运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20230418

布尔控制网络关于任意输入的能达性、能观性和能检性*

李一峰[1], 周雪丽[2], 刘云杰[1]

(1. 重庆国家应用数学中心, 重庆 401331; 2. 南京师范大学 数学科学学院, 南京 210023)

摘要:在矩阵半张量积理论框架下,研究布尔控制网络关于任意输入的能达性、能观性和能检性问题。首先研究在任意输入下布尔控制网络的能达性,提出任意输入下的能达性和集能达性定义,并构造检验系统在任意输入下能达(集能达)的能达性矩阵(集能达性矩阵)。其次,应用任意输入下集能达性的研究结果,研究布尔控制网络在任意输入下的能观性和能检性问题,获得这两个问题可解的充分必要条件。最后,给出两个例子验证所得理论结果的有效性。

关键词:能达性;能观性;能检性;布尔控制网络;任意输入

中图分类号:O233 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2023)04-0006-09

基因调控网络在系统生物学中发挥着至关重要的作用。许多模型,包括常微分方程和偏微分方程、贝叶斯网络和布尔网络,可以用来模拟复杂的基因调控网络[1-3]。其中,布尔网络已被证明是建模、评估和模拟基因调控网络的有力工具[4-5]。布尔网络最早由 Kauffman 于 1969 年引入[1],其中的每个基因都由一个布尔变量(激活/非激活:1/0)表征,每个节点的进化由逻辑运算符组成的逻辑函数决定。此外,由于外部输入会影响基因调控网络的动力学和输出,因此将布尔网络扩展到布尔控制网络以模拟这些外部输入[6]。

Cheng 等人[7]建立了基于矩阵的半张量积的布尔网络/布尔控制网络的代数表示法,这使得布尔网络和布尔控制网络的经典控制理论问题的描述和解决变得相对容易。因此,布尔网络和布尔控制网络控制理论中的许多基本问题都得到了很好的研究,如能控性和能观性[8-16]、最优控制[17-18]、稳定性和稳定化[19-25]、系统分解[26-29]、解耦[30-34]、输出调节[35]、同步[36-37]和状态空间[38-39]。

布尔控制网络的能控性和能观性是近些年来在矩阵半张量积框架下被广泛研究的两个基本问题[8-16,40-44]。例如,在文献[8]中,提出了一个能控性矩阵,布尔控制网络的能控性可以通过检查能控性矩阵来确定。在文献[41]中,通过应用 Perron-Frobenius 理论研究了固定时间能控性。在文献[14]中,讨论了能观性的 4 个定义,并首次揭示了它们之间的关系。能检性是一个用来描述状态估计的概念,它比能观性要弱。对于布尔网络来说,能检性和可重构性具有相同的含义。在文献[12,45-46]中提出了布尔网络能检性的必要充分条件。

尽管在布尔控制网络的能控性、能观性和能检性方面得到了许多有趣的结果,但在上述结果中,布尔控制网络的关于任意输入的能达性、能观性和能检性还没有被充分考虑。由于干扰在实际的基因调控网络中经常遇到,例如环境变化可以被认为是现实中经常发生的一种外部干扰,而外部干扰常常会损害系统的性能;因此研究布尔控制网络关于任意输入的能达性、能观性和能检性具有重要的理论意义,这也正是本文考虑的主要问题。另外,众所周知,对于传统的控制系统,能观性与能控性对偶。而对于布尔控制网络来说,能控性和能观性之间的对偶关系还没有被发现。最近,有人提出了集合能控性的概念并用以处理布尔控制网络的能观性问题,且在文献[11]中揭示了能观性和能控性之间的一些关系。一个有趣的问题是,对于布尔控制网络,任意输入下的能达性和能观性之间的关系是什么。本文利用文献[11]中的观点为这个问题提供了一个结果。

基于上述动机,本文研究布尔网络在任意输入下的能达性、能观性和能检性,主要贡献如下:1) 针对布尔控制网络,提出了任意输入的能达性和集合能达性的定义,构建了任意输入的能达性矩阵和集合能达性矩阵,以检验任意输入下的布尔控制网络的能达性和集合能达性。2) 将所获得的关于任意输入的集合能达性结果应用于

* **收稿日期**:2023-04-21 **修回日期**:2023-05-16 **网络出版时间**:2023-09-01T09:59

资助项目:重庆市自然科学基金项目(No. CSTB2022NSCQ-MSX0325);重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJQN202200524);重庆师范大学博士启动基金人才引进项目(No. 21XLB045);重庆市科学技术局项目(No. ncamc2022-msxm05)

第一作者简介:李一峰,男,讲师,博士,研究方向为逻辑动态系统的控制理论,E-mail:liyifeng@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230831.1724.002

3 个方面，即布尔控制网络的输出能达性、能观性（文献[14]中的最强能观性）和强能检性，并给出了它们的必要条件和充分条件。

本文第 1 节介绍了一些基本知识，如记号、布尔控制网络的代数形式和一些必要的定义；第 2、3 节研究了布尔控制网络任意输入下的能达性、能观性和能检性；第 4 节举例说明获得的理论结果；第 5 节对全文进行小结。

1　基础知识

本文使用如下记号：$|S|$表示集合 S 中元素的个数；$\overline{S}$ 表示集合 S 在集合 M 中的补集，即 $\overline{S}=M\backslash S$，其中 $S\subseteq M$；$[a,b]:=\{a,a+1,\cdots,b\}$，其中 $a\leqslant b$ 为整数；$\mathbf{R}_{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 维的实矩阵集合；$\mathrm{Col}_i(\boldsymbol{A})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列；$\mathrm{Col}(\boldsymbol{A})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列构成的集合；$\mathbf{1}_k$ 表示 k-维列向量且每个元素为 1；δ_k^i 表示单位矩阵 $\boldsymbol{I}_k$ 的第 i 列；$\Delta_k:=\{\delta_k^i:i=1,2,\cdots,k\}$，特别地，记 $\Delta_2=\{\delta_2^1,\delta_2^2\}$ 为 Δ；$\mathcal{B}:=\{0,1\}$；$\mathcal{B}^n$ 为 n-维布尔向量构成的集合；$\mathcal{B}_{m\times n}$ 为 $m\times n$-维布尔矩阵集合；$\mathcal{L}_{m\times n}:=\{\boldsymbol{L}\in\mathbf{R}_{m\times n}\mid\mathrm{Col}(\boldsymbol{L})\subset\Delta_m\}$，$\boldsymbol{L}\in\mathcal{L}_{m\times n}$ 被称为是一个逻辑矩阵；$(\mathcal{B})\sum$ 表示布尔和；$\delta_m[i_1,i_2,\cdots,i_r]:=[\delta_m^{i_1}\quad\delta_m^{i_2}\quad\cdots\quad\delta_m^{i_r}]$。

