2023 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2023
第 40 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 40 No. 5

DOI:10.11721/cqnuj20230515

正则 Noether 环*

齐 薇, 张晓磊
(山东理工大学 数学与统计学院, 山东 淄博 255000)

摘要:设 R 是交换环,若 R 的任意正则理想都是有限生成的,则称 R 是正则 Noether 环。首先研究了多项式环的正则 Noether 性质。特别地,举例说明 R 是正则 Noether 环,$R[x]$不一定是正则 Noether 环。其次,研究了合并代数的正则 Noether 性质。最后,通过正则内射模和正则余平坦模刻画了正则 Noether 环。

关键词:正则 Noether 环;Hilbert 基定理;合并代数;正则内射模;正则余平坦模

中图分类号:O154.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2023)05-0113-05

在本文中,所有的环指的是有单位元的交换环,所有的模是酉模。设 R 是环。记 Max(R)为 R 的所有极大素谱。若有限生成 R-理想 I 满足$(0:_R I):=\{r\in R \mid Ir=0\}=0$,则称 I 为有限生成半正则理想。环 R 中的元素 r 被称为正则元素,指的是若 $ra=0$ 且 $a\in R$,则 $a=0$。设 I 是R-理想,若 I 包含一个正则元素,则称理想 I 为正则理想。记 $Z(R)$为 R 的全体非正则元素构成的集合。记 $T(R)$为 R 的全商环,即 $T(R)=R_{R-Z(R)}$。若 $R=T(R)$,则称 R 为完全商环。

众所周知,若任意理想都是有限生成理想,则称环是 Noether 环。Noether 环是环论研究中极为重要的一类环,它与代数几何、代数数论等有着非常重要的联系。Noether 环满足著名的 Hilbert 基定理:环 R 是 Noether 环当且仅当 $R[x]$是 Noether 环。许多代数学家也通过模理论观点刻画 Noether 环。例如,环 R 是 Noether 环当且仅当任意内射模的直和是内射模,当且仅当任意内射模的正向极限是内射模,当且仅当任意内射模类是盖类,当且仅当任意绝对纯模(余平坦模)是内射模。

许多经典环类和模类可以通过正则理想进行推广。早在 2011 年,王芳贵等人[1]引入了正则内射模,并研究了正则内射包。最近,为了给出 Prüfer 环的同调刻画,肖雪莲等人[2]引入和研究了正则平坦模和正则余平坦模,并用它刻画了正则凝聚环。本文引入了正则 Noether 环,且首先证明了任意正则 Noether 环都是正则凝聚环;其次研究了多项式环的正则 Noether 性质,并举例说明 R 是正则 Noether 环,$R[x]$不一定是正则 Noether 环;同时,还研究了合并代数的正则 Noether 性质;最后,利用正则内射模和正则余平坦模给出了正则 Noether 环的 9 条等价刻画。

1 正则 Noether 环及它的基本性质

首先给出正则 Noether 环的定义。

定义 1 设 R 是环。若任意正则理想都是有限生成的。则称环 R 是正则 Noether 环。

显然任意 Noether 环和完全商环都是正则 Noether 环;整环 R 是正则 Noether 环当且仅当 R 是 Noether 环。

引理 1 设 R 是环,则以下结论等价:1) R 是正则 Noether 环;2) R 的正则理想满足升链条件;3) R 的任意非空正则理想集合都有极大元素。

证明 1)⇒2)。设 $I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots\subseteq I_j\subseteq\cdots$是 R 的正则理想升链。记 $I=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$,则 I 是正则R-理想,故 I 是有限生成理想,从而存在 $k\in\mathbf{Z}$ 使得 $I=I_k$。

---

* **收稿日期:**2022-05-09 **修回日期:**2022-07-08 **网络出版时间:**2023-10-07T14:55

资助项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(No. 12201361);国家自然科学基金地区科学基金项目(No. 12061001)

第一作者简介:齐薇,女,讲师,博士,研究方向为交换代数和同调代数,E-mail:qwrghj@126.com;**通信作者:**张晓磊,男,讲师,博士,E-mail:zxlrghj@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20231006.1613.016

