运筹学与控制论　　DOI:10.11721/cqnuj20230601

张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$的 Hermitian 解与半正定解*

刘喜富，蒋　玲
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:在张量的 Einstein 积下分别研究了张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$的 Hermitian 解与半正定解。根据方程解的结构,分别求得方程的特解与对应齐次方程的通解。并给出了这两种解存在的充要条件及通解的显式表达式。张量方程的 Hermitian 解与半正定解存在的充要条件表明,矩阵方程的 Hermitian 解与半正定解的性质与通解的显式表达式可以推广到张量上。

关键词:张量方程;Einstein 积;半正定解;Hermitian 解
中图分类号:O214.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)06-0001-06

随着信息化、数据化时代的到来,如何快速高效地处理大规模高维问题变得十分重要。张量作为向量和矩阵的高阶推广,是刻画大规模高维问题和高维数据的一种方法。近些年来,关于张量的相关问题研究主要包括以下几个方面:张量的分解、张量的秩、张量的低秩逼近、结构张量、张量方程等等。它广泛应用于心理学测量[1]、数字图像恢复[2]、量子纠缠[3]、信号处理[4]、高阶统计量[5]等领域。张量方程还在科学计算与工程领域中起着重要的作用。例如在生物科学中,多个基因的相互作用可以转化为求解张量线性系统的稀疏解问题[6]。由于张量方程的广泛应用,因此求解张量方程的具有特殊结构的解有着重要的意义。本文主要是基于张量的 Einstein 来研究张量方程的 Hermitian 解与半正定解。

1　基本定义

首先引入本文用到的一些记号和定义。给定正整数 M,记$[M]=\{1,2,\cdots,M\}$,正整数 N、L、P、Q 类似。$\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$ 表示所有 $I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N$-维复张量的全体。例如对于张量$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,其中元素$\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N}\in\mathbf{C}$且下标满足$1\leqslant i_k\leqslant I_k(k\in[M])$,$1\leqslant j_l\leqslant J_l(l\in[N])$。张量作为向量和矩阵的多维推广,显然一阶张量是一个向量,二阶张量是矩阵,因此张量也被称为超矩阵。

对于张量$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,$\mathcal{B}=(\mathcal{B}_{j_1\cdots j_N k_1\cdots k_L})\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times K_1\times\cdots\times K_L}$,则它们的 Einstein 积定义为:

$$(\mathcal{A} *_N \mathcal{B})_{i_1\cdots i_M k_1\cdots k_L}=\sum_{j_1\cdots j_N}\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N}\mathcal{B}_{j_1\cdots j_N k_1\cdots k_L}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times K_1\times\cdots\times K_L}。\tag{1}$$

特别地,给定$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$与一个特殊的张量$\mathcal{B}=(\mathcal{B}_{j_1\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N}$,则 Einstein 积$(\mathcal{A} *_N \mathcal{B})_{i_1\cdots i_M}=\sum\limits_{j_1\cdots j_N}\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N}\mathcal{B}_{j_1\cdots j_N}$,并且$\mathcal{A} *_N \mathcal{B}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M}$。

下面将介绍一些张量的基本概念。

定义 1[7]　给定张量$\mathcal{D}=(\mathcal{D}_{i_1\cdots i_N j_1\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$。如果对角元$\mathcal{D}_{i_1\cdots i_N i_1\cdots i_N}$以外的元素均为 0,则称这样的张量为对角张量;所有对角元$\mathcal{D}_{i_1\cdots i_N i_1\cdots i_N}=1$的对角张量称为单位张量,一般用符号$\mathcal{I}$表示。

例如,对于单位张量$\mathcal{I}=(e_{i_1 i_2 j_1 j_2})\in\mathbf{C}^{3\times3\times3\times3}$,有 $e_{1111}=e_{1212}=e_{2121}=e_{2222}=e_{1313}=e_{3131}=e_{2323}=e_{3232}=e_{3333}=1$,其余项均为 0。

