DOI:10.11721/cqnuj20230516

幂零类是 2 的有限幂零群的轨道长度*

薛海波[1], 吕 恒[2]
(1. 重庆人文科技学院 机电与信息工程学院, 重庆 合川 401524; 2. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要:为研究有限幂零群 G 忠实作用在一个可解群 H 上的轨道长度,假设有限幂零群 G 忠实不可约作用在一个初等交换 q-群 V 上,则可得 $Z(G)$ 是循环群,且对任意 V 中元 v,中心化子 $C_G(v)$ 与 $Z(G)$ 交一定等于 1,考虑中心化子阶的情况。假设 G 是幂零类为 2 的有限群且 $Z(G)$ 是循环群,若子群 S 满足 $|S|^2>|G|$,则 S 与中心 $Z(G)$ 交不等于 1。若 G 忠实不可约作用在初等交换 q-群 V 上,证明了所有的最小轨道长度的平方大于等于群 G 的阶。

关键词:有限 p-群;轨道;幂零类

中图分类号:O152 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2023)05-0099-04

1 预备知识

本文讨论的群均为有限群。有限群理论中,当 q 是素数,有限幂零群 G 互素作用在一个初等交换 q-群 N 上时,有限幂零群 G 的轨道长度,特别是极大轨道(其中包含正则轨道)以及极小轨道长度有着重要的意义。例如与有限群的特征标维数有密切联系,是有限群的一个重要研究方向[1-3]。对于非正则轨道,当有限 p-群 G 作用在 N 上是完全可约时,Passman[4]证明了当 $p=2$,存在 $x\in N$ 使得 $|C_G(x)|\leqslant|G|^{1/2}$;而当 p 大于等于 3 时,存在 $x\in N$ 使得 $|C_G(x)|\leqslant|G|^{2/3}$。当有限 p-群 G 作用在 N 上忠实不可约时,Huppert[5]证明了总存在元 $x,y\in N$ 使得 $C_G(x)\cap C_G(y)=1$,进而得到一个元素轨道的长度至少是 $|G|^{1/2}$。除此之外,Isaacs[6]证明了有限幂零群 G 如果忠实完全可约地作用在 V 上,则存在 $v\in V$,p 是整除 $|G|$ 的最小素数使得 $|C(v)|\leqslant(|G|/p)^{1/p}$,由此,显然存在一个元素的轨道长度至少是 $|G|^{1/2}$。

当有限幂零群 G 忠实不可约作用在初等交换 q-群 N 上,则由文献[7]可知 $(|G|,|N|)=1$ 且 G 的中心 $Z(G)$ 是循环群,同时对任意 $1\neq x\in N$ 一定有 $C_G(x)\cap Z(G)=1$,详细思路可见定理 2 的证明。由此可知,如果能够知道有限幂零群中与中心交等于 1 的子群阶的上界,那么就可以知道它忠实不可约作用在 N 上的极小轨道长度的下界。本文主要研究了幂零类是 2 的有限群 G 满足中心循环,证明了 G 中心交等于 1 的子群阶的上界至多为 $|G|^{1/2}$,进而 G 忠实不可约作用在初等交换 q-群的下界也是 $|G|^{1/2}$。

本文所采用的符号与文献[8-9]相同。

2 主要结论及证明

关于换位子群的阶是 p 的有限 p-群,有一个重要的结论[8]。

若有限 p-群 G 的换位子群 G' 的阶是 p,则 $G=A_1*A_2*\cdots*A_sZ(G)$,其中:$*$ 表示群的中心积,$A_1,\cdots,A_s$ 都是极小非交换 p-子群,$Z(G)$ 是群 G 的中心。

这个重要结论详细描述了这类群的结构。下面首先给出群 G 的一个推广。

引理 1 设 G 是幂零类为 2 的有限 p-群且换位子群 G' 是循环群,则:

$$G=H_1*H_2*\cdots*H_sZ(G),H_i=\langle x_i,y_i\rangle\,|\,[x_i,y_i]=z_i,[x_i,z_i]=[y_i,z_i]=1,$$

即 H_i 的换位子群为 $H_i'=\langle z_i\rangle$ 且它们的阶满足 $\left|H_i'\right|\geqslant\left|H_{i+1}'\right|$,$i=1,2,\cdots,s-1$。