定义 1[7]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}_{p\times q}$，令 $\alpha=\mathrm{lcm}(n,p)$为 n 和 p 的最小公倍数。则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵半张量积定义为 $\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_{\alpha/n})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{\alpha/p})$，其中$\otimes$为 Kronecker 积。

如果 $n=p$，那么矩阵半张量积退化为传统矩阵乘法。本文为了简化书写，记 $\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{AB}$。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{R}_{m\times n}$，定义“$+_{\mathcal{B}}$”为：

$$(\boldsymbol{A}+_{\mathcal{B}}\boldsymbol{B})_{ij}=\begin{cases}1,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ij}\neq 0,\\0,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ij}=0。\end{cases}$$

特别地，$(\mathcal{B})\sum_{k=1}^{n}A_k:=A_1+_{\mathcal{B}}A_2+_{\mathcal{B}}\cdots+_{\mathcal{B}}A_n$。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{R}_{p\times q}$，定义“$\ltimes_{\mathcal{B}}$”为：

$$(\boldsymbol{A}\ltimes_{\mathcal{B}}\boldsymbol{B})_{ij}=\begin{cases}1,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ij}\neq 0,\\0,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ij}=0。\end{cases}$$

特别地，$A^{(k)}:=A\ltimes_{\mathcal{B}}A\ltimes_{\mathcal{B}}\cdots\ltimes_{\mathcal{B}}A$。

将布尔变量 $\boldsymbol{X}\in\mathcal{B}$ 与逻辑向量 $\boldsymbol{x}\in\Delta_2$ 做如下等价：$\boldsymbol{X}=1\sim\boldsymbol{x}=\delta_2^1$ 和 $\boldsymbol{X}=0\sim\boldsymbol{x}=\delta_2^2$。令 $\boldsymbol{x}_i$ 逻辑变量 $\boldsymbol{X}_i$ 的向量形式，即 $\boldsymbol{X}_i\sim\boldsymbol{x}_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{B}^n$ 和 $\boldsymbol{x}\ltimes_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\in\Delta_{2^n}$ 之间存在一一对应。

一般的控制布尔网络如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(t+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{U}(t)),\\\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}(t))。\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{B}^n$，$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_m]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{B}^m$，$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\cdots,\boldsymbol{Y}_p]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{B}^p$ 分别表示系统的状态向量、输入向量和输出向量。此外，$\boldsymbol{f}=[f_1,f_2,\cdots,f_n]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{B}^{n+m}\to\mathcal{B}^n$，$\boldsymbol{h}=[h_1,h_2,\cdots,h_p]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{B}^n\to\mathcal{B}^p$ 分别表示系统的状态映射和输出映射。令 $\boldsymbol{x}=\ltimes_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{u}=\ltimes_{i=1}^{m}\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{y}=\ltimes_{i=1}^{p}\boldsymbol{y}_i$，其中 $\boldsymbol{X}_i\sim\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{U}_i\sim\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{Y}_i\sim\boldsymbol{y}_i$。利用矩阵半张量积的性质，参考文献[7]的方法，布尔控制网络(1)可以表示为如下代数形式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{Lu}(t)\boldsymbol{x}(t),\\\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Hx}(t)。\end{cases}\tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{L}\in\mathcal{L}_{2^n\times 2^{n+m}}$，$\boldsymbol{H}\in\mathcal{L}_{2^p\times 2^n}$。

定义 2[7]　考虑布尔控制网络(2)，则：

1) 称 $\boldsymbol{x}_d$ 是从 $\boldsymbol{x}_0$ 能控的，如果存在 s 和控制序列$\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{s-1}$，使得 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}_d$。

2) 称系统(2)在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是能控的，如果对任意的 $\boldsymbol{x}_d\in\Delta_{2^n}$，$\boldsymbol{x}_d$ 是从 $\boldsymbol{x}_0$ 能控的。

3) 称系统(2)是能控的，如果对任意的 $\boldsymbol{x}\in\Delta_{2^n}$，系统(2)在 $\boldsymbol{x}$ 处是能控的。

令 $\boldsymbol{C}^k=(\boldsymbol{L}\ltimes_{\mathcal{B}}\mathbf{1}_{2^m})^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{C}=(\mathcal{B})\sum_{k=1}^{2^n}\boldsymbol{C}^k$，它们分别被称为是 k-步能控性矩阵和能控性矩阵[8]。

引理 1[8]　考虑布尔控制网络(2)，有：

1) $\boldsymbol{x}_d=\delta_{2^n}^i$ 是从 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 能控的当且仅当 $\boldsymbol{C}_{ij}=1$。

2) 系统(2)在 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 处是能控的当且仅当 $\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{1}_{2^n}$。

3) 系统(2)是能控的当且仅当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{1}_{2^n}\times\boldsymbol{1}_{2^n}$。

定义 3[21]　一个子集 $\mathcal{C}\subset\Delta_{2^n}$ 被称为是布尔控制网络(2)的控制不变子集，如果对任意的 $\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{C}$，存在一个控制序列 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$，使得 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{C}$，$\forall t\geqslant 0$。

特别地，若 $\mathcal{C}\subset\mathcal{M}$，则称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的控制不变子集。显然，$\mathcal{M}$ 中的任意两个控制不变子集的并集仍是控制不变子集。$\mathcal{M}$ 所有的控制不变子集的并集称为 $\mathcal{M}$ 中的最大控制不变子集，记为 $I_c(\mathcal{M})$。

引理 2[21]　考虑布尔控制网络(2)。设 $\mathcal{M}\subset\Delta_{2^n}$，$q=|\mathcal{M}|$。定义 $M_i:=M_{i-1}\ltimes_{\mathcal{B}}\boldsymbol{C}^1\ltimes_{\mathcal{B}}M_0$，$i=1,2,\cdots,q$，其中：$\boldsymbol{C}^1=\boldsymbol{L}\ltimes_{\mathcal{B}}\boldsymbol{1}_{2^m}$，$\mathrm{Col}_j(M_0)=\begin{cases}\delta_{2^n}^j, & \delta_{2^n}^j\in\mathcal{M}\\ \delta_{2^n}^0, & \delta_{2^n}^j\notin\mathcal{M}\end{cases}$，则 $I_c(\mathcal{M})=\{\delta_{2^n}^j\in\Delta_{2^n}\mid\mathrm{Col}_j(M_q)\neq\boldsymbol{0}_{2^n}\}$。