---

* **收稿日期**:2022-02-17　**修回日期**:2023-10-17　**网络出版时间**:2023-05-26T15:08
资助项目:重庆市自然科学基金(No. cstc2021jcyj-msxmX0195);重庆市教育委员会科技项目(No. KJQN202100505)
第一作者简介:刘喜富,男,副教授,博士,研究方向为矩阵与数值代数,E-mail:lxf211@cqnu.edu.cn;**通信作者**:蒋玲,女,E-mail:905170569@qq.com
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230525.1441.002

特别地,如果张量的所有元素都为0,则称为零张量,记为$\mathcal{O}$。

定义2[7] 给定张量$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,$\mathcal{B}=(\mathcal{B}_{j_1\cdots j_N i_1\cdots i_M})\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times I_1\times\cdots\times I_M}$。如果$\mathcal{B}_{j_1\cdots j_N i_1\cdots i_M}=\overline{\mathcal{A}}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N}$,则称张量$\mathcal{B}$为张量$\mathcal{A}$的共轭转置,记为$\mathcal{B}=\mathcal{A}^{\mathrm{H}}$。对于张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$,若$\mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}$,则称$\mathcal{A}$为Hermitian张量;若$\mathcal{A}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{A}=\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{I}$,则称$\mathcal{A}$为酉张量。

在定义2中,若$\mathcal{A}\in\mathbf{R}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,即$\mathcal{A}$是实张量,则共轭转置退化为转置,记作$\mathcal{A}^{\mathrm{T}}$。

定义3[7] 对于张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,如果存在张量$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times I_1\times\cdots\times I_M}$满足以下4个条件:1) $\mathcal{A}*_N\mathcal{X}*_M\mathcal{A}=\mathcal{A}$;2) $\mathcal{X}*_M\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{X}$;3) $(\mathcal{A}*_N\mathcal{X})^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}*_N\mathcal{X}$;4) $(\mathcal{X}*_M\mathcal{A})^{\mathrm{H}}=\mathcal{X}*_M\mathcal{A}$。则称张量$\mathcal{X}$为张量$\mathcal{A}$的Moore-Penrose逆,记作$\mathcal{X}=\mathcal{A}^{\dagger}$。

注 对于张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,它的Moore-Penrose逆存在并且是唯一的[7]。

对于张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,有:

1) $(\mathcal{A}^{\dagger})^{\dagger}=\mathcal{A}$;

2) $(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}=(\mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}$;

3) $(\mathcal{A}^{\mathrm{H}}*_M\mathcal{A})^{\dagger}=\mathcal{A}^{\dagger}*_M(\mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}$,$(\mathcal{A}*_M\mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}=(\mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}*_M\mathcal{A}^{\dagger}$;

4) 特别地,当张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$,如果存在张量$\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$,使得$\mathcal{A}*_N\mathcal{B}=\mathcal{B}*_N\mathcal{A}=\mathcal{I}$,则称张量$\mathcal{A}$可逆,则张量$\mathcal{B}$记为$\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$;若$\mathcal{A}$的逆存在,则$\mathcal{A}^{\dagger}=\mathcal{A}^{-1}$。

定义4[8] 对于张量$\mathcal{X}=(\mathcal{X}_{i_1\cdots i_N})$,$\mathcal{Y}=(\mathcal{Y}_{i_1\cdots i_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_N}$,则张量的内积为:

$$\langle\mathcal{X},\mathcal{Y}\rangle=\sum_{i_1\cdots i_N}\overline{\mathcal{X}}_{i_1\cdots i_N}\mathcal{Y}_{i_1\cdots i_N}。\tag{2}$$

与半正定矩阵的定义类似,半正定张量的概念也可通过张量内积的概念引出。

定义5[9] 设Hermitian张量$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1\cdots i_N j_1\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_N\times I_1\times\cdots\times I_N}$。若对任意的张量$\mathcal{X}=(\mathcal{X}_{i_1\cdots i_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_N}$,有:

$$f(\mathcal{X})=\langle\mathcal{X},\mathcal{A}*_N\mathcal{X}\rangle\geqslant 0,\tag{3}$$

