

一类耦合 logistics 模型的动力学性质*

余江琼¹, 刘娜², 余志恒¹

(1. 西南交通大学 数学学院, 成都 611756; 2. 成都工贸职业技术学院 通识教育学院, 成都 611731)

摘要: 讨论一类离散捕食者-食饵模型的 dynamics 性质, 使用多项式完全判别系统和中心流形定理对该模型所对应的离散系统进行分析。由多项式完全判别系统给出了该模型不动点的拓扑分类, 并找出了不动点在非双曲情形的参数条件; 由中心流形定理证明了模型在不动点附近发生了 transcritical 分支和 flip 分支。运用数值模拟进一步验证了上述结果的正确性, 并给出相应的 Lyapunov 指数以说明模型在一定参数条件下产生了混沌现象。研究结果提示所讨论的模型在一定参数条件下可以产生 transcritical 分支、flip 分支以及混沌等动力学性质。

关键词: 耦合 logistics 模型; 分支; 多项式完全判别系统; 中心流形; Lyapunov 指数

中图分类号: O178

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2023)05-0126-10

在生态系统中, 捕食者和被捕食者的生物关系是一对十分常见的种群关系; 对于这对生物关系, 生物学家一直都对抱有极大的兴趣^[1-3]。由于自然界中的生物广泛存在着吃与被吃的关系, 这意味着大部分生物都是捕食者与被捕食者当中的一员^[4]; 只要能明确捕食者与被捕食者之间的数量关系, 就可精确调控捕食者与被捕食者的数量^[5], 从而让某一类生物数量不至于过多或过少而给整个生物链带来危害; 因此, 研究捕食者与被捕食者之间的数量关系意义非常重大^[6-7]。

在生物学中, 一般把捕食者与被捕食者之间的数量关系称作捕食者-食饵模型^[8]。生物学家早已经意识到捕食者-食饵模型是一类非常重要的模型^[9-10], 并不断构造新的捕食者-食饵模型^[11-13], 以求新的模型更接近于现实情况。数学家则利用动力学理论对这一模型进行分析^[14-16], 判断模型是否符合数学逻辑规律以及是否具有生物学弱点^[17], 同时对于“好的”模型也能得出相应的生物学意义, 使得模型在生物学中更具有实用价值^[15, 18-19]。

生物学家最早建立的模型一般是连续时间模型, 数学研究者也会对这些模型进行分析并得到一些很好的结果^[5, 14, 20-25], 例如 Zhang 等人^[14]分析了模型:

$$dx(t)/dt = rx(t)(1-x(t)/K) - Ax(t)y(t), dy(t)/dt = -\sigma y(t) + \eta x(t-\tau)y(t-\tau),$$

其中: $x(t)$ 表示捕食者在 t 时刻的数量, $y(t)$ 表示食饵在 t 时刻的数量, τ 是一个延迟参数, K 表示捕食者的环境容量, r, A, σ 和 η 都是正的常数, 分别表示猎物的内在增长率、捕食对猎物的影响系数、捕食者死亡率和捕食者摄入量与它的平均猎物摄入量的转换系数。然而, 由于种群发展中的离散周期只能在离散的时间步长上进行, 因此研究者们对离散时间模型更加关注。同时, 如果种群的生态系统世代不重叠, 离散捕食-食饵模型比连续模型更契合种群的变化规律。此外, 在生物数学数值模拟中, 离散捕食-食饵模型比连续模型更容易建立有效的计算方法, 且离散系统比连续系统具有更丰富的动力学性质^[26]。

本文研究的离散模型最早来源于 Gu 等人^[27]提出的模型:

$$x(t+1) = 4\lambda x(t)(1-x(t)) + \gamma x(t)y(t), y(t+1) = 4\lambda y(t)(1-y(t)) + \gamma x(t)y(t), \quad (1)$$

其中: $x(t+1)$ 表示捕食者在 $t+1$ 时刻的数量, $y(t+1)$ 表示食饵在 $t+1$ 时刻的数量, λ 表示捕食者和食饵的增长率, γ 表示环境对捕食者和食饵数量的影响系数。后来 Satoh 等人在模型(1)的基础上, 提出了更一般的模型^[1]:

$$x(t+1) = \alpha x(t)(1-x(t)) + \theta x(t)y(t), y(t+1) = \beta y(t)(1-y(t)) - \epsilon x(t)y(t), \quad (2)$$

* 收稿日期: 2022-05-20 修回日期: 2022-10-24 网络出版时间: 2023-06-20 T16:25

资助项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(No. 11701476); 四川省自然科学基金面上项目(No. 2023NSFSC0064)

第一作者简介: 余江琼, 男, 研究方向为动力系统, E-mail: jiangqiongyu168@163.com; 通信作者: 余志恒, 男, 副教授, 博士, 研究方向为动力系统, E-mail: yuzhiheng9@163.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230620.1408.011>

其中: α 表示捕食者的增长率, β 表示食饵的增长率, θ 表示环境因素对捕食者数量的影响率, ϵ 表示环境因素对食饵数量的影响率,在模型(2)中令 $\alpha=\beta=4\lambda, \theta=-\epsilon=\gamma$,即可得到模型(1)。

2020 年,Wang 等人^[2]在模型(1)的基础上,分析了模型:

$$x(k+1)=\alpha x(k)(1-x(k))-\xi x(k)y(k), y(k+1)=\zeta x(k)y(k),$$

即在模型(2)中令 $\beta=0, \theta=-\xi, \epsilon=-\zeta$ 所得。

本文在模型(2)中令 $\alpha=a, \theta=-b, \beta=c, \epsilon=0$,得到模型:

$$x(k+1)=ax(k)(1-x(k))-bx(k)y(k), y(k+1)=cy(k)(1-y(k)). \tag{3}$$

本文主要研究了模型(3)的稳定性及它的局部分支。在下文中,首先运用多项式完全判别系统^[28-29]给出了该模型的 4 个不动点的类型及稳定性;然后讨论了该模型在不动点附近的局部分支,并证明了随着参数的变化,该模型在不动点附近不仅能够发生 transcritical 分支,而且能够发生 flip 分支;最后,对该模型进行数值模拟,进一步验证上述证明结果的正确性。

1 不动点的类型及稳定性

研究如下耦合 logistics 模型不动点的拓扑分类:

$$x(k+1)=ax(k)(1-x(k))-bx(k)y(k), y(k+1)=cy(k)(1-y(k)),$$

其中: a, b 和 c 是大于 0 的常数。

上述模型可以看作是一个平面映射

$$F:\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2|x\geq 0,y\geq 0\}\rightarrow\mathbf{R}_+^2, F:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} ax(1-x)-bxy \\ cy(1-y) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

