$$[\nabla\times\nabla]^2E=-(k^4+2k^2k_n^2)\nabla\times\mathcal{S}_kQ_k^{-1}a+(k_n^4+2k^2k_n^2)\nabla\times\mathcal{S}_{k_n}Q_{k_n}^{-1}a-$$
$$\frac{k^2-k_n^2}{|k|^2-|k_n|^2}[(|k|^4+2|k|^2|k_n|^2)\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}|k|}Q_{\mathrm{i}|k|}^{-1}a-(|k_n|^4+2|k|^2|k_n|^2)\nabla\times\mathcal{S}_{\mathrm{i}|k_n|}Q_{\mathrm{i}|k_n|}^{-1}a]。$$

并且有 $[\nabla\times\nabla]^2E=F(E_0,E_{\mathrm{i}})$，其中 $F(E_0,E_{\mathrm{i}})\in L^2(D)$，且：

$$F(E_0,E_{\mathrm{i}})=-k^2k_n^2E_0-(k^2+k_n^2)\nabla\times\nabla\times E_0-\frac{k^2-k_n^2}{|k|^2-|k_n|^2}[|k|^2|k_n|^2E_{\mathrm{i}}-(|k|^2+|k_n|^2)\nabla\times\nabla\times E_{\mathrm{i}})]。$$

映射 $a\to F:H_t^{-1/2}(\partial D)\to L^2(D)$ 有界，因为：

$$\gamma(\nabla\times\nabla\times\nabla\times E)=\gamma(\nabla^3\times E)=k^2n(x)\gamma(\nabla\times E)\in H_t^{-3/2}(\partial D),$$

根据对偶等式定义,$a\to\gamma(\nabla^3\times E):H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{3/2}(\partial D)$有界,同理,映射 $a\to\gamma(\nabla^3\times E_0)$是 $H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{3/2}(\partial D)$有界,将文献[14]的定理3.2应用于$\nabla\times\nabla\times E$,再结合该文献的引理3.4,取 m 为0,则$\nabla\times\nabla\times E\in H^2(D)$,映射 $a\to\nabla\times\nabla\times E:H_t^{-1/2}(\partial D)\to H^2(D)$有界,$\gamma(\nabla\times E)\in H^3(D)$。由迹定理有 $\gamma(\nabla\times E)\in H_t^{5/2}(\partial D)$,于是映射 $a\to\gamma(\nabla\times E)$是 $H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{5/2}(\partial D)$和映射 $a\to\gamma(\nabla\times E_0)$是 $H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{5/2}(\partial D)$有界,再一次使用文献[14]的定理3.2,并结合该文献中的引理3.4,取 m 为1,应用正则性结果,有 $E\in H^3(D)$,$\nabla\times\nabla\times E\in H^1(D)$,且映射 $a\to E$ 是从 $H_t^{-1/2}(\partial D)$到 $H^3(D)$是有界的。因此,映射 $a\to\gamma(\nabla\times E)|_{\partial D}$ 从 $H_t^{-1/2}(\partial D)$到 $H^{3/2}(\partial D)$是有界的,又有:

$$\gamma(\nabla\times E)=\gamma\left[\nabla\times\left(E_0+\frac{k^2-k_n^2}{|k|^2-|k_n|^2}E_{\mathrm{i}}\right)\right]=\gamma(\nabla\times E_0)+\frac{k^2-k_n^2}{|k|^2-|k_n|^2}\gamma(\nabla\times E_{\mathrm{i}}),$$

根据阻抗-磁边界迹算子的定义:

$$\gamma(\nabla\times E_0)=\Omega(k;\lambda)a,\gamma(\nabla\times E_i)=\Omega(\mathrm{i}|k|;\mathrm{i})a,$$

从而 $\gamma(\nabla\times E)=\Omega(k;\lambda)a+\dfrac{k^2-k_n^2}{|k|^2-|k_n|^2}\Omega(\mathrm{i}|k|;\mathrm{i})a$ 是从 $H_t^{3/2}(\partial D)$紧嵌入到 $H_t^{1/2}(\partial D)$。 证毕

根据定理2和定理3能够得出下面的结论,并且在折射率为常数的情况下,可以重新建立传输特征值的离散性,下面定理的解析性是指积分算子的核是关于波数 k 解析的。

定理4 $\Omega(k;\lambda):H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{1/2}(\partial D)$是指数为0的 Fredholm 算子且在 $k\in\mathbf{C}$,$\mathrm{Re}(k)>0$,$\mathrm{Im}(k)\geqslant 0$ 处解析。

证明 由定理2可知:$(k_n^2-k^2)\Omega(\mathrm{i}k;\mathrm{i}):H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{1/2}(\partial D)$是强制性的,即有正的下界;由定理3可知:$\Omega(k;\lambda)+\dfrac{k^2-k_n^2}{|k|^2-|k_n|^2}\Omega(\mathrm{i}|k|;\mathrm{i}):H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{1/2}(\partial D)$是紧算子;根据文献[21]的定理23知:如果一个算子可以表示为一个有正下界的算子与一个紧算子之和,那么这个算子被称为是指数为0的 Fredholm 算子;故 $\Omega(k;\lambda):H_t^{-1/2}(\partial D)\to H_t^{1/2}(\partial D)$是指数为0的 Fredholm 算子,在 $k\in\mathbf{C}$,且 $\mathrm{Re}(k)>0$,$\mathrm{Im}(k)\geqslant 0$ 中解析。证毕

推论1 当 $\lambda=0$ 时,$\Omega(k)$从 $H_t^{-1/2}(\partial D)$到 $H_t^{1/2}(\partial D)$是指数为0的 Fredholm 算子且在 $\mathbf{C}\backslash Z$ 解析,其中集合 $Z:=\{k>0\}$,k^2,k_n^2 是一个完美导体 D 的 Maxwell 方程的特征值。

参考文献:

[1] 刘立汉,崔晓英,蔡静秋.基于交互间隙法的内部 Neumann 反散射问题[J].中山大学学报(自然科学版),2019,58(1):149-155.
LIU L H,CUI X Y,CAI J Q. Reciprocity gap method for an interior inverse scattering problem with a Neumann boundary condition[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,2019,58(1):149-155.