则称$\mathcal{A}$为Hermitian半正定张量,简称为半正定张量,记为$\mathcal{A}\geqslant 0$;特别地,若对任意的非零张量$\mathcal{X}$有$f(\mathcal{X})>0$,则称$\mathcal{A}$为正定张量,记为$\mathcal{A}>0$。

后面张量方程的半正定解将会涉及到张量秩的概念。由于张量是较为复杂的高维数组,直接定义秩较为复杂,因此将张量展开为矩阵的方法,通过矩阵的秩来引入张量的秩,为定理4的证明作铺垫。

定义6[10] 张量的展开指的是系统地将张量的元素重组成二维数组所得到的矩阵。对张量空间$\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$和矩阵空间$\mathbf{C}^{(I_1\cdots I_M)\times(J_1\cdots J_N)}$,定义映射$\varphi$:$\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}\rightarrow\mathbf{C}^{(I_1\cdots I_M)\times(J_1\cdots J_N)}$使得$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N})\rightarrow\mathbf{A}=(A_{\mathrm{ivec}(i,I),\mathrm{ivec}(j,J)})$,其中:ivec$(i,I)$和ivec$(j,J)$是两个索引映射函数,分别对应矩阵的行下标$i:=\{i_1,\cdots,i_M\}$和列下标$j:=\{j_1,\cdots,j_N\}$,而行下标、列下标分别是$\mathcal{A}_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_N}$中的条目,且

$$\mathrm{ivec}(i,I):=i_1+\sum_{r=2}^{M}(i_r-1)\sum_{u=1}^{r-1}I_u,\ \mathrm{ivec}(j,J):=j_1+\sum_{s=2}^{N}(j_s-1)\sum_{v=1}^{s-1}J_v,$$

式中:$I:=\{I_1,\cdots,I_M\}$和$J:=\{J_1,\cdots,J_N\}$分别是指张量$\mathcal{A}$的行模式和列模式。

定义7[10] 给定张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,矩阵$\varphi(\mathcal{A})=\mathbf{A}$由定义6中的映射$\varphi$得到,则矩阵$\mathbf{A}$的秩称为张量$\mathcal{A}$的秩,记为$\mathrm{rank}_U(\mathcal{A})$。

2 主要结论

Hermitian张量可以看作是Hermitian矩阵的推广形式,在量子纠缠相关理论[11]中起着重要的作用。受矩阵广义逆在求解矩阵方程中的应用启发,学者们探讨了如何利用张量的广义逆来求解张量方程的解。Brazell等人[12]引入了张量逆的概念,讨论了张量线性系统是否有解与它的最小二乘解。Sun等人[7]利用张量Moore-Penrose逆给出了张量方程的一般解的表达式。代丽芳等人[13]研究了Skew-Hermitian张量约束下的张量系统的可解性问题。但是,已有研究中对Hermitian张量和半正定张量约束下的张量方程的关注较少。本节主要是讨论非齐次张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$的Hermitian解和半正定解的可解性问题。下面,将先给出齐次张量方程

$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$的 Hermitian 解和半正定解的通解表达式，再给出非齐次张量方程的通解表达式。

引理 1[10]　设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{K_1\times\cdots\times K_P\times I_1\times\cdots\times I_M}$，$\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times L_1\times\cdots\times L_Q}$，$\mathcal{C}\in\mathbf{C}^{K_1\times\cdots\times K_P\times L_1\times\cdots\times L_Q}$为已知张量，$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$为未知张量。则张量方程$\mathcal{A} *_M \mathcal{X} *_N \mathcal{B}=\mathcal{C}$有解的充要条件是：

$$\mathcal{A} *_M \mathcal{A}^{\dagger} *_P \mathcal{C} *_Q \mathcal{B}^{\dagger} *_N \mathcal{B}=\mathcal{C}。\tag{4}$$

