2023 年 11 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Nov. 2023
第 40 卷 第 6 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 40 No. 6

DOI:10. 11721/cqnuj20230616

广义多解析函数的多种积分表示及应用*

钱菡薇，郭国安，李小雨
(南京邮电大学 理学院，南京 210023)

摘要:积分表示作为复分析基本理论和研究边值问题的重要工具,基于此提出并建立一类更广泛的广义多解析函数类的积分表示及应用理论。利用广义 β-解析函数的分解定理,并结合 Cauchy-Pompeiu 公式、矩阵变换技巧和 Fredholm 积分方程理论进行研究。获得了包含带平移和不带平移在内的多种广义多解析函数的积分表示式,并由此定义并证明了高阶多 Cauchy 型积分的连续延拓定理及该定理在求解一类黎曼跳跃问题的应用。建立了一类广义多解析函数的积分表示,延伸和推广了解析函数特别是多解析函数的积分表示理论,也为后续相关多 β-解析函数边值问题和奇异积分算子等研究提供了理论支撑。

关键词:Beltrami 方程;广义 β-解析函数;高阶 Cauchy 积分公式;积分表示;高阶 Cauchy 积分算子

中图分类号:O175. 5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)06-0078-08

解析函数边值问题在数学、物理等领域具有广泛的应用[1-3],它的研究范围也被拓展到几何边界为分形曲线情形[4-6]或扩大函数类情形[7-11]。然而无论研究哪种情形,都需要创建相应的积分表示理论。德国 Begehr 教授是最早从事积分表示理论研究并做出了突出贡献的学者,他和合作者创建了一套积分表示及应用理论[3,12-13],并促进了积分表示理论在复分析、调和分析和偏微分方程中的蓬勃发展,特别是在多解析函数和多调和函数边值问题中的应用[9-16],其中文献[14-16]完整地总结了积分表示理论的历史背景和最新发展现状。

近些年来,研究者们将多解析函数类推广到广义多解析函数类,研究它们的积分表示及应用,例如研究由多项式 Cauchy-Riemann 算子所确定的一类广义多解析函数类边值问题[17-19],探究高阶李普希茨函数类性质,给出多解析函数刻画和创建积分表示公式[20-21];另外,Blaya 等人[22-25]研究了 β 解析函数类(解析函数类的另一种推广)的 Riemann 和 Dirichlet 边值问题,并建立了 Poincaré-Beltrand、Schwartz 和 Poisson 型积分公式;随后,Katz 对此进行推广并给出了广义 β 解析函数类的积分表示、研究了跳跃问题的解法[26-27];陆续有文献建立了广义 β 解析函数类的带平移的全新的积分表示式[28-29]。

然而,一方面,文献[22-29]仅限于研究一阶 β 解析函数不带平移的积分表示式,没有讨论高阶 β 解析函数情形,这是因为涉及到迭代算子的复杂结构,创建高阶 β 解析函数 Cauchy-Pompeiu 积分公式需要构造更复杂的高阶 β-Cauchy 核函数和更复杂更细致的分析;另一方面,创建高阶 β 解析函数带平移的积分公式也能推广文献[28-29]中的积分表示,有利于研究不同的新型带平移的高阶 β 解析函数边值问题。此外,构建高阶 β 解析函数的积分表示式也具有较好理论价值,它能给出高阶 β 解析函数 Riemann 和 Schwartz 等多种边值问题的一种新解法[18-19]。

基于上述研究背景,本文建立了 $C^{(m)}(D)$ 函数类的 Cauchy-Pompeiu 积分公式、高阶多 β 解析带平移和不带平移下的多个新积分表示式,给出了它在奇异积分算子和跳跃问题中的应用。主要结果推广了 Begehr 创建的 Cauchy-Pompeiu 积分公式[12-13]及经典意义下多解析函数积分表示[15,17],给出了带平移的高阶 β 解析函数 Cauchy 积分公式,推广了文献[1,28-29]中带平移的函数积分表示结论,给带平移 Haseman 边值问题研究提供了理论支撑,同时推广了 Blaya 等人[10]创建的多解析函数分解结论。此外,进一步推广文献[23]的结论,得到更一般 Poincaré-Beltrand 公式、高阶多 β 解析函数的 Schwartz 表示及 Poisson 型积分表示。

---

* **收稿日期**:2022-08-16　　**修回日期**:2023-07-13　　**网络出版时间**:2024-01-29T09:32

资助项目:国家自然科学基金青年科学基金(No. 12001289)

第一作者简介:钱菡薇,女,研究方向为单复分析及其应用、微分方程边值问题,E-mail:644270012@qq. com;**通信作者**:郭国安,男,副教授,博士,E-mail:guoguoan@njupt. edu. cn

网络出版地址:https://link. cnki. net/urlid/50. 1165. n. 20240126. 1426. 002

1 预备知识

首先介绍 β 解析函数基本概念和基本结果[22-23,27]。令 $L=\{t=t(s):0\leqslant s\leqslant d\}$ 是复平面上一条弧长参数为 s、长度为 d 并取逆时针方向的封闭 Lyapunov 曲线，它将整个复平面分成包含原点的有界连通区域 D^+ 和包含无穷远点的无界区域 D^-。记 $H^\mu(L)$ 为 L 上所有指数为 $\mu(0<\mu\leqslant 1)$ 的全体 Hölder 连续函数组成的集合。对于包含原点的一般区域 Ω，$C^{(n)}(\Omega)$ 表示在 Ω 上关于 x,y 具有直到 n 阶连续偏导数的全体复值函数。设常数 β 满足 $0\leqslant\beta<1$。记：

$$\partial_{\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\partial_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)。$$