命题 1 对于任意的 $a>0, b>0, c>0$,模型(4)有 4 个不动点: $E_1:(0,0), E_2:((a-1)/a,0), E_3:(0,(c-1)/c), E_4:((bc+ac-b-c)/(ca),(c-1)/c)$,其中:对任意的 $a>0, b>0, c>0$,不动点 E_1 总是存在的;不动点 E_2 仅在 $a>0, b>0, c>0$ 的条件下存在;不动点 E_3 仅在 $a>0, b>0, c>1$ 的条件下存在;不动点 E_4 在 $c>1, a\geq 1, b>0$ 或者 $c>1, 0<a<1, b>-c(a-1)/(c-1)$ 时存在。不动点 E_1, E_2, E_3 和 E_4 的拓扑分类和非双曲情形分别见表 1~表 4,且不动点 E_1, E_2 此时对应的参数图分别见图 1、图 2。

表 1 当 $a>0, b>0, c>0$ 时,不动点 E_1 的稳定性及拓扑分类

Tab.1 When $a>0, b>0, c>0$, stability and topological classification of fixed point E_1

条件	类型	区域	条件	类型	区域
$0<a<1$	稳定结点	\mathcal{D}_1	$0<a<1$	鞍点	\mathcal{D}_2
$0<c<1$	$a=1$	非双曲的	$c>1$	$a=1$	非双曲的
	$a>1$	鞍点		$a>1$	不稳定结点
$c=1$	非双曲的	\mathcal{L}_2			

表 2 当 $a>1, b>0, c>0$ 时,不动点 E_2 的稳定性及拓扑分类

Tab.2 When $a>1, b>0, c>0$, stability and topological classification of fixed point E_2

条件	类型	区域	条件	类型	区域
$1<a<3$	稳定结点	\mathcal{D}_4	$1<a<3$	鞍点	\mathcal{D}_4
$0<c<1$	$a=3$	非双曲的	$c>1$	$a=3$	非双曲的
	$a>3$	鞍点		$a>3$	不稳定结点
$c=1$	非双曲的	\mathcal{L}_4			

证明 模型(4)的不动点由以下方程给出:

$$\begin{cases} x=ax(1-x)-bxy, \\ y=cy(1-y). \end{cases}$$

求解上述二元非线性方程组,可以求得不动点为: $E_1:(0,0), E_2:((a-1)/a,0), E_3:(0,(c-1)/c), E_4:((bc+ac-b-c)/(ca),(c-1)/c)$ 。

表 3 当 $a > 1, b > 0, c > 1$ 时, 不动点 E_3 的稳定性及拓扑分类
Tab. 3 When $a > 1, b > 0, c > 1$, stability and topological classification of fixed point E_3

		条件	类型
$1 < c < 3$		$0 < b < c/(c-1)$	$0 < a < -(bc-b-c)/c$ 稳定结点
		$a = 3$	$a = -(bc-b-c)/c$ 非双曲的
		$a > 3$	$a > -(bc-b-c)/c$ 鞍点
		$b \geq c/(c-1)$	$a > 0$ 鞍点
$c = 3$			非双曲的
$c > 3$			$0 < a < -(bc-b-c)/c$ 鞍点
		$0 < b < c/(c-1)$	$a = -(bc-b-c)/c$ 非双曲的
			$a > -(bc-b-c)/c$ 不稳定结点
		$b \geq c/(c-1)$	$a > 0$ 不稳定结点

表 4 当 $c < 1, 0 < a < 1, b > -(c(a-1))/(c-1)$ 或者 $c > 1, a \geq 1, b > 0$ 时, 不动点 E_4 的稳定性及拓扑分类
Tab. 4 When $c < 1, 0 < a < 1, b > -(c(a-1))/(c-1)$ or $c > 1, a \geq 1, b > 0$, stability and topological classification of fixed point E_4

		条件	类型	
$0 < a < 1$		$-(c(a-1))/(c-1) < b < -(c(a-3))/(c-1)$	稳定结点	
		$b = -(c(a-3))/(c-1)$	非双曲的	
		$b > -(c(a-3))/(c-1)$	鞍点	
	$1 < c < 3$	$a = 1$	$0 < b < (2c)/(c-1)$	稳定结点
			$b = (2c)/(c-1)$	非双曲的
			$b > (2c)/(c-1)$	鞍点
$1 < a < 3$		$0 < b < -(c(a-3))/(c-1)$	稳定结点	
		$b = -(c(a-3))/(c-1)$	非双曲的	
		$b > -(c(a-3))/(c-1)$	鞍点	
	$a \geq 3$	$b > 0$	鞍点	
$c = 3$			非双曲的	
$0 < a < 1$		$-(c(a-1))/(c-1) < b < -(c(a-3))/(c-1)$	鞍点	
		$b = -(c(a-3))/(c-1)$	非双曲的	
		$b > -(c(a-3))/(c-1)$	不稳定结点	
	$c > 3$	$a = 1$	$0 < b < (2c)/(c-1)$	鞍点
			$b = (2c)/(c-1)$	非双曲的
			$b > (2c)/(c-1)$	不稳定结点
$1 < a < 3$		$0 < b < -(c(a-3))/(c-1)$	鞍点	
		$b = -(c(a-3))/(c-1)$	非双曲的	
		$b > -(c(a-3))/(c-1)$	不稳定结点	
	$a \geq 3$	$b > 0$	不稳定结点	

由于在模型(4)中 $x \geq 0, y \geq 0$, 因此只需求 $x \geq 0, y \geq 0$ 的不动点。进一步地, 可得出不动点 E_2 存在的条件是 $a > 1, b > 0, c > 0$, 不动点 E_3 存在的条件是 $a > 0, b > 0, c > 1$, 而对于不动点 E_4 , 仅在 $c > 1, a \geq 1, b > 0$ 或者 $c > 1, 0 < a < 1, b > -c(a-1)/(c-1)$ 时存在。

往下仅讨论不动点 E_4 的拓扑类型和非双曲的情形, 其余不动点的拓扑性质可以类似分析。

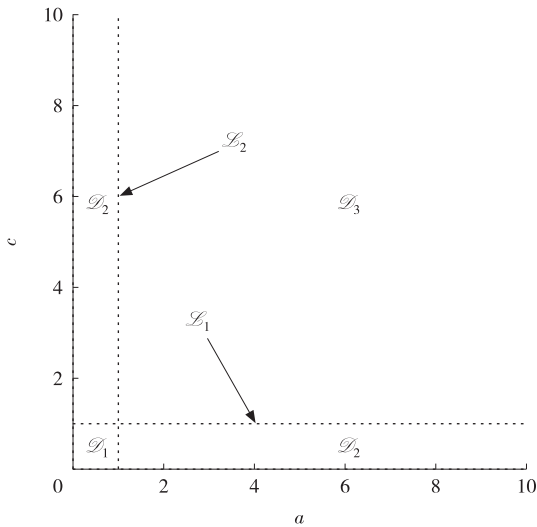


图 1 当 $a > 0, b > 0, c > 0$ 时,在不动点 E_1 处的参数图
 Fig. 1 When $a > 0, b > 0, c > 0$, parameter diagram at fixed point E_1