* **收稿日期:**2022-02-24 **修回日期:**2022-03-12 **网络出版时间:**2023-10-27T11:59
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11971391)
第一作者简介:薛海波,女,教授,研究方向为群论,E-mail:1220762439@qq.com,**通信作者:**吕恒,男,教授,E-mail:lvh529@163.com
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20231027.1109.002

证明　设群 G 的换位子群的阶是 p^m。因为 G' 是循环群且 G 的幂零类是 2,所以存在 $x_1,y_1\in G$ 使得 $\langle[x_1,y_1]\rangle=G'$。因此对任意 $g\in G$,存在正整数 $r\leqslant p^m$ 使得:

$$[x_1,g]=[x_1,y_1]^r=[x_1,y_1^r],$$

由此可得 $[x_1,g^{-1}y_1^r]=1$,即 $gC_G(x_1)=y_1^rC_G(x_1)$,故 $G/C_G(x_1)=\langle y_1C_G(x_1)\rangle$ 是循环群。注意到 $[x_1,y_1^{p^m}]=1$,但是对正整数 $t<p^m$ 都有 $[x_1,y_1^t]\neq1$。因此 $G/C_G(x_1)$ 是阶为 p^m 的循环群,同理 $G/C_G(y_1)$ 也是阶为 p^m 的循环群。

令子群 $W_1=C_G(x_1)\cap C_G(y_1)$。由 G/W_1 与 $G/C_G(x_1)\times G/C_G(y_1)$ 的子群同态可得 $|G/W_1|\leqslant p^{2m}$。下面证明 $G/W_1=\langle x_1W_1\rangle\times\langle y_1W_1\rangle$。假设存在 $z\in G$ 使得 $zW_1\in\langle x_1W_1\rangle\cap\langle y_1W_1\rangle$,即 $zW_1=x_1^iW_1=y_1^jW_1$。于是有 $x_1^iy_1^{-j}\in W_1$,进而可得 $[x_1^iy_1^{-j},y_1]=[x_1^i,y_1]^i=1$,因此 $p^m\mid i$。显然 $G/Z(G)$ 的方次数也是 p^m。由此可得 $x_1^i\in Z(G)$。

类似可得 $y_1^j\in Z(G)$。从而说明 $W_1=\langle x_1W_1\rangle\cap\langle y_1W_1\rangle$,即 $|G/W_1|=p^{2m}$。因此

$$|G/C_G(x_1)\times G/C_G(y_1)|=|G/W_1|=p^{2m}。$$

又由 $Z(G)\leqslant W_1$ 可得 $|\langle x_1W_1\rangle|=|\langle y_1W_1\rangle|=p^m$。故 $G/W_1=\langle x_1W_1\rangle\times\langle y_1W_1\rangle$ 成立。

上面的结论说明 $G=\langle x_1,y_1,W_1\rangle$。

令 $H_1=\langle x_1,y_1\rangle$,于是 $G=H_1*W_1$ 是这 2 个子群的中心积。由于 W_1 也是幂零类至多是 2 且换位子群循环的有限 p-群。若 W_1 是非交换群,由归纳可得存在 H_2、W_2 使得 $W_1=H_2*W_2$,其中 $W_1'=H_2'$。于是 $\left|H_1'\right|\geqslant\left|H_2'\right|$。进一步归纳可知存在子群 $H_i\leqslant W_2$,$i=3,\cdots,s$ 使得:

$$W_2=H_3*\cdots*H_sZ(W_3),$$

其中 $\left|H_j'\right|\geqslant\left|H_{j+1}'\right|$,$j=3,\cdots,s-1$,易得 $Z(W_3)=Z(G)$。故 $G=H_1*H_2*\cdots*H_sZ(G)$ 成立。　　证毕

引理 2　设 G 是幂零类为 2 的二元生成的有限 p-群。若 $Z(G)$ 是循环群,则存在元 $x,y\in G$ 使得:

$$G=\langle x,y\rangle\mid[x,y]=z,|x|\geqslant|y|,|z|=p^m,$$

其中 $|G'|=p^m$,且当 $p\geqslant3$ 时,y 的阶满足 $o(y)=p^m$;当 $p=2$ 时,$o(y)=2^m$ 或者 $o(y)=2^{m+1}$。