2)⇒3)。设 Γ 是 R 的一些正则理想构成的非空集合,反之假设 Γ 中无极大元素。任取 $I_1\in\Gamma$,则因 Γ 中无极大元素,存在 $I_2\in\Gamma$ 使得 $I_1\subset I_2$。依次下去,存在正则理想严格升链 $I_1\subset I_2\subset\cdots I_n\subset\cdots$,与 2)矛盾。从而,$\Gamma$ 有极大元素。

3)⇒1)。设 I 是正则 R-理想,则存在正则元素 $r\in I$。构造 $\Gamma=\{K$ 是 R 的理想$\mid r\in K\subseteq I\}$。由于 $I\in\Gamma$,Γ 非空,因此 Γ 存在极大元 A。若 $A\neq I$,则存在 $x\in I-A$。注意到 $I':=A+Rx\in\Gamma$,与 A 的极大性相矛盾。故 $A=I$,即 I 是正则理想。从而 R 是正则 Noether 环。　证毕

由著名的 Cohen 定理可知,R 是 Noether 环当且仅当 R 的任意素理想都是有限生成的。下面给出正则 Noether 环的 Cohen 定理。

定理 1　设 R 是交换环,则以下结论等价:1) R 是正则 Noether 环;2) 对 R 的任意正则非可逆元素 r,R/Rr 都是 Noether 环;3) 对 R 的任意正则素理想 p,p 都是有限生成的。

证明　1)⇒2)。设 r 是正则非可逆元素,则任意包含 r 的理想都是有限生成的,故 R/Rr 都是 Noether 环。

2)⇒1)。设 I 是 R 的正则真理想,则存在正则非可逆元素 $r\in I$。因为 R/Rr 都是 Noether 环,所以 I/Rr 是有限生成 R/Rr-模,故也是有限生成 R-模。因为 Rr 是有限生成 R-理想,所以 I 也是有限生成 R-理想。

2)⇔3)。根据 Cohen 定理可得。　证毕

文献[2]将称环 R 为正则凝聚环,这指的是任意有限生成正则理想都是有限表现的。众所周知,任意 Noether 环都是凝聚环。类似地,有如下结论。

命题 1　若 R 是正则 Noether 环,则 R 是正则凝聚环。

证明　设 I 是有限生成理想,设 $r\in I$ 是正则元素,且不妨设 $I=\langle r,a_1,\cdots,a_n\rangle$,并记 $r=a_0$。将对 n 进行归纳证明 I 是有限表现理想。若 $n=0$,则显然 $I=\langle a_0\rangle\cong R$ 是有限表现理想。记 $I_k=\langle a_0,a_1,\cdots,a_k\rangle$。若 $n=k$ 时,结论成立,即 I_k 是有限表现理想。当 $n=k+1$ 时,按图 1 进行考虑。

因为 $r\in(I_k:_R Ra_{k+1})$,所以有$(I_k:_R Ra_{k+1})$是正则理想。又因为 R 是正则 Noether 环,故$(I_k:_R Ra_{k+1})$是有限生成理想。由归纳 L_k 是有限生成 R-模。从而 L_{k+1} 也是有限生成 R-模。进而,I_{k+1} 是有限表现理想。从而 R 是正则凝聚环。　证毕

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_k \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & I_k \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & R^{k+2} \arrow[r] \arrow[d] & I_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (I_k:_R Ra_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & I_{k+1}/I_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 1　正合列交换图 Ⅰ

Fig. 1　Commutative diagram of exact sequences Ⅰ

引理 2　设 $R[x]$是环 R 上的一元多项式环及 $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x]$。则下面结论等价:1) $f\in R[x]$是正则元;2) 若 $r\in R$ 满足 $fr=0$,则有 $r=0$;3) $\langle a_0,a_1,\cdots,a_n\rangle$是 R 的有限生成半正则理想。