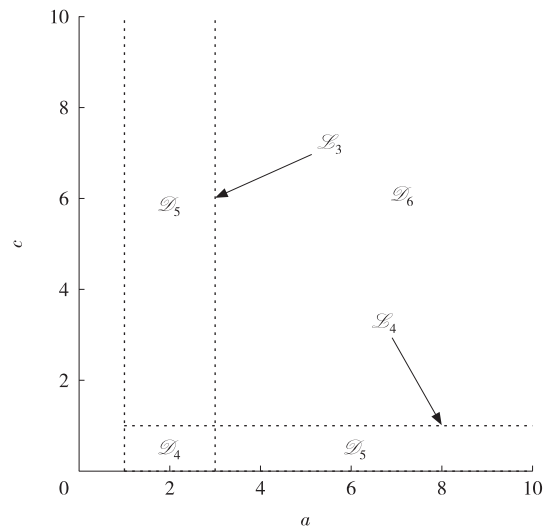


图 2 当 $a > 1, b > 0, c > 0$ 时,在不动点 E_2 处的参数图
 Fig. 2 When $a > 1, b > 0, c > 0$, parameter diagram at fixed point E_2

首先求出系统在不动点 E_4 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J(F(E_4)) = \begin{pmatrix} ((-a-b+2)c+b)/c & (b((a+b-1)c-b))/(ac) \\ 0 & -c+2 \end{pmatrix},$$

易知 $J(F(E_4))$ 的特征多项式为: $P_{E_4}(t) = (((a+b+t-2)c-b)(c+t-2))/c$, 进一步求出该特征多项式的判别式为: $\Delta(P_{E_4}(t)) = (ac+bc-c^2-b)^2/c^2$, 对称轴为: $t^* = -(ac+bc+c^2-b-4c)/(2c)$, 以下分 4 种情形进行讨论。

1) 若 E_4 是非双曲的, 则 $J(F(E_4))$ 的特征值的绝对值等于 1, 那么此时参数条件有 2 种情形, 分别是 $P_{E_4}(1) = 0, P_{E_4}(-1) = 0$ 。进一步地, 可以求得参数范围为: a) $c = 3$; b) $1 < c < 3, 0 < a < 1, b = -(c(a-3))/(c-1)$; c) $1 < c < 3, a = 1, b = (2c)/(c-1)$; d) $1 < c < 3, 1 < a < 3, b = -(c(a-3))/(c-1)$; e) $c > 3, 0 < a < 1, b = -(c(a-3))/(c-1)$; f) $c > 3, a = 1, b = (2c)/(c-1)$; g) $c > 3, 1 < a < 3, b = -(c(a-3))/(c-1)$ 。

2) 若 E_4 是稳定结点, 则 $J(F(E_4))$ 的特征值的绝对值都小于 1, 那么必须满足条件 $P_{E_4}(1) > 0, P_{E_4}(-1) > 0, \Delta(p_E) \geq 0, -1 < t^* < 1$, 即, 如下半代数系统 S_{11} 和 S_{12} 成立:

$$\begin{aligned} S_{11} := & \{c > 1, 0 < a < 1, b > -(c(a-1))/(c-1), ((a+b-1)c-b)(c-1)/c > 0, \\ & (((a+b-3)c-b)(c-3))/c > 0, -(ac+bc+c^2-b-4c)/(2c) > -1, \\ & (((a+b+t-2)c-b)(c+t-2))/c \geq 0, -(ac+bc+c^2-b-4c)/(2c) < 1\}, \\ S_{12} := & \{c > 1, a \geq 1, b > 0, (((a+b+t-2)c-b)(c+t-2))/c \geq 0, \\ & (((a+b-3)c-b)(c-3))/c > 0, ((a+b-1)c-b)(c-1)/c > 0, \\ & -(ac+bc+c^2-b-4c)/(2c) > -1, -(ac+bc+c^2-b-4c)/(2c) < 1\}. \end{aligned}$$

运用多项式判别理论^[28-29], 可以求得半代数系统 S_{11} 的解为: $\{1 < c < 3, 0 < a < 1, -(c(a-1))/(c-1) < b < -(c(a-3))/(c-1)\}$, S_{12} 的解为: $\{1 < c < 3, a = 1, 0 < b < (2c)/(c-1), 1 < c < 3, a > 1, b > -(c(a-3))/(c-1)\}$ 。

3) 若 E_4 是不稳定结点, 则 $J(F(E_4))$ 的特征值的绝对值或者都小于 1, 或者都大于 1, 那么此时参数条件有下列 3 种情形, 分别为: a) $P_{E_4}(1) < 0, P_{E_4}(-1) < 0, \Delta(p_E) > 0$; b) $P_{E_4}(1) > 0, P_{E_4}(-1) > 0, \Delta(p_E) \geq 0, t^* < -1$; c) $P_{E_4}(1) > 0, P_{E_4}(-1) > 0, \Delta(p_E) \geq 0, t^* > 1$ 。

运用情形 2) 中同样的方法, 可以得到半代数系统 $S_{21}, S_{22}, S_{31}, S_{32}, S_{41}$ 和 S_{42} 。进一步, 求解以上半代数系统, 可以得到如下参数范围: a) $c > 3, 0 < a < 1, b > -(c(a-3))/(c-1)$; b) $c > 3, a = 1, b > (2c)/(c-1)$; c) $c > 3, 1 < a < 3, b > -(c(a-3))/(c-1)$; d) $c > 3, a \geq 3, b > 0$ 。

4) 若 E_4 是鞍点, 则 $J(F(E_4))$ 的特征值的绝对值一个小于 1, 另一个大于 1, 那么此时参数条件有下列 2 种

情形,分别为:a) $P_{E_4}(1) < 0, P_{E_4}(-1) > 0, \Delta(p_E) > 0, t^* > -1$; b) $P_{E_4}(1) > 0, P_{E_4}(-1) < 0, \Delta(p_E) > 0, t^* < 1$ 。