证明　因为 G 的幂零类是 2,所以对任意 $a,b\in G$ 必有:

$$\begin{cases}(ab)^{p^k}=a^{p^k}b^{p^k}c^{p^k},p\geqslant3,\\(ab)^{2^k}=a^{2^k}b^{2^k}c^{2^{k-1}},p=2。\end{cases}\tag{1}$$

其中 $c\in G'$。

任意取 $x,y\in G$ 使得 $G=\langle x,y\rangle$ 且满足元的阶的乘积 $o(x)\cdot o(y)$ 是最小的。下证当 $p\geqslant3$ 时,$\langle x\rangle\cap\langle y\rangle=1$;当 $p=2$ 时,$|\langle x\rangle\cap\langle y\rangle|\leqslant2$。不妨假设 $o(x)\geqslant o(y)$。

若 $p\geqslant3$ 且 $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle\neq1$。则存在正整数 t_1、t_2、l 使得 $x^{p^{t_1}}=y^{lp^{t_2}}\neq1$,其中 $(p,l)=1$。由式(1)可得:

$$(x^{p^{t_1-t_2}}y^{-l})^{p^{t_2}}=x^{p^{t_1}}y^{-lp^{t_2}}c^{p^{t_2}}=c^{p^{t_2}}。$$

令 $y_1=x^{p^{t_1-t_2}}y^{-l}$,则 $o(y_1)\leqslant o(z)=p^m$。此时易得 $G=\langle x,y\rangle=\langle x,y_1\rangle$。且由 $x^{p^{t_1}}=y^{lp^{t_2}}\in Z(G)$ 可得 $o(y)\geqslant p^{m+1}$。这与前面假设 $o(x)\cdot o(y)$ 是最小相矛盾。故当 $p\geqslant3$ 时,$\langle x\rangle\cap\langle y\rangle=1$ 是成立的。

当 $p=2$ 时。设 $|\langle x\rangle\cap\langle y\rangle|=2^k>2$,存在整数 s,r 使得 $o(y)=2^{s+k}$,$o(x)=2^{s+k+r}$,且 $\langle y^{2^s}\rangle=\langle x^{2^{s+r}}\rangle$。不妨假设 $y^{l2^s}=x^{2^{s+r}}$,其中 $(2,l)=1$。再由式(1)可得:

$$(x^{2^r}y^{-l})^{2^s}=x^{2^{s+r}}y^{-l2^s}c^{2^{s-1}}=c^{2^{s-1}},$$

其中 $c\in G'$。令 $y_1=x^{2^r}y^{-l}$,则可得 $G=\langle x,y\rangle=\langle x,y_1\rangle$ 且 $o(y_1)<o(y)$。同样与前面假设 $o(x)\cdot o(y)$ 是最小相矛盾。于是 $|\langle x\rangle\cap\langle y\rangle|\leqslant2$,进而可得当 $|\langle x\rangle\cap\langle y\rangle|=1$ 时,有 $o(y)=2^m$,或者当 $|\langle x\rangle\cap\langle y\rangle|=2$ 时有 $o(y)=2^{m+1}$ 成立。　　证毕

定理 1　设 G 是幂零类为 2 的有限群且 $Z(G)$ 是循环群,若子群 $S\leqslant G$ 满足 $|S|^2\geqslant|G|$,则必有 $S\cap Z(G)\neq1$。

证明　先假设 G 是有限 p-群。由引理 1 可得:

$$G=H_1*H_2*\cdots*H_sZ(G),$$

其中：H_i，$i=,1,\cdots,s$ 是二元生成的幂零类为 2 的有限 p-群，且 $\left|H_i'\right|\geqslant\left|H_{i+1}'\right|$。由题设 G 是幂零类为 2 可得 S 是交换群。

若存在元 $s\in S$ 使得 $sZ(G)$ 是商群 $G/Z(G)$ 中阶最大的元。因为方次数 $\exp(G/Z(G))=\exp(G')=|G'|$ 且 $S\cap Z(G)=1$，所以有 $o(s)=|G'|$，由此还可得 s 是 S 中阶最大的元，同时还存在元 $g\in G$ 使得 $G'=\langle[g,s]\rangle$。