2　布尔控制网络关于任意输入的能达性

这一节中研究了布尔控制网络的能达性、集合能达性和输出能达性，并得到了它们的必要和充分条件。

定义 4　考虑布尔控制网络(2)。

1) $\boldsymbol{x}_d\in\Delta_{2^n}$ 称为是从 $\boldsymbol{x}_0\in\Delta_{2^n}$ 关于任意输入强能达的，如果对于 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，存在一个整数 s，使得对任意的输入序列 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$，有 $\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}_d$。

2) 布尔控制网络(2)称为是在 $\boldsymbol{x}_0\in\Delta_{2^n}$ 关于任意输入强能达的，如果对于任意的 $\boldsymbol{x}_d\in\Delta_{2^n}$，$\boldsymbol{x}_d$ 是从 $\boldsymbol{x}_0$ 关于任意输入强能达的。

3) 布尔控制网络(2)称为是关于任意输入强能达的，如果对任意的 $\boldsymbol{x}_0\in\Delta_{2^n}$，系统是在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于任意输入强能达的。

定义如下 k-步关于任意输入的强能达矩阵 $\mathcal{R}^k$：$\mathrm{Col}_j(\mathcal{R}^k)=\begin{cases}\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}^k), & \mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}^k)\in\Delta_{2^n}\\ \delta_{2^n}^0, & \text{否则}\end{cases}$，其中 $\boldsymbol{C}^k$ 是 k-步能控性矩阵；关于任意输入的强能达矩阵 $\mathcal{R}$：$\mathcal{R}=(\mathcal{B})\sum\limits_{k=1}^{2^n}\mathcal{R}^k$。

定理 1　考虑布尔控制网络(2)，有：

1) $\boldsymbol{x}_d=\delta_{2^n}^i$ 是从 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 关于任意输入强能达的当且仅当 $(\mathcal{R})_{ij}=1$。

2) 布尔控制网络(2)是在 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 关于任意输入强能达的当且仅当 $\mathrm{Col}_j(\mathcal{R})=\boldsymbol{1}_{2^n}$。

3) 布尔控制网络(2)是关于任意输入强能达的当且仅当 $\mathcal{R}=\boldsymbol{1}_{2^n}\times\boldsymbol{1}_{2^n}$。

证明　1) 因为 $(\mathcal{R})_{ij}=\left((\mathcal{B})\sum\limits_{k=1}^{2^n}\mathcal{R}^k\right)$，$(\mathcal{R})_{ij}=1$ 当且仅当 $\exists k_0\in[1,2^n]$，使得 $(\mathcal{R}^{k_0})_{ij}=1$，即 $\mathrm{Col}_j(\mathcal{R}^{k_0})=\delta_{2^n}^i$。由 $\mathcal{R}^{k_0}$ 的定义可知，$\mathrm{Col}_j(\mathcal{R}^{k_0})=\delta_{2^n}^i\Leftrightarrow\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}^{k_0})=\delta_{2^n}^i$。因此，$(\mathcal{R})_{ij}=1$ 当且仅当 $\exists k_0\in[1,2^n]$，使得 $\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}^{k_0})=\delta_{2^n}^i$。下面只需要证明：$\boldsymbol{x}_d=\delta_{2^n}^i$ 是从 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 任意输入下强能达的当且仅当 $\exists k_0\in[1,2^n]$，使得 $\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}^{k_0})=\delta_{2^n}^i$。

(必要性)如果 $\boldsymbol{x}_d=\delta_{2^n}^i$ 是从 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 任意输入下强能达的，则存在一个整数 s，使得对任意的 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$ 有 $\boldsymbol{x}(s)=\delta_{2^n}^i$。根据引理1有 $\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}^s)=\delta_{2^n}^i$。令 $k_0=s$，则有 $\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}^{k_0})=\delta_{2^n}^i$。

(充分性)假设存在 k_0，使得 $\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}^{k_0})=\delta_{2^n}^i$。则根据引理1，对于 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$，对任意的 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$，有 $\boldsymbol{x}(k_0)=\delta_{2^n}^j$。令 $s=k_0$，则有 $\boldsymbol{x}_d=\delta_{2^n}^i$，是从 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 任意输入下强能达的。

2) 根据定义4，布尔控制网络(2)在 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 处是关于任意输入强能达的，对任意的 $\boldsymbol{x}_d=\delta_{2^n}^i$ 是从 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$ 任意输入下强能达的。根据1)和 i 的任意性，则有 $\mathrm{Col}_j(\boldsymbol{C}_d)=\boldsymbol{1}_{2^n}$。

3) 布尔控制网络(2)是关于任意输入强能达的，即对任意的 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j$，布尔控制网络(2)在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是关于任意输入强能达的。根据2)和 j 的任意性，则有 $\mathcal{R}=\boldsymbol{1}_{2^n}\times\boldsymbol{1}_{2^n}$。　　证毕

定理1是从单个状态的角度研究布尔控制网络(2)在任意输入下的能达性。考虑到日常实践中，2个集族关

于任意输入的能达性更具有实际意义，下面研究带有初始集族和目标集族的布尔控制网络关于任意输入的能达性。受状态间在任意输入下的能达性的启发，下面研究带有初始集族和目标集族的布尔控制网络关于任意输入下的能达性。

定义 5　考虑带有初始集族 $P^0=\{S_1^0,\cdots,S_\alpha^0\}$ 和目标集族 $P^d=\{S_1^d,\cdots,S_\beta^d\}$ 的布尔控制网络(2)，其中 S_j^0，$S_i^d\subset\Delta_{2^n}$，$j\in[1,\alpha]$，$i\in[1,\beta]$。则有：

1) $S_i^d\in P^d$ 称为是从 $S_j^0\in P^0$ 关于任意输入集能达的，如果对于任意的输入序列 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$，存在一个整数 s，$\boldsymbol{x}_0\in S_j^0$ 和 $\boldsymbol{x}_d\in S_i^d$，使得 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}_d$。

2) 布尔控制网络(2)称为是在 S_j^0 关于任意输入集能达的，如果对任意的 $S_i^d\in P^d$，S_i^d 是从 S_j^0 关于任意输入能达的。