此时运用情形 2) 中同样方法,可以得到与之对应的半代数系统 $S_{51}, S_{52}, S_{61}, S_{62}$ 。进一步地,求得参数范围为:a) $1 < c < 3, 0 < a < 1, -(c(a-3))/(c-1) < b$; b) $1 < c < 3, a = 1, b > (2c)/(c-1)$; c) $1 < c < 3, 1 < a < 3, b > -(c(a-3))/(c-1)$; d) $1 < c < 3, a \geq 3, b > 0$; e) $c > 3, 0 < a < 1, -(c(a-1))/(c-1) < b < -(c(a-3))/(c-1)$; f) $c > 3, a = 1, 0 < b < (2c)/(c-1)$; g) $c > 3, 1 < a < 3, 0 < b < -(c(a-3))/(c-1)$ 。

最后,将上述证明过程中所得结果列于表 4。

证毕

2 不动点的局部分支

对于模型(4)的不动点 E_1, E_2, E_3 以及 E_4 在非双曲的情形下发生不同的分支现象,这里仅证明模型(4)在不动点 E_4 处发生 flip 分支,其余不动点附近的 flip 分支可进行类似分析。

定理 1 当模型(4)满足下列情形之一时,在 E_4 附近产生 flip 分支:1) $1 < c < 3, 1 < a < 3, b = -(c(a-3))/(c-1)$; 2) $c > 3, a = 1, b = (2c)/(c-1)$; 3) $c > 3, 0 < a < 1, b = -c(a-3)/(c-1)$; 4) $1 < c < 3, a = 1, b = (2c)/(c-1)$; 5) $c > 3, 1 < a < 3, b = -c(a-3)/(c-1)$; 6) $c > 3, a = 3, b = 0$; 7) $c = 3$; 8) $1 < c < 3, 0 < a < 1, b = -c(a-3)/(c-1)$; 9) $1 < c < 3, a = 3, b = 0$ 。

证明 仅需证明当参数跨过曲线 $\mathcal{L}_3 := \{(a, b, c) \mid 1 < c < 3, 0 < a < 1, b = -c(a-3)/(c-1)\}$ 时,模型(4)在 E_4 附近产生 flip 分支,其余情况类似可证。

令 $\delta = b + c(a-1)/(c-1)$, 则 $b = \delta - c(a-1)/(c-1)$, 同时,在模型(4)中令 $(x, y) = (u + (bc + ac - b - c)/(ca), v + (c-1)/c)$, 以 u 和 v 为变量将上述变换得到的映射进行 Taylor 展开后,得到如下映射:

$$\Phi_{a,c} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{u(c\delta + c - \delta)}{c} - \frac{v(c\delta + 2c - \delta)(ac - c\delta - 3c + \delta)}{(c-1)ac} - au^2 - \frac{vu(ac - c\delta - 3c + \delta)}{c-1} + O(|(u, v)|^4) \\ -v(c-2) - v^2c + O(|(u, v)|^4) \end{pmatrix}.$$

此时,该映射对应系统在 E_4 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J(\Phi_{a,c}(E_4)) = \begin{pmatrix} -\frac{(c\delta + c - \delta)}{c} & -\frac{(c\delta + 2c - \delta)(ac - c\delta - 3c + \delta)}{(c-1)ac} \\ 0 & -c + 2 \end{pmatrix},$$

它的特征值为: $-(c\delta + c - \delta)/c$ 和 $-c + 2$, 相应的特征向量分别为 $(1, 0)^T$ 和

$$(((c\delta + 2c - \delta)(ac - c\delta - 3c + \delta))/((c-1)a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)), 1)^T.$$

进一步地,对映射 $\Phi_{a,c}$ 做变换 $(u, v)^T = H_1(\mu, \nu)^T$, 其中:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(c\delta + 2c - \delta)(ac - c\delta - 3c + \delta)}{(c-1)a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

通过计算可以得到映射:

$$\tilde{\Phi}_{a,c} : \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{(c\delta + c - \delta)\mu}{c} - \frac{\nu(a^2c^2 + abc^2 - 2ac^2\delta - bc^2\delta + c^2\delta^2 - abc - 6ac^2 + 2acd)}{a(c-1)^2} - a\mu^2 - \frac{\nu(6c^2\delta - 2c\delta^2 - 3bc^2 + 2bcd + 3bc - b\delta + 9c^2 - 6c\delta + \delta^2)}{a(c-1)^2} \\ \frac{(ac^3 + ac^2\delta - c^3\delta - c^2\delta^2 + ac^2 - ac\delta - 3c^3 - 3c^2\delta + 2c\delta^2 - 3c^2 + 4c\delta - \delta^2)\nu\mu}{(c-1)(c^2 - c\delta - 3c + \delta)} \\ \frac{\nu^2(a^2c^2\delta - ac^3\delta - ac^2\delta^2 + c^3\delta^2 + 2a^2c^2 - a^2c\delta - 2ac^3 - 4ac^2\delta + 2ac\delta^2 + 5c^3\delta)c^2}{a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)^2(c-1)} \\ \frac{\nu^2(6ac^2 - 2c^2\delta^2 + 5ac\delta - a\delta^2 + 6c^3 - 5c^2\delta + c\delta^2)c^2}{a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)^2(c-1)} + O(|(\mu, \nu)|^4) \\ - (c-2)\nu - \nu^2c + O(|(\mu, \nu)|^4) \end{pmatrix}.$$

选择 δ 作为分支参数, 将映射 $\tilde{\Phi}_{a,c}$ 转换为如下形式:

$$\tilde{\Phi}_{a,c} : \begin{pmatrix} \mu \\ \delta \\ \nu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{(c\delta + c - \delta)\mu}{c} - \frac{\nu(a^2c^2 + abc^2 - 2ac^2\delta - bc^2\delta + c^2\delta^2 - abc - 6ac^2 + 2ac\delta)}{a(c-1)^2} \\ \frac{\nu(6c^2\delta - 2c\delta^2 - 3bc^2 + 2bc\delta + 3bc - b\delta + 9c^2 - 6c\delta + \delta^2)}{a(c-1)^2} - a\mu^2 - \\ \frac{(ac^3 + ac^2\delta - c^3\delta - c^2\delta^2 + ac^2 - ac\delta - 3c^3 - 3c^2\delta + 2c\delta^2 - 3c^2 + 4c\delta - \delta^2)\nu\mu}{(c-1)(c^2 - c\delta - 3c + \delta)} \\ \frac{\nu^2(a^2c^2\delta - ac^3\delta - ac^2\delta^2 + c^3\delta^2 + 2a^2c^2 - a^2c\delta - 2ac^3 - 4ac^2\delta + 2ac\delta^2 + 5c^3\delta)c^2}{a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)^2(c-1)} \\ \frac{\nu^2(6ac^2 - 2c^2\delta^2 + 5ac\delta - a\delta^2 + 6c^3 - 5c^2\delta + c\delta^2)c^2}{a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)^2(c-1)} + O(|(\mu, \nu)|^4) \\ \delta \\ -(c-2)\nu - \nu^2c + O(|(\mu, \nu)|^4) \end{pmatrix},$$