令子群 $H=\langle g,s\rangle$。若 $H=G$，则可得 $|G/Z(G)|=|G'|^2\leqslant|Z(G)|^2$。因此 $|G|\leqslant|Z(G)|^3$。而 $|S|^2\geqslant|G|$，由引理 2 必有 $S\cap Z(G)\neq 1$。

若 $H\neq G$，由引理 1 可得 $G=H*C_G(H)$，因此有：

$$|G/C_G(H)|=|H/Z(H)|=o(s)^2=|G'|^2。$$

由于

$$S/(S\cap C_G(g))\cong SC_G(g)/C_G(g)\leqslant G/C_G(g),$$

再由引理 1 的证明可知 $G/C_G(g)$ 是循环群，因此 $S/(S\cap C_G(g))$ 是循环群。又由 $G'=\langle[g,s]\rangle$ 可知：

$$\langle s\rangle\cap C_G(g)=1 \text{ 且 } |S/(S\cap C_G(g))|=o(s),$$

故 $S=\langle s\rangle\times(S\cap C_G(g))$。

由 $|G/C_G(H)|=o(s)^2$ 可得，$|S\cap C_G(g)|^2\geqslant|C_G(H)|$。若 $S\cap C_G(g)\leqslant C_G(H)$，则由归纳法可得：

$$(S\cap C_G(g))\cap Z(C_G(H))\neq 1。$$

而 $Z(C_G(H))\leqslant Z(G)$，故 $S\cap Z(G)\neq 1$。

下面假设不存在元 $s\in S$ 使得 $sZ(G)$ 是商群 $G/Z(G)$ 中阶最大的元。于是 $S(H_2*\cdots*H_sZ(G))$ 是 G 的真子群。假设 G_1 是群 G 的极大子群且 $S(H_2*\cdots*H_sZ(G))\leqslant G_1$。若 $Z(G_1)$ 是循环群，则由归纳可得 $S\cap Z(G_1)\neq 1$，进而 $S\cap Z(G)\neq 1$。若 $Z(G_1)$ 不是循环群。下面证明 $Z(G_1)=Z(G)\times\langle z_1\rangle$，其中 $|\langle z_1\rangle|=p$。

设 $x_1,x_2\in Z(G_1)-Z(G)$ 且 $x_1^p,x_2^p\in Z(G)$，则对 $y\in G-G_1$ 有 $[x_1,y]\neq 1$，$[x_2,y]\neq 1$。于是

$$\langle[x_1,y]\rangle=\langle[x_2,y]\rangle\leqslant Z(G)$$

是 p 阶循环群。由群的幂零类是 2，于是存在正整数 i,j 使得 $[x_1^ix_2^j,y]=1$，其中 $(ij,p)=1$。故 $\langle x_1Z(G)\rangle=\langle x_2Z(G)\rangle$。因此 $Z(G_1)/Z(G)=\langle xZ(G)\rangle$ 是循环群。

由于 G 幂零类是 2，于是 $[x,y^p]=[x,y]^p=[x^p,y]=1$。故 $|\langle xZ(G)\rangle|=p$。从而有：

$$Z(G_1)=Z(G)\times\langle z_1\rangle,\ o(z_1)=p。$$

若存在元 $a\in G_1$ 使得 $a\langle z_1\rangle\in Z(G_1/\langle z_1\rangle)-Z(G_1)/\langle z_1\rangle$，则对任意 $b\in G_1-Z(G_1)$ 有 $[a,b]\in Z(G)\cap\langle z_1\rangle=1$。于是 $a\in Z(G_1)$，矛盾。故

$$Z(G_1/\langle z_1\rangle)=Z(G_1)/\langle z_1\rangle\cong Z(G)$$

是循环群。

又有：

$$|S\langle z_1\rangle/\langle z_1\rangle|^2\geqslant|S|^2/p^2\geqslant|G|^2/p^2=|G_1|/p=|G_1/\langle z_1\rangle|。$$

由归纳假设可得 $(S\langle z_1\rangle/\langle z_1\rangle)\cap Z(G_1/\langle z_1\rangle)\neq 1$。由 $Z(G_1)=Z(G)\times\langle z_1\rangle$，即存在 $1\neq s_1\in S$，$1\neq z\in Z(G)$ 使得 $s_1\langle z_1\rangle=z\langle z_1\rangle$。于是可得 $S\cap Z(G_1)=\langle z_2\rangle$ 是一个阶为 p 的循环群，所以 $Z(G_1)=Z(G)\times\langle z_2\rangle$。