3) 布尔控制网络(2)称为关于任意输入集能达的，如果对于任意的 $S_j^0\in P^0$，系统是在 S_j^0 关于任意输入能达的。

对于 $S\subset\Delta_{2^n}$，S 的指标向量定义如下：$\boldsymbol{V}(S)=(\mathcal{B})\sum_{\boldsymbol{x}\in S}\boldsymbol{x}$。考虑初始集族 $P^0=\{S_1^0,\cdots,S_\alpha^0\}$ 和目标集族 $P^d=\{S_1^d,\cdots,S_\beta^d\}$，初始指标矩阵定义为 $\boldsymbol{J}_0=[\boldsymbol{V}(S_1^0)\ \cdots\ \boldsymbol{V}(S_\alpha^0)]$，目标指数矩阵为 $\boldsymbol{J}_d=[\boldsymbol{V}(S_1^d)\ \cdots\ \boldsymbol{V}(S_\beta^d)]$。

下面的定理考虑如下情况：对任意的 $S_j^0\in P^0$，$S_j^0\in\{\delta_{2^n}^j\}$。定义：

$$\mathcal{R}_S:=[\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_1^d}))\ \cdots\ \boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_\beta^d}))]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{V}(S_1^0)\ \cdots\ \boldsymbol{V}(S_\alpha^0)]\in\mathcal{B}_{\beta\times\alpha}。$$

定理 2　考虑带有初始集族 $P^0=\{S_1^0,\cdots,S_\alpha^0\}$ 和目标集族 $P^d=\{S_1^d,\cdots,S_\beta^d\}$ 的布尔控制网络(2)，其中 S_j^0，$S_i^d\subset\Delta_{2^n}$，$j\in[1,\alpha]$，$i\in[1,\beta]$。则有：

1) $S_i^d\in P^d$ 是从 $S_j^0\in P^0$ 关于任意输入是集能达的当且仅当 $(\mathcal{R}_S)_{ij}=\boldsymbol{0}$。

2) 布尔控制网络(2)是在 S_j^0 关于任意输入集能达的当且仅当 $\mathrm{Col}_j(\mathcal{R}_S)=\boldsymbol{0}_\beta$。

3) 布尔控制网络(2)是关于任意输入集能达的当且仅当 $\mathcal{R}_S=\boldsymbol{0}_{\beta\times\alpha}$。

证明　1) 利用反证法证明。假设 S_i^d 不是从 $S_j^0\in P^0$ 关于任意输入是集能达的，即存在 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$，使得 $\boldsymbol{x}(t;\delta_{2^n}^j)\in\overline{S_l^d}$，$\forall\, t\geqslant 0$，根据定义 3 有，$\delta_{2^n}^j\in I_C(\overline{S_l^d})$。因此，$S_i^d$ 不是从 $S_j^0\in P^0$ 关于任意输入是集能达的当且仅当 $\delta_{2^n}^j\in I_C(\overline{S_l^d})$。且由于 $\boldsymbol{V}(S_j^0)=\delta_{2^n}^j$，$\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_l^d}))=\sum_{\boldsymbol{x}\in I_C(\overline{S_l^d})}\boldsymbol{x}$，则有：

$$\delta_{2^n}^j\in I_C(\overline{S_l^d})\Leftrightarrow(\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_l^d})))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}(S_j^0)=\boldsymbol{1}。$$

因此，$S_i^d\in P^d$ 是从 $S_j^0\in P^0$ 关于任意输入是集能达的当且仅当 $(\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_l^d})))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}(S_j^0)=\boldsymbol{0}$，即 $(\mathcal{R}_S)_{ij}=\boldsymbol{0}$。

2) 由定义 5 可知，布尔控制网络(2)是在 S_j^0 处关于任意输入集能达的，即是对于任意的 $S_i^d\in P^d$，S_i^d 是从 S_j^0 关于任意输入集能达的。根据 1)和 i 的任意性，则有 $\mathrm{Col}_j(\mathcal{R}_S)=\boldsymbol{0}_\beta$。

3) 布尔控制网络 2)是关于任意输入集能达的，即任意的 $S_j^0\in P^0$，布尔控制网络(2)是在 S_j^0 处关于任意输入集能达的。根据 2)和 j 的任意性，$\mathcal{R}_S=\boldsymbol{0}_{\beta\times\alpha}$。　　证毕

定义 6　布尔控制网络(2)称为关于任意输入是输出能达的，如果对任意的 $\boldsymbol{x}_0\in\Delta_{2^n}$，$\boldsymbol{y}_d\in\Delta_{2^n}$，对任意的 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=}^{+\infty}0$，存在一个整数 s，使得 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{Hx}(s;\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_d$。

定理 3　给定 $P^0=\{S_1^0,\cdots,S_{2^n}^0\}$，$P^d=\{S_1^d,\cdots,S_{2^p}^d\}$，其中 $S_i^d=\{\boldsymbol{x}\in\Delta_{2^n}\mid\boldsymbol{Hx}=\delta_{2^p}^i\}$，$i=1,\cdots,2^p$；$S_j^0=\{\delta_{2^n}^j\}$，$j=1,\cdots,2^n$。布尔控制网络(2)关于任意输入是输出能达的当且仅当布尔控制网络(2)是关于任意输入从 P^0 到 P^d 是集能达的。

证明　(充分性)如果 P^d 是从 P^0 关于任意输入是集能达的，即对任意的 $\{\delta_{2^n}^j\}\in P^0$，$S_i^d\in P^d$，对任意的 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$，存在一个整数 s，使得 $\boldsymbol{x}(0)=\delta_{2^n}^j$，$\boldsymbol{x}(s)\in S_i^d$。

由 $S_i^d=\{\boldsymbol{x}\in\Delta_{2^n}\mid\boldsymbol{Hx}=\delta_{2^p}^i\}$ 有：$\boldsymbol{x}(s)\in S_i^d\Leftrightarrow\boldsymbol{Hx}(s)=\delta_{2^p}^i$。

因此，对任意的 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j\in\Delta_{2^n}$，$\boldsymbol{y}_d=\delta_{2^p}^i\in\Delta_{2^n}$，对任意的输入 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$，存在一个整数 s，使得 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{Hx}(s)=\boldsymbol{y}_d$。即布尔控制网络(2)关于任意输入是输出能达的。

(必要性)如果布尔控制网络(2)关于任意输入是输出能达的，即对任意的 $\boldsymbol{x}_0=\delta_{2^n}^j\in\Delta_{2^n}$，$\boldsymbol{y}_d=\delta_{2^p}^i\in\Delta_{2^n}$，对