进一步对上述包含参数 δ 的系统进行讨论. 该系统对应 Jacobian 矩阵的两个特征值在单位圆盘上, 根据中心流形定理^[30], 此系统存在一个二维 C^2 中心流形:

$$W_{1s}^c = \{(\mu, \delta, \nu) \in \mathbf{R}^3 : \nu = h_1(\mu, \delta)\}, |\mu| < \epsilon_1, |\delta| < \epsilon_2,$$

其中: $h_1(\mu, \delta)$ 是 $(0, 0)$ 附近的一个 C^2 函数, 而且满足 $h_1(0, 0) = 0, Dh_1(0, 0) = 0, \epsilon_1, \epsilon_2$ 是充分小的正常数. 因为 h_1 是 C^2 光滑的, 于是 h_1 满足形式 $\nu = h_1(\mu, \delta) = d_{11}\mu^2 + d_{12}\mu\delta + d_{13}\delta^2 + O(|(\mu, \delta)|^3)$, 其中 d_{11}, d_{12} 和 d_{13} 是待定系数. 于是根据上述关系式, 可以得到:

$$\begin{aligned} & h_1(-((c\delta + c - \delta)\mu)/c - ((h_1(\mu, \delta))(a^2c^2 + abc^2 - 2ac^2\delta - bc^2\delta))/(a(c-1)^2) - \\ & ((h_1(\mu, \delta))(6c^2\delta - abc - 6ac^2 + 2ac\delta - 2c\delta^2 - 3bc^2))/(a(c-1)^2) - \\ & ((h_1(\mu, \delta))(3bc + 2bc\delta - b\delta + 9c^2 - 6c\delta + \delta^2 + c^2\delta^2))/(a(c-1)^2) - a\mu^2 - \\ & ((ac^3 + ac^2\delta - c^3\delta - c^2\delta^2 + ac^2 - ac\delta)(h_1(\mu, \delta))\mu)/((c-1)(c^2 - c\delta - 3c + \delta)) - \\ & ((-3c^3 - 3c^2\delta + 2c\delta^2 - 3c^2 + 4c\delta - \delta^2)(h_1(\mu, \delta))\mu)/((c-1)(c^2 - c\delta - 3c + \delta)) - \\ & ((h_1(\mu, \delta))^2(a^2c^2\delta - ac^3\delta - ac^2\delta^2 + c^3\delta^2 + 2a^2c^2 - a^2c\delta)c^2)/(a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)^2(c-1)) - \\ & ((h_1(\mu, \delta))^2(-2ac^3 - 4ac^2\delta + 2ac\delta^2 + 5c^3\delta)c^2)/(a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)^2(c-1)) - \\ & ((h_1(\mu, \delta))^2(6ac^2 - 2c^2\delta^2 + 5ac\delta - a\delta^2 + 6c^3 - 5c^2\delta + c\delta^2)c^2)/(a(c^2 - c\delta - 3c + \delta)^2(c-1)) + \\ & O(|(\mu, (h_1(\mu, \delta)))|^3, \delta) = -(c-2)h_1(\mu, \delta) - (\frac{h}{2}(\mu, \delta))2 \end{aligned}$$

对上面的等式两边进行化简, 并对变量 δ, μ 进行 Taylor 展开, 比较 $\delta^2, \delta\mu$ 和 μ^2 的系数, 可得: $d_{11}(c-1) = 0, d_{12}(c-3) = 0, d_{13}(c-1) = 0$, 即: $d_{11} = 0, d_{12} = 0, d_{13} = 0$. 因此, $\nu = h_1(\mu, \delta) = O(|(\mu, \delta)|^3)$. 那么模型(4)可以转化成:

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \delta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -((c\delta + c - \delta)\mu)/c - a\mu^2 + O(|(\mu, \delta)|^4) \\ \delta \end{pmatrix},$$

于是就可以得到一个一维的系统, 它相应的一维映射为: $\mu \mapsto g_{11} := -((c\delta + c - \delta)\mu)/c - a\mu^2 + O(|(\mu, \delta)|^4)$, 易知:

$$\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial \mu \partial \delta} \Big|_{(\mu, \delta) = (0, 0)} = -\frac{(c-1)}{c}, \frac{\partial^3 g_{11}}{\partial \mu^3} \Big|_{(\mu, \delta) = (0, 0)} = 0, \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial \mu^2} \Big|_{(\mu, \delta) = (0, 0)} = -2a,$$

考虑到参数的取值范围是 $1 < c < 3, 0 < a < 1, b = -c(a-1)/(c-1)$, 因此有:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial \mu^2} \Big|_{(\mu, \delta) = (0, 0)} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 g_{11}}{\partial \mu^3} \Big|_{(\mu, \delta) = (0, 0)} \right) \neq 0, \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial \mu \partial \delta} \Big|_{(\mu, \delta) = (0, 0)} \neq 0.$$

于是证明了当 $1 < c < 3, 0 < a < 1, b = -c(a-1)/(c-1)$, 模型(4)在不动点 E_4 处产生了 flip 分支^[31]. 证毕
通过讨论表 3 中不动点 E_3 的非双曲的情形, 可以得到以下结论.

定理 2 对于不动点 E_3 , 当模型(4)的参数取值满足情形 1) $1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1), a = -(bc - b - c)/c$ 或 2) $c > 3, 0 < b < c/(c-1), a = -(bc - b - c)/c$ 时在 E_3 附近产生 transcritical 分支; 而在参数取值为 $c = 3$ 时

模型(4)在 E_3 附近产生 flip 分支。

证明 仅需证明当参数跨过曲线 $\mathcal{L}_6 := \{(a, b, c) \mid 1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1), a = -(bc-b-c)/c\}$ 时, 模型(4)在 E_3 附近产生 transcritical 分支, E_3 其余局部分支情况类似可证。

令 $\vartheta = a + (bc-b-c)/c$, 则 $a = \vartheta - (bc-b-c)/c$ 。同时, 在模型(4)中令 $(x, y) = (\rho, \varrho + (c-1)/c)$ 。进一步地, 以 ρ 和 ϱ 为变量将得到的映射进行 Taylor 展开, 于是可得如下映射:

$$F_{b,c} : \begin{pmatrix} \rho \\ \varrho \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (\vartheta+1)\rho + \frac{(bc-\vartheta c-b-c)\rho^2}{c} + b\rho\varrho + O(|(\rho, \varrho)|^3) \\ -(c-2)\varrho - \varrho^2 c + O(|(\rho, \varrho)|^3) \end{pmatrix}.$$