证明　根据文献[3]中定理 1.7.7(1)及练习 6.5 可得。证毕

引理 3　设 I 是 R-理想,则 I 是有限生成 R-理想,当且仅当 $I[x]$是有限生成 $R[x]$-理想。

证明　设 I 是由$\{a_1,\cdots,a_n\}$生成的 R-理想,则显然 $I[x]$也是由$\{a_1,\cdots,a_n\}$生成的 $R[x]$-理想。反之,假设 $I[x]$是由 $f_1,\cdots,f_m$ 生成的 $R[x]$-理想。则 $I=c\langle f_1,\cdots,f_m\rangle$为$\langle f_1,\cdots,f_m\rangle$的容度,故也是有限生成 R-理想。　证毕

命题 2　设 R 是环。若 $R[x]$是正则 Noether 环,则 R 也是正则 Noether 环。

证明　设 I 是 R 的正则理想,且不妨设 $r\in I$ 是正则元素,则根据引理 2 可得 $r\in I[x]$也是 $R[x]$的正则元素,从而 $I[x]$是正则理想。故 $I[x]$是有限生成 $R[x]$-理想,且由引理 3 可得 I 是有限生成理想。　证毕

下面考虑合并代数的正则 Noether 性质。设 R 是环,I 是 R 的理想。依据文献[4]定义环 R 沿着理想 I 的合并代数 $R\bowtie I=\{(r,i)\mid r\in R,i\in I\}$作为 R-模同构于 $R\oplus R$,并定义如下运算:1) $(r,i)+(s,j)=(r+s,i+j)$;2) $(r,i)(s,j)=(rs,si+rj+ij)$。

显然 $R\bowtie I$ 可以看做 $R\times R$ 的子环。记满同态 $\pi_1:R\bowtie I\to R$ 满足 $\pi_1((r,i))=r$;满同态 $\pi_2:R\bowtie I\to R$ 满足 $\pi_2((r,i))=r+i$。2008 年,Maimani 等人[5]考虑了合并代数 $R\bowtie I$ 的全体零因子。

引理 4[5]　设 R 是环,I 是 R-理想。则:$Z(R\bowtie I)=\{(0,i)\mid i\in I\}\cup\{(i,-i)\mid i\in I\}\cup\{(x,i)\mid x\in Z(R)\backslash\{0\},i\in I\}\cup\{(x,i)\mid x\in R\backslash Z(R)$,存在 $j\in I\backslash\{0\},j(x+i)=0\}$。

根据文献[4]中推论 2.11,$R\bowtie I$ 是 Noether 环当且仅当 R 是 Noether 环。类似地,有如下结果。

定理 2　设 R 是环，I 是 R 的理想满足 $Z(R)\subset I$，则 R 是正则 Noether 环当且仅当 $R\bowtie I$ 是正则 Noether 环。

证明　设 R 是正则 Noether 环，p 是 $R\bowtie I$ 的正则素理想。根据文献[6]中命题 2.2 可得存在 R 的素理想 q 使得 p 只有如下 2 种形式：1) $p_a=\{(r,i)\in R\bowtie I\mid r\in q\}$；2) $p_b=\{(r,i)\in R\bowtie I\mid r\in q\}$。

设 $(r,i)\in p$ 是正则元素。则根据引理 4 可得 r 是 R 的正则元素且对任意 $x\in I-\{0\}$ 都有 $x(r+i)\neq 0$。若 p 形如 p_a，则 $r\in\pi_1(p)=q$。由于 R 是正则 Noether 环，故 q 是有限生成的。又因 I 是正则理想，故 I 是有限生成的，所以容易验证 p 也是有限生成的。若 p 形如 p_b，根据文献[5]中定理 3.5(1)，不妨设 $I\not\subset q$。断言 $r+i$ 是 R 的正则元素。反之假设 $y(r+i)=0$ 且 $y\neq 0$，则 $y\notin I$。又因为 $Z(R)\subseteq I$，所以 $r+i=0$。然而根据引理 4 可得 $(r,i)=(i,-i)$ 是 $R\bowtie I$ 的零因子，与 $I\not\subset q$ 矛盾。因此 q 是正则素理想，故 q 是有限生成理想。又因为 $r\in\pi_1(p)$ 是正则元，所以 $\pi_1(p)$ 是有限生成的。此外，因为 $\pi_2(p)=q$ 是有限生成的，故 p 是有限生成理想。因此，根据定理 1 可得 $R\bowtie I$ 是正则 Noether 环。