当方程有解时，通解为：

$$\mathcal{X}=\mathcal{C}^{\dagger} *_P \mathcal{C} *_Q \mathcal{B}^{\dagger}+\mathcal{U}-\mathcal{A}^{\dagger} *_P \mathcal{A} *_M \mathcal{U} *_N \mathcal{B} *_Q \mathcal{B}^{\dagger},\tag{5}$$

其中：$\mathcal{U}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$为任意张量。

利用引理 1，可以证明以下几个定理。

定理 1　设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$为已知张量，$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$为未知张量，则张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$有 Hermitian 解，且 Hermitian 通解为：

$$\mathcal{X}=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}),\tag{6}$$

其中：$\mathcal{U}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$是任意的 Hermitian 张量。

证明　容易验证，$\mathcal{X}=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})$是 Hermitian 张量，且根据广义逆的定义，满足张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$。因此，$\mathcal{X}$是方程的 Hermitian 解。

下证齐次张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$的任意一个 Hermitian 解都可以表示为：

$$\mathcal{X}=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})。$$

设$\mathcal{X}_0$是$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$的一个 Hermitian 解，则有$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}_0=\mathcal{O}$，$\mathcal{X}_0^{\mathrm{H}}=\mathcal{X}_0$。

由引理 1 可知，$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$的通解为$\mathcal{X}_0=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{Y}$，其中$\mathcal{Y}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$是任意的。所以$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}_0^{\mathrm{H}}=\mathcal{O}$，对等式两边同时共轭转置可得$\mathcal{X}_0 *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{O}$。令$F(\mathcal{A})=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})$，则有：

$$F(\mathcal{A}) *_N \mathcal{Y} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{O},$$

且通解为：

$$\mathcal{Y}=\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A} *_N \mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2 *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}),\ \forall \mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}。$$

因此，可得：

$$\mathcal{X}_0=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U}_2 *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}),$$

从而：

$$\mathcal{X}_0^{\mathrm{H}}=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U}_2^{\mathrm{H}} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})。$$

因为$\mathcal{X}_0^{\mathrm{H}}=\mathcal{X}_0$，所以$\mathcal{X}_0=\dfrac{\mathcal{X}_0^{\mathrm{H}}+\mathcal{X}_0}{2}=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \left(\dfrac{\mathcal{U}_2+\mathcal{U}_2^{\mathrm{H}}}{2}\right) *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})$。

令$\mathcal{U}=\dfrac{\mathcal{U}_2+\mathcal{U}_2^{\mathrm{H}}}{2}$，容易验证$\mathcal{U}=\mathcal{U}^{\mathrm{H}}$，则$\mathcal{X}_0=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})$，从而张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$的任一 Hermitian 解都可表示为：

$$\mathcal{X}=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})。$$

其中：$\mathcal{U}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$为任意的 Hermitian 张量。　　证毕

定理 2[14]　设$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$，则张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$有 Hermitian 解的充要条件为：

$$\mathcal{A} *_N \mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{B}=\mathcal{B},\ \mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A} *_N \mathcal{B}^{\mathrm{H}}。\tag{7}$$

在上述情况下，Hermitian 通解为：

$$\begin{aligned}\mathcal{X}=&\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{B}+\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A} *_N \mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}+\\&(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})。\end{aligned}\tag{8}$$

其中：$\mathcal{U}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$是任意的 Hermitian 张量。

证明　第 1 步，证明张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$存在 Hermitian 解的充要条件。

先证必要性。如果张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$存在 Hermitian 解，则方程有解。由引理 1 可得：

$$\mathcal{A} *_N \mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{B}=\mathcal{B},$$

并且由$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$得$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}}$。

因为$\mathcal{X}$是张量方程的 Hermitian 解,所以有$\mathcal{X}^{\mathrm{H}}=\mathcal{X}$,故有:

$$(\mathcal{A}*_N\mathcal{X}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}*_N\mathcal{X}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}*_N\mathcal{X}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{A},$$

可得$(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}=\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}$。

再证充分性。记$\mathcal{X}_0=\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}+\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}$,则:

$$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}_0=\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}+\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}-\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}=$$
$$\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}+\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}-\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}。$$