[2] 刘立汉,蔡静秋,崔晓英.基于正则的 Newton 迭代法的内部 Neumann 反散射问题[J].中山大学学报(自然科学版),2019,58(2):135-141.
LIU L H,CAI J Q,CUI X Y. Regularized Newton iteration method for an interior inverse scattering problem with a Neumann boundary condition[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,2019,58(2):135-141.

[3] KIRSCH A. The denseness of the far field patterns for the transmission problem[J]. IMA Journal of Applied Mathematics,1986,37(3):213-225.

[4] CAKONI F,COLTON D,MONK P. On the use of transmission eigenvalues to estimate the index of refraction from far field data[J]. Inverse Problems,2007,23(2):507-522.

[5] CAKONI F,COLTON D,HADDAR H. The computation of lower bounds for the norm of the index of refraction in an anisotropic media from far field data[J]. The Journal of Integral Equations and Applications,2009,21(2):203-227.

[6] CAKONI F,COLTON D,HADDAR H. On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far field data[J]. Comptes Rendus Mathematique,2010,348(7/8):379-383.

[7] CAKONI F,MOSKOW S. Asymptotic expansions for transmission eigenvalues for media with small inhomogeneities[J]. Inverse Problems,2013,29(10):839-870.

[8] DELBARY F. Transmission eigenvalues for Maxwell's equations in isotropic absorbing media with frequency-dependent electrical parameters[J]. Inverse Problems,2013,29(10):157-177.

[9] SUN J G,XU L W. Computation of Maxwell's transmission eigenvalues and its applications in inverse medium problems[J].

Inverse Problems,2013,29(10):217-235.

[10] MONK P, SUN J G. Finite element methods for Maxwell's transmission eigenvalues[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2012,34(3):247-264.

[11] COSSONNIÈRE A,HADDAR H. Surface integral formulation of the interior transmission problem[J]. Journal of Integral Equations and Applications,2013,25(3):341-376.

[12] CAKONI F, HADDAR H, MENG S. Boundary integral equations for the transmission eigenvalue problem for Maxwell's equations[J]. The Journal of Integral Equations and Applications,2015,27(3):375-406.

[13] CAKONI F,KRESS R. A boundary integral equation method for the transmission eigenvalue problem[J]. Applicable Analysis, 2017,96(1):23-38.

[14] CAKONI F,IVANYSHYN YAMAN O,KRESS R,et al. A boundary integral equation for the transmission eigenvalue problem for Maxwell equation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2018,41(4):1316-1330.

[15] HARRIS I. Analysis of two transmission eigenvalue problems with a coated boundary condition[J]. Applicable Analysis,2021, 100(9):1996-2019.

[16] KURZ S,SCHÖPS S,UNGER G,et al. Solving Maxwell's eigenvalue problem via isogeometric boundary elements and a contour integral method[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2021,44(13):10790-10803.

[17] CAKONI F,NGUYEN H M. On the discreteness of transmission eigenvalues for the Maxwell equations[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,2021,53(1):888-913.

[18] CAKONI F,MENG S X,XIAO J N. A note on transmission eigenvalues in electromagnetic scattering theory[J]. Inverse Problems & Imaging,2021,15(5):999-1014.

[19] CAKONI F,GINTIDES D,HADDAR H. The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,2010,42(1):237-255.

[20] PÄIVÄRINTA L,SYLVESTER J. Transmission eigenvalues[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,2008,40(2):738-753.

[21] MCLEAN W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations[M]. Cambridge:Cambridge University Press,2000.

[22] COLTON D,KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory[M]. 3rd edition. New York:Springer,2013.

[23] COLTON D,KRESS R. Integral equation methods in scattering theory[M]. New York:Wiley,1983.

[24] KRESS R. Linear integral equations[M]. New York:Springer,2013.

Transmission Eigenvalue Problem of Maxwell's Equations with Impedance Boundary Condition

WU Xuejiao, LIU Lihan, WANG Xiaoqing

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] The transmission eigenvalue problem is very important for inverse problems. [**Methods**] The transmission eigenvalue problem of Maxwel's equations with impedance boundary condition in penetrable, nonmagnetic and nonuniform media was studied by using the boundary integral equation method. [**Results**] The impedance-magnetic boundary trace operator was constructed, and the impedance magnetic boundary trace operator was expressed by the boundary integral operator. [**Conclusions**] It is proved that one kind of boundary integral operator is coercive, another kind of boundary integral operator is compact, and the difference operator of impedance magnetic boundary trace operator is a Fredholm operator with index zero and analytic.

Keywords: boundary integral equation method; transmission eigenvalue problem; impedance-magnetic boundary trace operator; Fredholm operator

(责任编辑　黄　颖)