任意的输入序列$\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,存在一个整数$s$,使得$\boldsymbol{Hx}(s)=\boldsymbol{y}_d$。由$S_i^d$的构建可知,$\boldsymbol{x}(s)\in S_i^d$。因此,对任意的$\{\delta_{2^n}^j\}\in P^0$,$S_i^d\in P^d$,对任意的$\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,存在一个整数$s$,使得$\boldsymbol{x}(0)=\delta_{2^n}^j$,$\boldsymbol{x}(s)\in S_i^d$。即布尔控制网络(2)是关于任意输入从$P^0$到$P^d$是集能达的。 证毕

推论1 给定$P^0=\{S_1^0,\cdots,S_{2^n}^0\}$,$P^d=\{S_1^d,\cdots,S_{2^p}^d\}$,其中$S_i^d=\{\boldsymbol{x}\in\Delta_{2^n}\mid \boldsymbol{Hx}=\delta_{2^p}^i\}$,$i=1,\cdots,2^p$,$S_j^0=\{\delta_{2^n}^j\}$,$j=1,\cdots,2^n$。布尔控制网络(2)关于任意输入是输出能达的当且仅当$\forall i\in[1,2^p]$,$I_C(\overline{S_i^d})=\varnothing$。

证明 根据定理3,布尔控制网络(2)关于任意输入是输出能达的当且仅当布尔控制网络(2)是关于任意输入从P^0到P^d是集能达的,根据定理2,有$\mathcal{R}_S=\boldsymbol{0}_{2^p\times 2^n}$,且由:

$$\mathcal{R}_S=[\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_1^d}))\quad\cdots\quad\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_{2^p}^d}))]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{V}(S_1^0)\quad\cdots\quad\boldsymbol{V}(S_{2^n}^0)]=$$

$$[\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_1^d}))\quad\cdots\quad\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_{2^p}^d}))]^{\mathrm{T}}[\delta_{2^n}^1\quad\cdots\quad\delta_{2^n}^{2^n}]=[\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_1^d}))\quad\cdots\quad\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_{2^p}^d}))]^{\mathrm{T}}。$$

则有$[\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_1^d}))\quad\cdots\quad\boldsymbol{V}(I_C(\overline{S_{2^p}^d}))]=\boldsymbol{0}_{2^n\times 2^p}$,进而有$\forall i\in[1,2^p]$,$I_C(\overline{S_i^d})=\varnothing$。 证毕

3 布尔控制网络关于任意输入的能观性和能检性

本节根据上一节得到的关于任意输入下的集能达结果,考虑布尔控制网络关于任意输入的能观性、能检性问题,首先介绍布尔控制网络关于任意输入的能观性、能检性的定义。

定义7[14] 布尔控制网络(2)称为是能观的,如果对任意的$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{z}_0\in\Delta_{2^n}$,其中$\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{z}_0$,对任意的输入序列$\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,存在一个整数$s$,使得$\boldsymbol{y}(s;\boldsymbol{x}_0)\neq\tilde{\boldsymbol{y}}(s;\boldsymbol{z}_0)$。

定义8[46] 布尔控制网络(2)称为是强能检的,如果对任意的$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{z}_0\in\Delta_{2^n}$,其中$\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{z}_0$,对任意的输入序列$\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,存在一个整数$s$,使得$\boldsymbol{y}(s;\boldsymbol{x}_0)\neq\tilde{\boldsymbol{y}}(s;\boldsymbol{z}_0)$或$\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)\neq\boldsymbol{z}(s;\boldsymbol{z}_0)$。

注1 根据定义7和定义8,布尔控制网络(2)是能观的,则一定是强能检的,但反之不成立。

考虑状态点对$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\in\Delta_{2^n}\times\Delta_{2^n}$,并构建$\Delta_{2^n}\times\Delta_{2^n}$的一个划分:$\Delta_{2^n}\times\Delta_{2^n}=\mathcal{D}\cup\Theta\cup\Xi$,其中:

$$\mathcal{D}=\{\boldsymbol{zx}\mid\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\},\Theta=\{\boldsymbol{zx}\mid\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{x},\boldsymbol{Hz}=\boldsymbol{Hx}\},\Xi=\{\boldsymbol{zx}\mid\boldsymbol{Hz}\neq\boldsymbol{Hx}\}。\tag{3}$$

利用代数形式(2),构建一个辅助系统:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{Lu}(t)\boldsymbol{x}(t),\\ \boldsymbol{z}(t+1)=\boldsymbol{Lu}(t)\boldsymbol{z}(t)。\end{cases}\tag{4}$$

下面通过将布尔控制网络(2)的可观察性和强可检测性问题转换为扩展系统(4)关于任意扰动输入的集能达性问题来考虑。

定理4 考虑$P^0=\{\{\boldsymbol{zx}\}\mid\boldsymbol{zx}\in\Theta\}$,$P^d=\{\Xi\}$。布尔控制网络(2)是能观的当且仅当系统(4)是关于任意输入从P^0到P^d是集能达的。

证明 (必要性)对任意的$\{\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\}\in P^0$,有$\boldsymbol{z}_0\neq\boldsymbol{x}_0$和$\boldsymbol{Hz}_0=\boldsymbol{Hx}_0$。如果布尔控制网络(2)是能观的,则对任意的输入序列$\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,存在一个整数$s$,使得$\boldsymbol{Hx}(s;\boldsymbol{x}_0)\neq\boldsymbol{Hz}(s;\boldsymbol{z}_0)$,即$\boldsymbol{z}(s)\boldsymbol{x}(s)\in\Xi$。

因此,对任意的$\{\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\}\in P^0$和任意的$\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,存在一个整数$s$,使得$\boldsymbol{z}(s)\boldsymbol{x}(s)\in\Xi$。换句话说,系统(4)是关于任意输入从$P^0$到$P^d$是集能达的。

(充分性)考虑点对$(\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{x}_0)$,其中$\boldsymbol{z}_0\neq\boldsymbol{x}_0$。如果$\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\in\Xi$,则$\boldsymbol{Hz}(0)\neq\boldsymbol{Hx}(0)$,即$\boldsymbol{y}(0)\neq\tilde{\boldsymbol{y}}(0)$。否则,$\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\in\Theta$。因为系统(4)是关于任意输入从$P^0$到$P^d$是集能达的,则对任意的$\{\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\}\in P^0$,$\Xi\in P^d$和对任意的$\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,存在一个整数$s$,使得$\boldsymbol{z}(0)\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0$,$\boldsymbol{z}(s;\boldsymbol{z}_0)\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)\in\Xi$,这意味着$\boldsymbol{Hx}(s;\boldsymbol{x}_0)\neq\boldsymbol{Hz}(s;\boldsymbol{z}_0)$,即$\boldsymbol{y}(s)\neq\tilde{\boldsymbol{y}}(s)$。因此,布尔控制网络(2)是能观的。 证毕