选择 ϑ 作为分支参数, 则可以把上述映射转换为:

$$\tilde{F}_{b,c} : \begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \\ \varrho \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (\vartheta+1)\rho + \frac{(bc-\vartheta c-b-c)\rho^2}{c} + b\rho\varrho + O(|(\rho, \varrho)|^3) \\ \vartheta \\ -(c-2)\varrho - \varrho^2 c + O(|(\rho, \varrho)|^3) \end{pmatrix}.$$

考虑上述包含参数 ϑ 的系统 $\tilde{F}_{a,c}$ 。该系统对应的 Jacobian 矩阵存在 2 个特征值在单位圆盘上, 根据中心流形定理, 此系统存在一个二维 C^2 中心流形:

$$W_{2s}^c = \{(\rho, \vartheta, \varrho) \in \mathbf{R}^3 : \varrho = h_2(\rho, \vartheta)\}, \quad |\rho| < \eta_1, \quad |\vartheta| < \eta_2,$$

其中: $h_2(\rho, \vartheta)$ 是 $(0, 0)$ 附近的一个 C^2 函数, 且满足 $h_2(0, 0) = 0, Dh_2(0, 0) = 0; \eta_1, \eta_2$ 是充分小的正常数。由于 h_2 是 C^2 光滑的, 于是 h_2 满足形式 $\varrho = h_2(\rho, \vartheta) = d_{21}\rho^2 + d_{22}\rho\vartheta + d_{23}\vartheta^2 + O(|(\rho, \vartheta)|^3)$, 其中 d_{21}, d_{22} 和 d_{23} 是待定系数。进一步地, 根据上述关系式, 可以得到:

$$h_2((\vartheta+1)\rho + ((bc-\vartheta c-b-c)\rho^2)/c + b\rho\vartheta, \vartheta) = -(c-2)h_2(\rho, \vartheta) - h_2(\rho, \vartheta)^2.$$

对上述等式两边进行化简, 并对变量 ϑ, ρ 进行 Taylor 展开, 比较 $\vartheta^2, \vartheta\rho$ 和 ρ^2 的系数, 可以得到: $d_{21}c^2(c-1) = 0, d_{22}c^2(c-1) = 0, d_{23}c^2(c-1) = 0$, 即: $d_{21} = 0, d_{22} = 0, d_{23} = 0$, 因此 $\varrho = h_2(\rho, \vartheta) = O(|(\rho, \vartheta)|^3)$ 。于是模型(4)可以转化成:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \vartheta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (\vartheta+1)\rho + \frac{(bc-\vartheta c-b-c)\rho^2}{c} + O(|(\rho, \vartheta)|^3) \\ \vartheta \end{pmatrix}.$$

进一步考虑一维映射: $\rho \mapsto g_{21} := (\vartheta+1)\rho + ((bc-\vartheta c-b-c)\rho^2)/c + O(|(\rho, \vartheta)|^3)$, 易得:

$$\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial \rho \partial \vartheta} \Big|_{(\rho, \vartheta) = (0, 0)} = 1, \quad \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial \rho^2} \Big|_{(\rho, \vartheta) = (0, 0)} = \frac{2bc-2b-2c}{c}.$$

根据参数的取值范围 $1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1), a = -(bc-b-c)/c$, 可以得到:

$$\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial \rho \partial \vartheta} \Big|_{(\rho, \vartheta) = (0, 0)} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial \rho^2} \Big|_{(\rho, \vartheta) = (0, 0)} \neq 0.$$

因此, 在 $1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1), a = -(bc-b-c)/c$ 情形下, 模型(4)在不动点 E_3 处产生了 transcritical 分支^[31]。证毕

从定理 2 的证明可知: 对于不动点 E_3 , 当参数取值为 $1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1), a = -(bc-b-c)/c$ 时, 模型(4)产生 transcritical 分支。这意味着对于任意的 $1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1)$, 如果 $0 < a < -(bc-b-c)/c$, 系统仅存在 1 个不动点 E_3 , 且是稳定结点, 此时不动点 E_4 不存在生物学意义; 如果 $a = -(bc-b-c)/c, E_3$ 和 E_4 重合; 如果 $a > -(bc-b-c)/c, E_3$ 和 E_4 同时存在, 且 E_3 是鞍点。此外, 对于任意的 $a > 0, b > 0, c > 1$, 映射 $\tilde{F}_{b,c}$ 不仅存在 1 个在原点 O 附近与 ϱ 轴相切的一维稳定流形, 而且存在 1 个与 $\varrho = 0$ (i. e., (ρ, ϑ) 平面) 相切的二维中心流形。进一步地, $\tilde{F}_{b,c}$ 在这个中心流形上产生了 transcritical 分支, 那么不动点在 $\vartheta = 0$ 稳定性发生改变, 这意味着原系统也有 1 个使不动点 E_3 稳定性发生改变的阈值, 即 $\{(a, b, c) \mid 1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1), a = -(bc-b-c)/c\}$ 。从上述阈值可知: 1) 对于任意的 $1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1), 0 < a < -(bc-b-c)/c$, 如果最初捕食者的数量接近 0, 食饵的数量在 $(c-1)/c$ 附近, 那么捕食者的数量将会逐渐减少直至灭绝, 而食饵的数量仍然将会维持在 $(c-1)/c$ 附近; 2) 对于任意的 $1 < c < 3, 0 < b < c/(c-1), a > -(bc-b-c)/c$, 如果最初捕食者

的数量接近 0,食饵的数量在 $(c-1)/c$ 附近,那么捕食者的数量将会逐渐增加,最后维持在 $(bc+ac-b-c)/(ac)$ 附近,而食饵的数量仍然将会维持在 $(c-1)/c$ 附近。其余不动点附近分支现象的生物学意义可进行类似描述。

运用定理 1 与定理 2 中相同的方法,对于不动点 E_1 和 E_2 可以得出如下结论。

定理 3 对于不动点 E_1 ,当模型(4)的参数取值满足情形 1) $0 < c < 1, a = 1$ 或 2) $c = 1$ 或 3) $c > 1, a = 1$ 时,在 E_1 附近产生 transcritical 分支。对于不动点 E_2 ,当模型(4)的参数取值满足情形 1) $0 < c < 1, a = 3$ 或 2) $c > 1, a = 3$ 时,在 E_2 附近产生 flip 分支;而当模型(4)的参数取值为 $c = 1$ 时,在 E_2 附近产生 transcritical 分支。

3 数值模拟

上一节中已经证明不动点 E_2, E_3, E_4 均发生了 flip 分支,本节使用 Maple2019 及 Matlab R2022a 软件进行数值模拟,以验证前文结果的正确性。