又因为$\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}=\mathcal{B}$,所以$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}_0=\mathcal{B}$。故$\mathcal{X}_0$是张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$的一个解。

由$\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}$,可得:

$$\mathcal{X}_0^{\mathrm{H}}=\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}+\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}=$$
$$\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}+\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}=\mathcal{X}_0。$$

所以$\mathcal{X}_0$是张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$的一个 Hermitian 解。

第2步,求张量方程的 Hermitian 通解。

由上述充分性的证明可知,$\mathcal{X}_0$是张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$的一个 Hermitian 特解,只需找出齐次张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{O}$的 Hermitian 通解,即可表示出非齐次张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$的 Hermitian 通解。

由定理1可知齐次张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{O}$的 Hermitian 通解为:

$$\mathcal{X}_1=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A})*_N\mathcal{U}^{\mathrm{H}}*_N(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A})。$$

从而非齐次张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$的 Hermitian 的通解为:

$$\mathcal{X}=\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}+\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A}*_N\mathcal{B}^{\mathrm{H}}*_M(\mathcal{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}+(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A})*_N\mathcal{U}*_N(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A}),$$

其中:$\mathcal{U}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$是任意 Hermitian 张量。 证毕

张量方程的半正定解是张量方程的 Hermitian 解的特殊情形,只是对于张量方程的解多了一个半正定的限制条件,下面先来求解齐次张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{O}$的半正定解。

定理3 给定张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,则张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{O}$有半正定解,且半正定通解为:

$$\mathcal{X}=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A})*_N\mathcal{U}*_N(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{A}),\tag{9}$$

其中:$\mathcal{U}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$是任意的半正定张量,$\mathcal{I}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$是单位张量。

定理3的证明与定理1中求张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{O}$的 Hermitian 通解的方法类似,这里不再赘述。由于求解张量方程半正定解的时候,比求解 Hermitian 解多了秩的约束条件,因此先证明下述引理。

引理2 设$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,若$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$是张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$的半正定解,则

$$\mathrm{rank}_U(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}_U(\mathcal{B})。\tag{10}$$

证明 由定义7可知,张量的秩是通过矩阵的秩来定义的,因此要证明$\mathrm{rank}_U(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}_U(\mathcal{B})$,可先通过定义映射将张量展开为矩阵,再通过矩阵来证明。

定义映射:

$$\varphi_1:\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times I_1\times\cdots\times I_M}\to\mathbf{C}^{m\times m},m=I_1,\cdots,I_M;\varphi_2:\mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}\to\mathbf{C}^{n\times n},n=J_1,\cdots,J_N;$$
$$\varphi_3:\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}\to\mathbf{C}^{m\times n},m=I_1,\cdots,I_M,n=J_1,\cdots,J_N。$$

则有$\varphi_1(\mathcal{A}*_N\mathcal{X}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}$,$\varphi_2(\mathcal{X})=\boldsymbol{X}$,$\varphi_3(\mathcal{A}*_N\mathcal{X})=\boldsymbol{AX}$。因为$\mathcal{X}$是半正定张量,则$\boldsymbol{X}$是半正定矩阵。由半正定矩阵的定义,存在秩为$r$的矩阵$\boldsymbol{Y}$,有$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{YY}^{\mathrm{H}}$,进一步有:

$$r(\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}})=r(\boldsymbol{AYY}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=r(\boldsymbol{AY}(\boldsymbol{AY})^{\mathrm{H}})=r(\boldsymbol{AY})。$$

容易验证$r(\boldsymbol{AY})\geqslant r(\boldsymbol{AYY}^{\mathrm{H}})=r(\boldsymbol{AX})$,从而$r(\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}})\geqslant r(\boldsymbol{AX})$。

又因为$r(\boldsymbol{AX})\geqslant r(\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}})$。显然可以得到$r(\boldsymbol{AX})=r(\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}})$。从而有:

$$\mathrm{rank}_U(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}_U(\mathcal{A}*_N\mathcal{X}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}_U(\mathcal{A}*_N\mathcal{X})=\mathrm{rank}_U(\mathcal{B})。$$ 证毕