根据定理2、定理4,有如下推论。

推论2 考虑$P^0=\{\{\boldsymbol{zx}\}\mid\boldsymbol{zx}\in\Theta\}$,$P^d=\{\Xi\}$,布尔控制网络(2)是能观的当且仅当$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(I_C(\overline{\Xi}))\boldsymbol{V}(\Theta)=\boldsymbol{0}$。

证明 记P^0的指标矩阵为$\boldsymbol{J}_0$。依据定理4,布尔控制网络(2)是能观的当且仅当系统(4)是关于任意输入从P^0到P^d是集能达的。由定理2可知$\mathcal{R}_S=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(I_C(\overline{\Xi}))\boldsymbol{J}_0=\boldsymbol{0}$,鉴于$\bigcup_{\{\boldsymbol{zx}\}\in P^0}\{\boldsymbol{zx}\}=\Theta$,有$\mathcal{R}_S=\boldsymbol{V}(I_C(\overline{\Xi}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_0=\boldsymbol{0}$,当且仅当$\boldsymbol{V}(I_C(\overline{\Xi}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}(\Theta)=\boldsymbol{0}$。 证毕

沿着能观性的研究思路，下面给出了布尔控制网络关于任意输入具有强可检测性的充要条件。

定理 5　考虑 $P^0=\{\{zx\}\mid zx\in\Theta\}$，$P^d=\{\mathcal{D}\cup\Xi\}$。布尔控制网络(2)是强能检的当且仅当系统(4)是关于任意输入从 P^0 到 P^d 是集能达的。

证明　(必要性)因为布尔控制网络(2)是强能检的，对任意的初始状态 $\boldsymbol{z}_0\neq\boldsymbol{x}_0$，任意的输入序列 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{s-1}$，存在一个整数 s，使得 $\boldsymbol{Hx}(s;\boldsymbol{x}_0)\neq\boldsymbol{Hz}(s;\boldsymbol{z}_0)$ 或 $\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{z}(s;\boldsymbol{z}_0)$。

这意味着对任意的 $\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\in\Theta$ 和任意的 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{s-1}$，存在一个整数 s，使得 $\boldsymbol{z}(0)\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{z}(s;\boldsymbol{z}_0)\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)\in\mathcal{D}\cup\Xi$，即系统(4)关于任意输入从 P^0 到 P^d 是集能达的。

(充分性)考虑一个点对 $(\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{x}_0)$，其中 $\boldsymbol{z}_0\neq\boldsymbol{x}_0$。如果 $\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\in\Xi$，则 $\boldsymbol{Hz}(0)\neq\boldsymbol{Hx}(0)$，即 $\boldsymbol{y}(s)\neq\tilde{\boldsymbol{y}}(s)$。

否则，$\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\in\Theta$。因为系统(4)关于任意输入从 P^0 到 P^d 是集能达的，对任意的 $\{\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0\}\in P^0$ 和 $\Xi\in P^d$，对任意的 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$，存在一个整数 s，使得 $\boldsymbol{z}(0)\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{z}(s,\boldsymbol{z}_0)\boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{x}_0)\in\Xi$，这意味着 $\boldsymbol{Hx}(s;\boldsymbol{x}_0)\neq\boldsymbol{Hz}(s;\boldsymbol{z}_0)$ 或 $\boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{z}(s;\boldsymbol{z}_0)$。因此，布尔控制网络(2)是强能检的。　证毕

推论 3　考虑 $P^0=\{\{zx\}\mid zx\in\Theta\}$，$P^d=\{\mathcal{D}\cup\Xi\}$，布尔控制网络(2)是强能检的当且仅当 $I_C(\Theta)=\varnothing$。

证明　记 P^0 的指标矩阵为 $\boldsymbol{J}_0$。由定理 5，布尔控制网络(2)是强能检的当且仅当系统(4)是关于任意输入从 P^0 到 P^d 是集能达的。根据定理 2，有 $\mathcal{R}_S=\boldsymbol{V}(I_C(\overline{\mathcal{D}\cup\Xi}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_0=\boldsymbol{0}$。

由于 $\boldsymbol{V}(\Theta)=\bigcup_{zx\in\Theta}\boldsymbol{zx}$，则 $\mathcal{R}_S=\boldsymbol{V}(I_C(\overline{\mathcal{D}\cup\Xi}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_0=\boldsymbol{0}$，当且仅当 $\boldsymbol{V}(I_C(\overline{\mathcal{D}\cup\Xi}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}(\Theta)=\boldsymbol{0}$。

因为 $\Theta=\overline{\mathcal{D}\cup\Xi}$，进而有 $\boldsymbol{V}(I_C(\overline{\mathcal{D}\cup\Xi}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}(\Theta)=\boldsymbol{V}(I_C(\Theta))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}(\Theta)=\boldsymbol{0}$。

由于 $I_C(\Theta)\subset\Theta$，则有 $I_C(\Theta)=\varnothing$。　证毕

4　数值例子

本节提供 2 个简单的例子说明所得理论结果。

例 1　考虑以下布尔控制网络，它是信号转导网络的一个简化子网络[47]：

$$\begin{cases}X_1(t+1)=U_1(t)\wedge\neg X_3(t)\wedge U_2(t),\\X_2(t+1)=U_2(t),\\X_3(t+1)=\neg X_2(t)\vee U_1(t)\wedge U_2(t)。\end{cases}\tag{5}$$

其中：$X_1,X_2,X_3\in\mathcal{B}$ 是状态变量，分别表示 Atrboh，Ros 和 ABL1，$U_1,U_2\in\mathcal{B}$ 是外部输入变量。系统的输出方程如下：

$$Y(t)=[X_1(t)\wedge(X_2(t)\rightarrow X_3(t))]\vee(\neg X_1(t)\wedge\neg X_2(t)),\tag{6}$$

其中：$Y\in\mathcal{B}$。

利用矩阵半张量积的性质，逻辑动态方程(5)和(6)可以转化为如下代数形式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{Lu}(t)\boldsymbol{x}(t),\\\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Hx}(t)。\end{cases}\tag{7}$$