另一方面，设 J 是正则 R-理想。则根据引理 4 可得 $(r,0)$ 是 $R\bowtie I$ 的正则元素。注意到 $(r,0)\in J\bowtie IJ$，故 $J\bowtie IJ$ 是有限生成 $R\bowtie I$-理想。不妨设 $J\bowtie IJ$ 是由 $\{(a_1,s_1),\cdots,(a_n,s_n)\}$ 生成，则显然 J 是由 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 生成，故 J 是有限生成 R-理想。　　证毕

根据上述证明可知定理 2 的必要性不需要条件“I 是 R 的正则理想满 $Z(R)\subseteq I$”，即：若 $R\bowtie I$ 是正则 Noether 环，则恒有 R 是正则 Noether 环。根据文献[4]中推论 2.11 及本文定理 2 可得如下结果。

推论 1　设 R 是整环，I 是 R 的理想，则以下结论等价：1) R 是 Noether 环；2) $R\bowtie I$ 是 Noether 环；3) $R\bowtie I$ 是正则 Noether 环。

本节剩余部分将通过理想化 $R(+)M$ 构造一些例子来区别 Noether 环和正则 Noether 环，并举例说明命题 2 的逆不一定成立。设 R 是环和 M 是 R-模[7-8]，令 $R(+)M$ 作为 R-模同构于 $R\oplus M$，定义：1) $(r,m)+(s,n)=(r+s,m+n)$；2) $(r,m)(s,n)=(rs,sm+rn)$。则 $R(+)M$ 是有单位元 $(1,0)$ 的交换环。

下面举例说明存在正则 Noether 环既不是 Noether 环又不是完全商环。

例 1　设 D 是非域 Noether 整环，K 是 D 的商域，令 $R=D(+)K$。由于 K 不是有限生成 D-模，所以 $0(+)K$ 不是有限生成 R-理想，故 R 不是 Noether 环。根据文献[7]中定理 4.1 可得 $T(R)=K(+)K\neq R$，故 R 不是完全商环。设 I 是 R 的正则理想，则根据文献[7]中推论 3.4 可得 $I=J(+)K$，其中 J 是 D 的非零理想。由于 J 是有限生成 D-理想，所以 I 是有限生成 R-理想。故 R 是正则 Noether 环。

由著名的 Hilbert 基定理可知，环 R 是 Noether 环当且仅当 $R[x]$ 是 Noether 环。下面例子说明：存在正则 Noether 环 R 满足 $R[x]$ 不是正则 Noether 环，从而正则 Noether 环的 Hilbert 基定理不成立。

例 2[9]　设 $D=L[\{XZ^n,YZ^n\mid n\geqslant 0\}]$ 是域 L 上三元多项式环 $L[X,Y,Z]$ 的子环。记 ρ 是不同时包含 X 和 Y 的全体素理想构成的集合，$B=\bigoplus_{p\in\rho}T(D/p)$。设 $R=D(+)B$。记 $m=\langle XZ^n,YZ^n\mid n\geqslant 0\rangle=\sqrt{\langle X,Y\rangle D}=\langle X,Y\rangle L[X,Y,Z]\cap D$。则 m 是 R 的无限生成理想且是唯一不属于 ρ 的素理想。又因为 X 属于素理想 $\langle XZ^i,YZ^j\mid i\geqslant 0,j\geqslant 1\rangle$ 以及 Y 属于素理想 $\langle XZ^i,YZ^j\mid i\geqslant 1,j\geqslant 0\rangle$，所以根据文献[9]中定理 11(a) 可得 R 是完全商环，从而 R 是正则 Noether 环。根据文献[9]中定理 11(c) 可得 R 的半正则理想为 $J(+)B$ 形式，其中 $\sqrt{J}=m$。设 $\langle a_0,\cdots,a_n\rangle$ 是 $m(+)B$ 的有限生成半正则理想。令 $f=a_0+a_1+\cdots+a_nx^n\in R[x]$，则根据引理 2 可得 $f\in m[x]$ 是正则元素，再根据引理 3 可得 $m[x]$ 是无限生成正则理想，从而 $R[x]$ 不是正则 Noether 环。