定理4[14] 设$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times J_1\times\cdots\times J_N}$,则张量方程$\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{B}$有半正定解的充要条件是:

$$\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^{\dagger}*_M\mathcal{B}=\mathcal{B},\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}}\text{半正定},\mathrm{rank}_U(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}_U(\mathcal{B}),\tag{11}$$

在上述情况下,半正定通解为:

$$\mathcal{X}=\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}^{\mathrm{H}}+(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})。\tag{12}$$

其中：$\mathcal{U}\in \mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$ 是任意的半正定张量，$\mathcal{I}\in \mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$ 是单位张量。

证明　第 1 步，证明张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$存在半正定解的充要条件。

先证必要性。若张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$存在半正定解，故方程有解。由引理 1 可得$\mathcal{A} *_N \mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{B}=\mathcal{B}$，并且由引理 2 可得 $\mathrm{rank}_U(\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}_U(\mathcal{B})$。再由$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$得$\mathcal{A} *_N \mathcal{X} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}$。

因为$\mathcal{X}$是张量方程的半正定解，那么$\mathcal{X}$是半正定张量，有$\mathcal{X}^{\mathrm{H}}=\mathcal{X}$，所以有：

$$(\mathcal{A} *_N \mathcal{X} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}=\mathcal{A} *_N \mathcal{X}^{\mathrm{H}} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A} *_N \mathcal{X} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}。$$

由上式可得$(\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}=\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A} *_N \mathcal{B}^{\mathrm{H}}$。又因为$\mathcal{X}$是半正定张量，显然有$\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}$也是半正定张量。

再证充分性。记$\mathcal{X}_0=\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}$，有$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}_0=\mathcal{A} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}$。

由$\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A} *_N \mathcal{B}^{\mathrm{H}}$，可得$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}_0=\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}$。再由 $\mathrm{rank}_U(\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}_U(\mathcal{B})$，可得$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}_0=\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}=\mathcal{B}$。从而$\mathcal{X}_0$是张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$的一个解。

下证$\mathcal{X}_0$是半正定的。

$$\mathcal{X}_0^{\mathrm{H}}=\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M [(\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}]^{\mathrm{H}} *_M \mathcal{B}=\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M [(\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}]^{\dagger} *_M \mathcal{B}=$$
$$\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{A} *_N \mathcal{B}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}=\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}=\mathcal{X}_0。$$

又$\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}}$是半正定的，从而$(\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}$是半正定的，故$\mathcal{X}_0=\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}$是半正定的。

综上所述，$\mathcal{X}_0$是张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$的一个半正定解。

第 2 步，求张量方程的半正定通解。

由上述充分性的证明可知，$\mathcal{X}_0$是张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$的一个半正定特解，只需找出齐次张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$的半正定通解，即可表示出非齐次张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$的半正定通解。由定理 3 可知齐次张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$的半正定通解为：

$$\mathcal{X}_1=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}),$$

从而可以得出$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$的半正定通解为：

$$\mathcal{X}=\mathcal{B}^{\mathrm{H}} *_M (\mathcal{B} *_N \mathcal{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} *_M \mathcal{B}^{\mathrm{H}}+(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A}) *_N \mathcal{U} *_N (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{\dagger} *_M \mathcal{A})。$$

其中：$\mathcal{U}\in \mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$ 是任意的半正定张量，$\mathcal{I}\in \mathbf{C}^{J_1\times\cdots\times J_N\times J_1\times\cdots\times J_N}$ 是单位张量。　　证毕

3　总结

本文基于 Einstein 积的一类张量方程进行研究。先由文献[10]的引理 3.11 给出张量方程$\mathcal{A} *_M \mathcal{X} *_N \mathcal{B}=\mathcal{C}$解存在的充要条件以及一般通解的表达形式，再利用了文献[14]中定理 2.1、定理 2.2 求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的 Hermitian 解与半正定解的证明方法，分别推导出了张量方程$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$的 Hermitian 解与半正定解存在的充要条件。并在此条件下，给出了张量方程的一般 Hermitian 通解与半正定通解的显式表达。

对矩阵而言，除了对形如 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的 Hermitian 解与半正定解的讨论以外，对 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{D}$ 以及 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 这类矩阵方程特殊解的讨论也有很多。类似地，张量方程的特殊解也需要继续深入研究。

参考文献：

[1] TUCKER L R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis[J]. Psychometrika，1966，31(3)：279-311.