同理，有：

$$Z(G_1/\langle z_2\rangle)=Z(G_1)/\langle z_2\rangle \text{ 且 } (S\langle z_2\rangle/\langle z_2\rangle)\cap Z(G_1/\langle z_2\rangle)\neq 1。$$

进而存在 $1\neq s_2\in S$，$1\neq z\in Z(G)$ 使得 $s_2\langle z_2\rangle=z\langle z_2\rangle$。这表明 $z\in\langle s_2,z_2\rangle\leqslant S$，故 $S\cap Z(G)\neq 1$。

若 G 不是 p-群。则 $G=P_1\times\cdots\times P_r$，$S=S_1\times\cdots\times S_r$，其中 P_i、$S_i(i=1,\cdots,r)$ 分别是 G、S 的 Sylow p_i-子群。于是存在 $|P_i|\leqslant|S_i|^2$。故可得 $S_i\cap Z(P_i)\neq 1$，进而 $S\cap Z(G)\neq 1$。　　证毕

定理 2　设有限幂零群 G 忠实不可约作用在初等交换 q-群 N 上。若 G 的幂零类是 2，则对任意 $1\neq x\in N$ 有 $|C_G(x)|^2<|G|$。

证明　由于 G 忠实不可约作用在 N 上，由文献[4]可知 $Z(G)$ 是循环群且对任意 $1\neq x\in N$ 可断言：

$$C_G(x)\cap Z(G)=1。$$

否则设 $1\neq g\in C_G(x)\cap Z(G)$，则 $(o(g),|N|)=1$ 且 $\langle N,g\rangle$ 是 $\langle N,G\rangle$ 的正规子群。于是

$$N=[N,\langle g\rangle]\times C_N(\langle g\rangle),$$

这与 G 忠实不可约作用在 N 上相矛盾，故 $C_G(x)\cap Z(G)=1$。再由定理 1 可得 $|C_G(x)|^2<|G|$。 证毕

参考文献：

[1] LU J K, WU K S, MENG W. P-characters and the structure of finite solvable groups[J]. Journal of Group Theory, 2021, 24(2): 285-291.

[2] CHEN X Y, LEWIS M L. Degrees of Brauer characters and normal Sylow p-subgroups[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2020, 102(2): 237-239.

[3] QIAN G H, YANG Y. The largest conjugacy class size and the nilpotent subgroups of finite groups[J]. Journal of Group Theory, 2019, 22(2): 267-276.

[4] PASSMAN D S. Groups with normal solvable Hall p'-subgroups[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1966, 123(1): 99-111.

[5] HUPPERT B, MANZ O. Orbit sizes of p-groups[J]. Archiv der Mathematik, 1990, 54(2): 105-110.

[6] ISAACS M. Large orbits in nilpotent groups[J]. Proceedings of the American Mathematic Society, 1999, 127(1): 45-50.

[7] KURZWEIL H, STELLMACHER B. The theory of finite group[M]. New York: Springer, 2003.

[8] BERKOVICH Y. Groups of prime power order (vol. 1)[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.

[9] ISAACS I M. Character theory of finite groups[M]. New York: American Mahtematical Society, 1976.

Orbit Sizes of Finite Nilpotent Groups of Class 2

XUE Haibo[1], LÜ Heng[2]

(1. School of Mechatronics and Information Engineering, Chongqing College of Humanities, Science and Technology, Hechuan Chongqing 401524; 2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: If a nilpotent group G acts faithfully on a solvable group H, it turned out to be helpful to know the orbit sizes of H in this action. Suppose that a nilpotent group G acts faithfully and irreducibly on V. It is well known that $Z(G)$ is cyclic and the intersection of $C_G(v)$ and $Z(G)$ equals to 1 for any nontrivial element v in V. Let G be a nilpotent group of class 2 with $Z(G)$ cyclic. If S is a subgroup of G with $|S|^2>|G|$, then the intersection of S and $Z(G)$ is not trival. If G acts faithfully and irreducibly on an elementary abelian N, then the minimal orbit has size large than $|G|^{1/2}$.

Keywords: finite p-group; orbit ; nilpotent class

（责任编辑 黄 颖）