2　正则 Noether 环的等价刻画

2011 年，王芳贵等人[1]将对任意正则理想 I 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$ 的 R-模 M 定义为正则内射模(文献[1]称之为正则性内射模)。最近肖雪莲等人[2]利用有限生成正则理想引入了正则平坦模和正则余平坦模：1) 称 R-模 M 为正则平坦模，指的是对任意有限生成正则理想 I，都有 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,M)=0$；2) 称 R-模 M 为正则余平坦模，指的是对任意有限生成正则理想 I，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,E)=0$。

著名的 Cartan-Eilenberg-Bass 定理指出：环 R 是 Noether 环当且仅当内射模的任意直和是内射模，当且仅当内射模的任意正向并是内射模，当且仅当内射模的任意正向极限是内射模[10]。类似地，有以下结果。

定理 3　设 R 是环。则以下结论等价：1) R 是正则 Noether 环；2) 正则内射 R-模的任意直和是正则内射模；3) 正则内射 R-模的任意正向并是正则内射模；4) 正则内射 R-模的任意正向极限是正则内射模。

证明 1)⇒4)。$\{E_i, f_{i,j}\}_{i<j\in\Lambda}$ 是正则内射模的正向系,其中 $f_{i,j}$ 是包含映射。设 $\varinjlim E_i$ 是其正向极限。设 I 是正则理想,则 I 是有限生成的。又根据命题 1 可得 R 是正则凝聚环,从而 I 是有限表现理想。然后,按图 2 进行考虑。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R/I, \varinjlim E_i) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_R(R, \varinjlim E_i) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Hom}_R(I, \varinjlim E_i) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Ext}_R^1(R/I, \varinjlim E_i) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{Hom}_R(R/I, E_i) \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{Hom}_R(R, E_i) \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{Hom}_R(I, E_i) \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{Ext}_R^1(R/I, E_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2 正合列交换图 Ⅱ

Fig. 2 Commutative diagram of exact sequences Ⅱ

根据文献[11]中引理 2.7 可得 α、β、γ 都是同构,故根据五项引理可得 δ 也是同构,从而 $\varinjlim E_i$ 是正则内射模。

4)⇒3)⇒2)。显然成立。

2)⇒1)。首先反之假设 R 不是正则 Noether 环,则存在正则理想 I 不是有限生成的,故存在正则元素 $a_0\in I$ 且 $a_0R\neq I$。设 $0\neq a_1\in I-a_0R$,则正则理想 $a_1R+a_0R\neq I$。取 $a_2\in I-(a_1R+a_0R)$,则正则理想 $a_1R+a_0R+a_2R\neq I$。重复上述过程,可以得到正则理想的严格升链:$a_0R+a_1R\subset a_0R+a_1R+a_2R\subset\cdots\subset a_0R+a_1R+\cdots+a_nR\subset\cdots$。

记 $A_i=\sum_{j=0}^{i}a_jR$,根据文献[12]中推论 10.5 可得:对任意 A_i,存在 A_i 的极大理想 C_i 满足 $C_1\subset A_1\subset C_2\subset A_2\subset\cdots\subset C_n\subset A_n\cdots$。