首先,对于不动点 E_2 ,由上一节可知在参数取值为 $0 < c < 1, a = 3$ 时, E_2 附近产生了 flip 分支,因此选择 a 作为分支参数,取 $b = 2, c = 0.95$,初始点为 $(0.5, 0.4)$,在 Maple2019 中模拟出模型(4)在 (a, x, y) -空间的分支图。由图 3 可知,当 $0 < c < 1, a = 3$ 时,不动点 E_2 附近确实产生了 flip 分支。此外,还可以从该图中发现当参数 $a > 3.5$ 时,模型(4)出现混沌。进一步在 Matlab R2022a 中给出了这种情形下模型(4)相应的 Laypunov 指数图。从图 4 可知,模型(4)的 Laypunov 指数在 $a = 3.5$ 时首次出现大于 0 现象,这从另一个方面验证了模型(4)在参数 $a > 3.5$ 时确实产生了混沌。不动点 E_2 在其他情形下产生的 flip 分支及混沌现象可类似模拟得出。

其次,对于不动点 E_3 ,由上一节可知在参数取值为 $c = 3$ 时, E_3 附近产生了 flip 分支,因此选择 c 作为分支参数,取 $b = 4, a = 1.1$,初始点为 $(0.1, 0.4)$,在 Maple2019 中模拟出模型(4)在 (c, x, y) -空间的分支图。从图 5 可以看到,当 $c = 3$ 时,在 E_3 附近产生了 flip 分支。此外从该图还可以发现,当 $c > 2.85$ 时,模型(4)产生了混沌。进一步在 Matlab R2022a 中给出了该情形下模型(4)相应的 Laypunov 指数图。从图 6 可以看到,当参数 c 取值在 2.85 附近时 Laypunov 指数大于 0,这进一步验证了当参数 $c > 2.85$ 时,模型(4)确实产生了混沌。不动点 E_3 在其他情形下发生的 flip 分支及混沌现象可类似模拟得出。

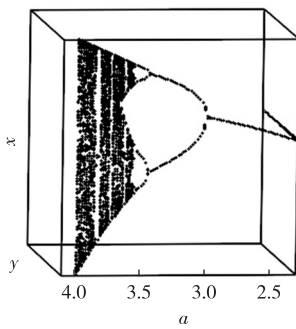


图 3 不动点 E_2 在 $0 < a < 1, c = 3$ 附近产生 flip 分支,此时 $b = 2, c = 0.95$,初始点为 $(0.5, 0.4)$

Fig. 3 The fixed point E_2 generates a flip bifurcation near $0 < a < 1, c = 3$, where $b = 2, c = 0.95$, and the initial point is $(0.5, 0.4)$

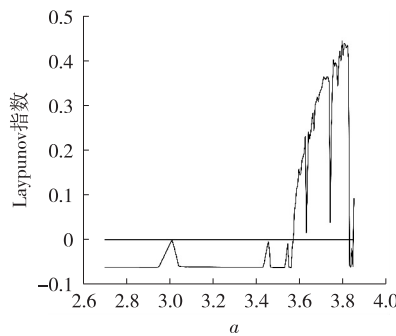


图 4 不动点 E_2 在 $a > 3.5, c = 3$ 附近产生了混沌,此时 $b = 2, c = 0.95$,初始点为 $(0.5, 0.4)$

Fig. 4 The fixed point E_2 generate chaos near $a > 3.5, c = 3$, where $b = 2, c = 0.95$, and the initial point is $(0.5, 0.4)$

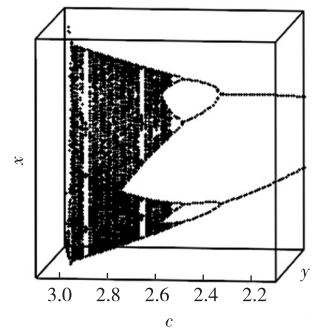


图 5 不动点 E_3 在 $c = 3$ 附近产生 flip 分支,此时 $b = 4, a = 1.1$,初始点为 $(0.1, 0.4)$

Fig. 5 The fixed point E_3 generates a flip bifurcation near $c = 3$, where $b = 4, a = 1.1$, and the initial point is $(0.5, 0.4)$

最后,对于不动点 E_4 ,由上一节可知当参数取值在 $1 < c < 3, 1 < a < 3, b = -(c(a-3))/(c-1)$ 时, E_4 附近产生了 flip 分支,于是选择 b 作为分支参数,取 $a = 1.01, c = 2.9$ 初始点为 $(1.4, 0.2)$,在 Maple2019 中模拟出模型(4)在 (b, x, y) -空间的分支图。由图 7 可知,当 $1 < c < 3, 1 < a < 3, b = -(c(a-3))/(c-1)$ 时, E_4 产生了 flip 分支。从该图也可以发现:随着参数变化,即当 $b > 3.9$ 时,模型(4)产生了混沌现象。进而在 Matlab R2022a 中绘制出这种情形下模型(4)相应的 Laypunov 指数图。由图 8 可知当 $b > 3.9$ 时,模型(4)确实发生了混沌。不动点 E_4 在其他情形下发生的 flip 分支及混沌现象可类似模拟得出。

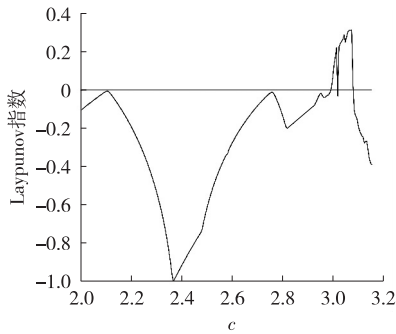


图 6 不动点 E_3 在 $c > 2.85$ 附近产生混沌, 此时 $b = 4, a = 1.1$, 初始点为 $(0.1, 0.4)$

Fig. 6 The fixed point E_3 generates chaos near $c > 2.85$, where $b = 4$, $a = 0.95$, and the initial point is $(0.1, 0.4)$

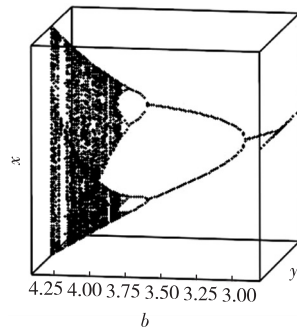


图 7 不动点 E_4 在 $1 < c < 3, 1 < a < 3$, $b = -(c(a-3))/(c-1)$ 附近产生 flip 分支, 此时 $a = 1.01, c = 2.9$, 初始点为 $(1.4, 0.2)$

Fig. 7 The fixed point E_4 generates a flip bifurcation near $1 < c < 3, 1 < a < 3$, $b = -(c(a-3))/(c-1)$, where $a = 1.01$, $c = 2.9$, and the initial point is $(1.4, 0.2)$