其中：

$$\boldsymbol{x}\in\Delta_8,\boldsymbol{u}\in\Delta_4,\boldsymbol{y}\in\Delta_2,$$

$$\boldsymbol{L}=\delta_8[6\ \ 2\ \ 6\ \ 2\ \ 6\ \ 2\ \ 6\ \ 2\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 6\ \ 6\ \ 5\ \ 5\ \ 6\ \ 6\ \ 5\ \ 5\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8],$$

$$\boldsymbol{H}=\delta_2[1\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1]。$$

令 $P^0=\{\{\delta_8^1\},\{\delta_8^2\},\{\delta_8^3\},\{\delta_8^4\},\{\delta_8^5\},\{\delta_8^6\},\{\delta_8^7\},\{\delta_8^8\}\}$，$P^d=\{\{S_1^d\},\{S_2^d\}\}$，其中：

$$S_1^d=\{\boldsymbol{x}\in\Delta_8\mid\boldsymbol{Hx}=\delta_2^1\}=\{\delta_8^1,\delta_8^3,\delta_8^4,\delta_8^7,\delta_8^8\},S_2^d=\{\boldsymbol{x}\in\Delta_8\mid\boldsymbol{Hx}=\delta_2^2\}=\{\delta_8^2,\delta_8^5,\delta_8^6\}。$$

根据推论 1，只需要通过计算 $I_c(\overline{S}_1^d)$，$I_c(\overline{S}_2^d)$ 来检验该布尔控制网络的输出能达性。因为 $\overline{S}_1^d=S_2^d$，$\overline{S}_2^d=S_1^d$，则有 $I_c(\overline{S}_1^d)=I_c(S_2^d)$，$I_c(\overline{S}_2^d)=I_c(S_1^d)$，由 S_2^d，则显然 $|S_2^d|=3$，构建 $\boldsymbol{M}_0=\delta_8[0\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 5\ \ 6\ \ 0\ \ 0]$。通过直接计算可得：$\boldsymbol{M}_3=(\boldsymbol{M}_0\ltimes_{\mathcal{B}}\mathcal{C}^1)^{(3)}\ltimes_{\mathcal{B}}\boldsymbol{M}_0=\delta_8[0\ \ 2+6\ \ 0\ \ 0\ \ 2+6\ \ 2+6\ \ 0\ \ 0]$。其中 $\delta_8^{2+6}=\delta_8^2+\delta_8^6$。利用引理 2 可得 $I_c(\overline{S}_1^d)=I_c(S_2^d)=\{\delta_8^2,\delta_8^5,\delta_8^6\}\neq\varnothing$。因此根据推论 1，该布尔控制网络关于任意输入不是输出能达的。

例 2　考虑具有代数形式(7)的布尔控制网络，其中 $\boldsymbol{L}=\delta_4[1\ \ 3\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 3\ \ 1\ \ 3]$，$\boldsymbol{H}=\delta_4[1\ \ 3\ \ 1\ \ 3]$。

构建如下辅助系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{x}(t), \\ \boldsymbol{z}(t+1)=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{x}(t)。 \end{cases} \tag{8}$$

直接计算有 $\Theta=\{\boldsymbol{z}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{x}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\}=\{\delta_{16}^{3},\delta_{16}^{8},\delta_{16}^{9},\delta_{16}^{14}\}$,则 $|\Theta|=4$。构建

$$\boldsymbol{M}_0=\delta_{16}[0\quad 0\quad 3\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 8\quad 9\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 14\quad 0\quad 0]。$$

参考例1的计算可得 $\boldsymbol{M}_4=\boldsymbol{0}_{16\times16}$,这意味着 $I_c(\Theta)=\{\delta_{2^n}^{j}\in\Delta_{2^n} \mid \mathrm{Col}_j(\boldsymbol{M}_4)\neq 0\}\neq\varnothing$。

因此,根据推论3该布尔控制网络是强能检的。另外,考虑该布尔控制网络的状态 δ_4^1,δ_4^3,令 $\boldsymbol{x}(0)=\delta_4^1,\boldsymbol{z}(0)=\delta_4^3$,则对任意的输入序列 $\{\boldsymbol{u}(t)\}_{t=0}^{+\infty}$,有 $\boldsymbol{y}(t;\delta_4^1)=\widetilde{\boldsymbol{y}}(t;\delta_4^3)=\delta_4^1, t\geqslant 0$。因此,该布尔控制网络是不能观的。

5 小结

本文使用矩阵的半张量积研究了布尔控制网络关于任意输入的能达性、能观性和能检性,提出了布尔控制网络关于任意输入的能达性、集能达性和输出能达性的定义。为了检验布尔控制网络关于任意输入的能达性和集能达性,构建了关于任意输入的强能达性矩阵和集能达性矩阵。此外,本文还给出了布尔控制网络关于任意输入的能达性、集能达性、输出能达性、能观性和能检性的充分必要条件。最后,本文用实例说明了主要结果的有效性。在未来的研究中,将进一步考虑布尔控制网络关于任意输入下的集稳定性。

参考文献:

[1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of Theoretical Biology, 1969,22(3):437-467.

[2] DOLGOV S,KHOROMSKIJ B. Simultaneous state-time approximation of the chemical master equation using tensor product formats[J]. Numerical Linear Algebra with Applications,2015,22(2):197-219.

[3] CHAI L E,LOH S K,LOW S T,et al. A review on the computational approaches for gene regulatory network construction[J]. Computers in Biology and Medicine,2014,48:55-65.

[4] FARROW C,HEIDEL J,MALONEY J,et al. Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications [J]. IEEE Trans. Neural Networks,2004,15(2):348-354.

[5] HARRIS S E,SAWHILL B K,WUENSCHE A,et al. A model of transcriptional regulatory networks based on biases in the observed regulation rules[J]. Complexity,2002,7(4):23-40.

[6] DATTA A,CHOUDHARY A,BITTNER M L,et al. External control in markovian genetic regulatory networks:the imperfect information case[J]. Bioinformatics,2004,20(6):924-930.

[7] CHENG D Z,QI H S,LI Z. Analysis and control of Boolean networks:a semi-tensor product approach[M]. London:Springer-Verlag,2011.

[8] ZHAO Y,QI H S,CHENG D Z. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications[J]. Systems and Control Letters,2010,59(12):767-774.

[9] LIANG J L,CHEN H W,LAM J. An improved criterion for controllability of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2017,62(11):6012-6018.

[10] ZHU Q,GAO Z,LIU Y,et al. Categorization problem on controllability of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions Automatic Control,2021,66(5):2297-2303.

[11] CHENG D Z,LI C X,HE F H. Observability of Boolean networks via set controllability approach[J]. Systems and Control Letters,2018,115:22-25.