记 $E(A_i/C_i)\in I$ 为 A_i/C_i 的内射包,且记 $E=\bigoplus_{i=1}^{\infty}E(A_i/C_i)$,则根据定理 3 的结论 2)可得 E 为正则内射模。记 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$,则 A 为正则理想。记 $A_i\to A_i/C_i\to 0$ 是自然满同态,$\rho_i:0\to A_i/C_i\to E(A_i/C_i)$ 是自然嵌入同态,则存在同态 $f_i:A\to E(A_i/C_i)$ 是 $\rho_0\circ\pi_i$ 的扩张。设 $a\in A$,令 $f:A\to E$ 满足 $f(a)=(f_i(a))_{i=1}^{\infty}$。由于 E 是正则内射模,所以 f 可扩张为 $g:R\to E$,且有 $g(r)=g(1)r$。设 $g(1)=(c_1,c_2,\cdots,c_n,0,\cdots)$。取 $a\in A$,使得 $a\in A_{n+1}-C_{n+1}$,则有 $\rho_{n+1}\pi_{n+1}(a)\neq 0$,故 $f_{n+1}(a)\neq 0$。然而,$f(a)=g(a)=g(1)a=(c_1a,c_2a,\cdots,c_na,0,\cdots)$,产生矛盾。从而 R 是正则 Noether 环。 证毕

引理 5 设 R 是环,$\{M_i\mid i\in\Lambda\}$ 是一族 R-模以及 N 是 M 的纯子模,则:1) 若 M 是正则余平坦模,则 N 也是正则余平坦模;2) 每个 M_i 是正则余平坦模当且仅当 $\prod_{i\in\Lambda}M_i$ 是正则余平坦模,当且仅当 $\bigoplus_{i\in\Lambda}M_i$ 是正则余平坦模。

证明 设 I 是有限生成半正则理想。1) 因为 R/I 是有限表现模,则有正合列 $0\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,N)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)$,从而可证。2) 显然,$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,\prod_{i\in\Lambda}M_i)\cong\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M_i)$。又因为 R/I 是有限表现模,则有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,\bigoplus_{i\in\Lambda}M_i)\cong\bigoplus_{i\in\Lambda}\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M_i)$。从而结论成立。 证毕

文献[13]中称 R-模 M 为余平坦模指的是对任意有限生成理想 I 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,E)=0$。根据文献[13]中推论 1.10,可得环 R 是 Noether 环当且仅当任意余平坦模都是内射模。

定理 4 设 R 是环,则下面结论等价:1) R 是正则 Noether 环;2) 任意正则余平坦模 R-模都是正则内射模。

证明 1)⇒2)。设 R 是正则 Noether 环,则任意正则理想都是有限生成的,从而任意正则余平坦模 R-模都是正则内射模。

2)⇒1)。若正则余平坦模 R-模都是正则内射模,则正则余平坦模类恰好等于正则内射模。根据引理 5 可得正则内射模的任意直和是正则内射模。故根据定理 3 可得 R 是正则 Noether 环。

设 L 是一个 R-模类,M 是 R-模。如果存在一个同态 $f:F(M)\to M$,其中 $f:F(M)\in L$,使得对任意 $F\in L$,$g:F\to M$ 都存在 $h:F\to F(M)$ 满足图 3,则称 f 为 M 的 L-预盖。此外,若使分解 $f=f\circ h$ 成立的 h 只有同构,则称 f 为 M 的 L-盖。对偶地,可以定义预包和包。

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\
F(M) \arrow[rr, "f"] & & M
\end{tikzcd}$$

图 3 交换图

Fig. 3 The commutative diagram

引理 6[14] 设 C 是关于纯子模和直积封闭的 R-模类,则以下结论等价:1) C 关于正向极限封闭,即 C 是可定义类;2) C 关于纯商模封闭;3) C 是盖

类;4) C 是预盖类。

王芳贵等人在文献[1]中定理 3.6 证明了任意 R-模都有正则内射包。众所周知,环 R 是 Noether 环当且仅当任意 R-模都有内射预盖,当且仅当任意 R-模都有内射盖(见文献[10]中定理 5.4.1])。类似地,有如下结论。

定理 5　设 R 是环,则下面结论等价:1) R 是正则 Noether 环;2) 任意 R-模都有正则内射预盖;3) 任意 R-模都有正则内射盖。

证明　1)⇒3)。设 R 是正则 Noether 环。则正则余平坦模类恰好是正则内射模类。根据引理 5,正则余平坦模类关于纯子模和直积封闭。根据定理 3,正则内射模类关于正向极限封闭。所以根据引理 6 得证。