[2] QI L Q，YU G H，WU X E. Higher order positive semidefinite diffusion tensor imaging[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences，2010，3(3)：416-433.

[3] HU S L，QI L Q，ZHANG G F. The geometric measure of entanglement of pure states with nonnegative amplitudes and the spectral theory of nonnegative tensors[EB/OL]. (2012-03-29)[2022-02-15]. http://www.arxiv.org/pdf/1203.3675.pdf.

[4] De LATHAUWER L，CASTAING J，CARDOSO J F. Fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures[J]. IEEE Transactions on Signal Processing，2007，55(6)：2965-2973.

[5] CARDOSO J F. Higher-order contrasts for independent component analysis[J]. Neural Computation，1999，11(1)：157-192.

[6] FRY A，NAVASCA C. Tensor restricted isometry property for multilinear sparse system of genomic interactions[C]//The 48th Asilomar Conference on Signals，Systems and Conputers，November 2-5，2014，Pacific Grove，CA，USA. Piscataway：IEEE，2014.

[7] SUN L Z，ZHENG B D，BU C J，et al. Moore-Penrose inverse of tensors via Einstein product[J]. Linear and Multilinear Algebra，

2016,64(4):686-689.

[8] JI J,WEI Y M. The Drazin inverse of an even-order tensor and its application to singular tensor equations[J]. Computers & Mathematics with Applications,2018,75(9):3402-3413.

[9] QI L Q. Theory of tensors(hypermatrices)[C/OL]//(2013-09-03)[2022-02-15]. The 9th International Conference on Numerical Optimization and Numerical Linear Algebra, September 12-15, 2013. http://lsec.cc.ac.cn/~icnonla13/Conf.Manual.v1.1.pdf.

[10] LIANG M L,ZHENG B. Further results on Moore-Penrose inverses of tensors with application to tensor nearness problems [J]. Computers & Mathematics with Applications,2018,77(5):1282-1293.

[11] NI G Y. Hermitian tensor and quantum mixed state[EB/OL]. (2019-08-23)[2022-02-15]. https://arxiv.org/pdf/1902.02640.pdf.

[12] BRAZELL M,LI N,NAVASCA C,et al. Solving multilinear systems via tensor inversion[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2013,34(2):542-570.

[13] 代丽芳,梁茂林,贾金平. 一类张量线性系统的可解性及其应用[J]. 宁夏师范学院学报,2021,42(1):16-22.
DAI L F,LIANG M L,JIA J P. The solvability and it's application of a class of tensor linear systems[J]. Journal of Ningxia Normal University,2021,42(1):16-22.

[14] KHATRI C G,MITRA S K. Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,1976,31(4):579-585.

Operations Research and Cybernetics

Hermitian Solution and Positive Semidefinite Solution of Tensor Equation $\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=\mathcal{B}$

LIU Xifu, JIANG Ling

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Hermitian solution and positive semidefinite solution to tensor equation can be regarded as an extension of the matrix equation. According to the structure of the solution, a special solution to the tensor equation is found, and the general solution to the homogeneous equation is established corresponding to the tensor equation. The necessary and sufficient conditions for the existence and the explicit expressions for these two solutions to the tensor equation are presented. The necessary and sufficient conditions for the existence of Hermitian solution and positive semi-definite solution of tensor equations show that the properties of Hermitian and positive semi-definite solutions of matrix equation and the explicit expressions of general solutions can be extended to tensor equations.

Keywords: tensor equation; Einstein product; positive semidefinite solution; Hermitian solution

(责任编辑 黄 颖)