[12] FORNASINI E,VALCHER M. Observability,reconstructibility and state observers of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2013,58(6):1390-1401.

[13] ZHANG K Z,JOHANSSON K H. Efficient verification of observability and reconstructibility for large Boolean control networks with special structures[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2020,65(12):5144-5158.

[14] ZHANG K Z,ZHANG L J. Observability of Boolean control networks:a unified approach based on finite automata[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2016,61(9):2733-2738.

[15] ZHU Q X,LIU Y,LU J Q,et al. Observability of Boolean control networks[J]. Science China (Information Sciences),2018, 61(9):156-167.

[16] LASCHOV D,MARGALIOT M,EVEN G. Observability of Boolean networks:a graph-theoretic approach[J]. Automatica,2013,49(8):2351-2362.

[17] WU Y H,GUO Y Q,TOYODA M. Policy iteration approach to the infinite horizon average optimal control of probabilistic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2021,32(7):2910-2924.

[18] GAO S H,SUN C K,XIANG C,et al. Finite-horizon optimal control of Boolean control networks:a unified graph-theoretical approach[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2022,33(1):157-171.

[19] LI R,YANG M,CHU T G. State feedback stabilization for Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2013,58(7):1853-1857.

[20] GUO Y Q,SHEN Y W,GUI W H. Asymptotical stability of logic dynamical systems with random impulsive disturbances[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2021,66(2):513-525.

[21] GUO Y Q,WANG P,GUI W H,et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets [J]. Automatica,2015,61:106-112.

[22] LI H T,YANG X R,WANG S L. Robustness for stability and stabilization of Boolean networks with stochastic function perturbations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2021,66(3):1231-1237.

[23] CHEN B Q,CAO J D,LU G P,et al. Stabilization of markovian jump Boolean control networks via event triggered control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2023,68(2):1215-1222.

[24] MENG M,LAM J,FENG J E,et al. Stability and guaranteed cost analysis of time-triggered Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2018,29(8):3893-3899.

[25] GAO S H,XIANG C,LEE T H. Set invariance and optimal set stabilization of Boolean control networks:a graphical approach [J]. IEEE Transactions on Control Network Systems,2021,8(1):400-412.

[26] CHENG D Z,LI Z Q,QI H S. Realization of Boolean control networks[J]. Automatica,2010,46(1):62-69.

[27] ZOU Y l,ZHU J D. Kalman decomposition for Boolean control networks[J]. Automatica,2015,54:65-71.

[28] ZOU Y L,ZHU J D. System decomposition with respect to inputs for Boolean control networks[J]. Automatica,2014,50(4):1304-1309.

[29] LI Y F,ZHU J D. Observability decomposition of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2023,68(2):1267-1274.

[30] LI Y F,ZHU J D,LI B W,et al. A necessary and sufficient graphic condition for the original disturbance decoupling of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2021,66(8):3765-3772.

[31] LIU Y,LI B W,LU J Q,et al. Pinning control for the disturbance decoupling problem of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2017,62(12):6595-6601.

[32] YU Y Y,FENG J E,PAN J F,et al. Block decoupling of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2019,64(8):3129-3140.

[33] LI Y F,ZHU J D. Necessary and sufficient vertex partition conditions for input-output decoupling of Boolean control networks [J]. Automatica,2022,137:110097.

[34] SARDA K,YERUDKAR A,VERCCHIO C D. Disturbance decoupling control design for Boolean control networks:a Boolean algebra approach[J]. IET Control Theory and Applications,2020,14(16):2339-2347.

[35] LI H T,XIE L H,WANG Y Z. Output regulation of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2017,62(6):2993-2998.

[36] CHEN H W,LIANG J L,LU J Q,et al. Synchronization for the realization dependent probabilistic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2018,29(4):819-831.

[37] ZHONG J,LU J Q,LIU Y,et al. Synchronization in an array of output coupled Boolean networks with time delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2014,25(12):2288-2294.

[38] CHENG D Z,QI H S. State-space analysis of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks,2010,21(4):584-594.

[39] ZHU J D,JU P J. Regular subspaces and invariant subspaces of Boolean control networks[J]. IET Control Theory and Applications,2016,10(5):504-508.

[40] CHENG D Z,QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. Automatica,2009,45(7):1659-1667.

[41] LASCHOV D,MARGALIOT M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory[J]. Automatica,2012,48(6):1218-1223.

[42] YU Y Y, MENG M, FENG J E. Observability of Boolean networks via matrix equations[J]. Automatica, 2020, 111(111): 108621.

[43] GUO Y Q, GUI W H, YANG C H. Redefined observability matrix for Boolean networks and distinguishable partitions of state space[J]. Automatica, 2018, 91: 316-319.

[44] WEISS E, MARGALIOT M. A polynomial-time algorithm for solving the minimal observability problem in conjunctive Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(7): 2727-2736.

[45] ZHANG K Z, ZHANG L J, SU R. A weighted pair graph representation for reconstructibility of Boolean control networks[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2016, 54(6): 3040-3060.

[46] WANG B, FENG J E, LI H T, et al. On detectability of Boolean control networks[J]. Nonlinear Analysis, Hybrid Systems, 2020, 36: 100859.

[47] LI S, ASSMANN S M, ALBERT R. Predicting essential components of signal transduction networks: a dynamic model of guard cell abscisic acid signaling[J]. PLOS Biology, 2006, 4(10): e312.

Operations Research and Cybernetics

Reachability, Observability and Detectability of Boolean Control Networks W. R. T. Arbitrary Inputs

LI Yifeng[1], ZHOU Xueli[2], LIU Yunjie[1]

(1. National Center for Applied Mathematics in Chongqing, Chongqing 401331;

2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: The reachability, observability, and detectability w. r. t. arbitrary inputs of Boolean control networks (BCNs) are investigated via the semi-tensor product of matrices. The reachability w. r. t. arbitrary inputs of BCNs is studied. The definitions of the reachability and set reachability w. r. t. arbitrary inputs are proposed, and the reachability matrix and set reachability matrix w. r. t. arbitrary inputs are constructed to check the reachability and set reachability of BCNs. As applications of the set reachability w. r. t. arbitrary inputs, the observability and detectability with arbitrary inputs of BCNs are then studied. Necessary and sufficient conditions for the observability and detectability w. r. t. arbitrary inputs of BCNs are obtained. Finally, numerical examples are given to illustrate the obtained theoretical results.

Keywords: reachability; observability; detectability; Boolean control networks; arbitrary inputs

(责任编辑　黄　颖)