3)⇒2)。显然成立。

2)⇒1)。根据定理 3,只需证明正则内射模类关于直和封闭。设 $\{E_i\}_{i\in\Lambda}$ 是一些正则内射模构成的集合。如果 $E\to\bigoplus\limits_{i\in\Lambda}E_i$ 是正则内射预盖,则对每个 $i\in\Lambda$,存在分解 $E_i\to E\to\bigoplus\limits_{i\in\Lambda}E_i$。从而自然复合同态 $\bigoplus\limits_{i\in\Lambda}E_i\to E\to\bigoplus\limits_{i\in\Lambda}E_i$ 是恒等同态。因此,$\bigoplus\limits_{i\in\Lambda}E_i$ 是 E 的直和项,因此 $\bigoplus\limits_{i\in\Lambda}E_i$ 是正则内射模。　证毕

参考文献:

[1] 王芳贵,廖家丽. S-内射模及其 S-内射包络[J]. 数学学报,2011,54(2):271-284.
WANG F G,LIAO J L. S-injective modules and S-injective envelopes[J]. Acta Mathematica Sinica,Chinese Series,2011,54(2):271-284.

[2] 肖雪莲,王芳贵,林诗雨. 由正则理想确定的凝聚性研究[J]. 四川师范大学(自然科学版),2022,45(1):33-40.
XIAO X L,WANG F G,LIN S Y. Thecoherence study determined by regular ideals[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science),2022,45(1):33-40.

[3] WANG F G,KIM H. Foundations of commutative rings and their modules[M]. Singapore:Springer,2016.

[4] D'ANNA M,FONTANA M. An amalgamated duplication of a ring along an ideal:the basic properties[J]. Journal of Algebra and Applications,2007,6(3):443-459.

[5] MAIMANI H R,YASSEMI S. Zero-divisor graph of amalgamated duplication of a ring along an ideal[J]. Journal of Pure and Applied Algebra,2008,212:168-174.

[6] D'ANNA M,FONTANA M. Amalgamated duplication of a ring along a multiplicative-canonical ideal[J]. Arkiv for Matematik,2007,45(2):241-252.

[7] ANDERSON D D,WINDERS M. Idealization of a module[J]. Journal of Commutative Algebra,2009,1(1):3-56.

[8] HUCKABA J A. Commutative rings with zero divisors[M]. New York:Marcel Dekker,Inc.,1988.

[9] LUCAS T. StrongPrufer rings and the ring of finite fractions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra,1993,84:59-71.

[10] ENOCHS E E,JENDA O M G. Relative homological algebra[M]. Berlin:Walter de Gruyter Co.,2011.

[11] GÖBEL R,TRLIFAJ J. Approximations and endomorphism algebras of modules[M]. Berlin:Walter de Gruyter GmbH & Co. KG,2012.

[12] ANDERSON F W,FULLER K R. Rings and categories of modules,second edition[M]. Berlin:Springer,1992.

[13] DAMIANO R F. Coflat rings and modules[J]. Pacific Journal of Mathematics,1979,81(2):349-369.

[14] ZHANG X L,WANG F G,QI W. On characterizations of w-coherent rings[J]. Communications in Algebra,2020,48(11):4681-4697.

Large Regular Noetherian Rings

QI Wei, ZHANG Xiaolei

(School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo Shandong 255000, China)

Abstract: Let R be a commutative ring. Then R is said to be a regular Noetherian ring provided that any regular ideal is finitely generated. The regular Noetherian properties of polynomial rings are obtained. In particular, an example of a regular Noetherian ring R is given to show that $R[x]$ need not be regular Noetherian. Then the regular Noetherian properties of amalgamation algebras is studied. Finally, regular Noetherian rings are characterized in terms of regular injective modules and regular coflat modules.

Keywords: regular Noetherian ring; Hilbert basis theorem; amalgamation algebra; regular injective module; regular coflat module

(责任编辑　方　兴)