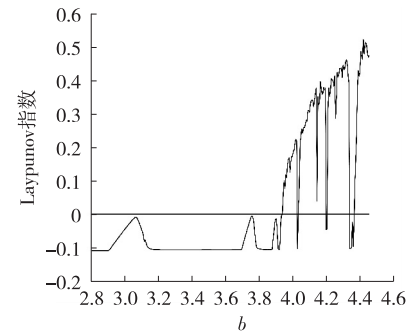


图 8 不动点 E_4 在 $b > 3.9$ 附近产生了混沌, 此时 $a = 1.01, c = 2.9$, 初始点为 $(1.4, 0.2)$

Fig. 8 The fixed point E_4 generates chaos near $b > 3.9$, where $a = 1.01$, $c = 2.9$, and the initial point is $(1.4, 0.2)$

参考文献:

- [1] SATOH K, AIHARAT T. Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1990, 59(4): 1184-1198.
- [2] WANG J, YANG G, FEČKAN M, et al. Dynamics of a discrete nonlinear prey-predator Mode [J]. International Journal bifurcation Chaos, 2020, 30(4): 2050055.
- [3] YAKUBUA A. Prey dominance in discrete predator-prey systems with a prey refuge[J]. Mathematical Biosciences, 1996, 144(2): 155-178.
- [4] BARMAN D, ROY J and ALAM S. Modelling hiding behaviour in a predator-prey system by both integer order and fractional order derivatives[J]. Ecological Informatics, 2022, 67: 101483.
- [5] LIU Z, LI N. Stability and bifurcation in a predator-prey model with age structure and delays[J]. Journal of nonlinear science, 2015, 25(4): 937-957.
- [6] THAKUR M. The role of predators in driving warming-prey diversity relationships: An invertebrate perspective[J]. Basic and applied ecology, 2020, 47: 23-34.
- [7] FRANK A, SUBBEY S, KOBRAS M, et al. Population dynamic regulators in an empirical predator-prey system[J]. Journal of Theoretical Biology, 2021, 527: 110814.
- [8] DOEBELI M. Genetic variation and the persistence of predator-prey interactions in the nicholson-baileymodel[J]. Journal of Theoretical Biology, 1997, 188(1): 10-120.
- [9] WANGERSKY P J, CUNNINGHAM W J. Time lag in prey-predator population models[J]. Ecology, 1957, 38(1): 136-139.
- [10] GOEL N S, MAITRA S C, MONTROLL E W. On the volterra and other nonlinear models of interacting populations[J]. Reviews of modern physics, 1971, 43(2): 231-276.
- [11] KNOLLE H. Lotka-volterra equations with time delay and periodic forcing term[J]. Mathematical Biosciences, 1976, 31(3/4): 351-375.
- [12] CUSHING J M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics[M]. New York: Springer, 1977.
- [13] DONALD N M. Time lags in biological models[M]. New York: Springer, 1978.
- [14] ZHANG X, LIU Z. Hopf bifurcation analysis in a predator-prey model with predator-age structure and predator-prey reaction time delay[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 91: 530-548.
- [15] ZHONG J. Bifurcations of a second-order difference equation related to a class of reaction-diffusion equations[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2015, 21(1): 53-71.
- [16] ZHONG J, YU Z. Qualitative properties and bifurcations of mistro-rodrigues-petrovskii model[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(4): 2036-2075.
- [17] YODZIS P. Predator-prey theory and management of multispecies fisheries[J]. Ecological applications, 1994, 4(1): 51-58.

- [18] LI S,ZHANG W. Bifurcations of a discrete prey-predator model with holling type II functional response[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B,2010,14(1):159-176.
- [19] YUE D,GUAN Z,CHEN J,et al. Bifurcations and chaos of a discrete-time model in genetic regulatory networks[J]. Nonlinear Dynamics,2017,87(1):567-586.
- [20] GOPALSAMY K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics[M]. Dordrecht: Springer, 1992.
- [21] KUANG Y. Delay differential equations with applications in population dynamics[M]. New York:Academic Press,1993.
- [22] CAULEY E M,WILSON W G,de ROOS A M. Dynamics of age-structured predator-prey populations in space: asymmetrical effects of mobility in juvenile and adult predators[J]. Oikos,1996,76(3):485-497.
- [23] RUAN S. On nonlinear dynamics of predator-prey models with discrete delay [J]. Mathematical Modelling of Natural Phenomena,2009,4(2):140-188.
- [24] CHEN S,SHI J,WEI J. Time delay-induced instabilities and Hopf bifurcations in general reaction-diffusion systems[J]. Journal of nonlinear science,2013,23(1):1-38.
- [25] DUCROT A,MAGAL P,RUAN S. Projectors on the generalized eigenspaces for partial differential equations with time delay [J]. Infinite dimensional dynamical systems,2013,64:353-390.
- [26] GRAGNANI A. Bifurcation analysis of two predator-prey models[J]. Applied mathematics and computation,1997,85(2/3):97-108.
- [27] GU Y,TUNG M,YUAN J,et al. Crises and hysteresis in coupled logistic maps[J]. Physical Review Letters,1984,52(9):701-704.
- [28] YANG L,HOU X,XIA B. A complete algorithm for automated discovering of a class of inequality-type theorems[J]. Science in China Series F Information Sciences,2001,44(1):33-49.
- [29] YANG L,XIA B. Real solution classifications of parametric semi-algebraic systems[M]//DOLZMANN A,SEIDL A,STURM T. Algorithmic algebra and logic-proceedings of the A3L 2005. Norderstedt:Herstellung und Verlag,2005:281-289.
- [30] CARR J. Application of center manifold theory[M]. New York:Springer,1981.
- [31] KUZNETSOV Y A. Elements of applied bifurcation theory[M]. New York:Springer,2004.

Dynamic Properties of a Coupled Logistic Model

YU Jiangqiong¹, LIU Na², YU Zhiheng¹

(1. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756;

2. School of General Education, Chengdu Industry and Trade College, Chengdu 611731, China)

Abstract: Discuss the dynamic properties of a class of discrete predator-prey models, and analyze the discrete system corresponding to the model by using polynomial complete discriminant system and central manifold theorem. The topological classification of the fixed points of the model was given by the polynomial complete discrimination system, and the parameter conditions for the fixed points in non-hyperbolic cases were found. By using central manifold theorem proves that the model undergoes transcritical and flip bifurcations near fixed points. The correctness of the above results was further verified through numerical simulation, and the corresponding Laypunov exponent was provided to demonstrate that the model produces chaotic phenomena under certain parameter conditions. The research results show that the model under discussion can generate dynamic properties such as transcritical bifurcatin, flip bifurcation, and chaos under certain parameter conditions.

Keywords: coupled logistic model; bifurcation; polynomial complete discriminant system; central manifold; Laypunov exponents

(责任编辑 方 兴)