若 $\varphi\in C^{(1)}(\Omega)$ 满足 Beltrami 方程：

$$\partial_{\bar z}^{\beta}[\varphi](z)=:\left(\partial_{\bar z}-\beta\frac{z}{\bar z}\partial_z\right)[\varphi](z)\equiv 0,\forall z\in\Omega\backslash\{0\},$$

则称 φ 为 Ω 上的 β 解析函数，Ω 上的 β 解析函数全体记为 $H_1^\beta(\Omega)$。

定理 1[22]　(Cauchy-Pompeiu 积分公式)记 $\theta=\dfrac{\beta}{1-\beta}$，$\tau=\eta+\mathrm{i}\zeta$。若 $\varphi\in C^{(1)}(D^+)\cap C(\overline{D^+})$，则：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z\left|\dfrac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\bar\tau}\mathrm{d}\bar\tau\right]-\frac{1}{(1-\beta)\pi}\iint_D\frac{\partial_{\bar\tau}^{\beta}\varphi(\tau)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\tau-z\left|\dfrac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}=\begin{cases}\varphi(z),z\in D^+,\\0,z\in D^-。\end{cases}$$

定理 2[22]　(β 解析函数 Cauchy 积分表示公式)若 $\varphi\in H_1^\beta(D^+)\cap C(\overline{D^+})$，则：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z\left|\dfrac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\bar\tau}\mathrm{d}\bar\tau\right]=\begin{cases}\varphi(z),z\in D^+,\\0,z\in D^-。\end{cases}\tag{1}$$

若 $\varphi\in H_1^\beta(D^-)\cap C(\overline{D^-})$，则：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z\left|\dfrac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\bar\tau}\mathrm{d}\bar\tau\right]=\begin{cases}\varphi(\infty)-\varphi(z),z\in D^-,\\\varphi(\infty),z\in D^+。\end{cases}\tag{2}$$

若 $\varphi\in H^\mu(L)$，由式(1)诱导出如下 β-Cauchy 型积分：

$$C_L^\beta[\varphi](z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z\left|\dfrac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\bar\tau}\mathrm{d}\bar\tau\right],z\notin L,\tag{3}$$

以及 β-Cauchy 奇异积分：

$$S_L^\beta[\varphi](t)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t\left|\dfrac{t}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\bar\tau}\mathrm{d}\bar\tau\right],t\in L。\tag{4}$$

上述奇异积分理解为主值积分。关于两者关系有下述定理。

定理 3[22]　(Plemelj 公式)若 $\varphi\in H^\mu(L)$，则积分 $S_L^\beta[\varphi](t)$ 处处存在且 S_L^β 为 $H^\mu(L)$ 上的有界算子，$C_L^\beta[\varphi](z)$ 的正、负边值 $C_L^\beta[\varphi]^\pm(t)$ 处处存在且满足：

$$C_L^\beta[\varphi]^\pm(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2}S_L^\beta[\varphi](t),t\in L。\tag{5}$$

设 m 为一个正整数，I 为恒等算子，若 k 为非负整数 $k\leqslant m$。迭代算子定义为：

$$\partial_{\bar z^0}^\beta=I,\partial_{\bar z^2}^\beta=\partial_{\bar z}^\beta\circ\partial_{\bar z}^\beta,\partial_{\bar z^k}^\beta=\partial_{\bar z}^\beta(\partial_{\bar z^{k-1}}^\beta)。$$

定义 1　若 $\varphi\in C^{(m)}(\Omega)$ 并满足方程 $\partial_{\bar z^m}^\beta[\varphi](z)=0,z\in\Omega$，则称 φ 为 Ω 上的 m 阶 β 解析函数，Ω 上的 m 阶多 β 解析函数全体记为 $H_m^\beta(\Omega)$。

显然当 $m=1$ 时 $H_1^\beta(\Omega)$ 即为 β 解析函数类[5,21-24]。当 $\beta=0$ 时 $H_m^0(\Omega)$ 就为 m 阶多解析函数类[15]。关于 $H_m^\beta(\Omega)$ 类，有如下分解定理。

定理 4[28-29]　(m 阶多 β 解析函数直和分解定理)$H_m^\beta(\Omega)=H_1^\beta(\Omega)\oplus\bar zH_1^\beta(\Omega)\oplus\cdots\oplus\bar z^{m-1}H_1^\beta(\Omega)$。即对任

意 $W\in H_m^\beta(\Omega)$,唯一存在 m 个函数 $W_k\in H_1^\beta(\Omega)(k=1,2,\cdots,m)$ 使得:

$$W(z)=W_1(z)+\bar{z}W_2(z)+\bar{z}^2W_3(z)+\cdots+\bar{z}^{m-1}W_m(z)。\tag{6}$$

注 1 直和分解式(6)的 $W_k\in H_1^\beta(\Omega)$,称为 m 阶多 β 解析函数 W 的 k 分支。

2 高阶 β 解析函数的积分表示公式

利用多 β 解析函数的积分公式和分解定理,建立 m 阶多 β 解析函数 W 的多种积分表示。为叙述方便,下面总是记 $D^+=D$。基于算子 $\partial_{\bar{z}^m}^\beta$ 的相对复杂性,首先建立如下重要定理。

定理 5 ($C^{(m)}(D)$ 函数类 Cauchy-Pompeiu 积分公式)若 $W\in C^{(m)}(D)\cap C^{(m-1)}(\overline{D})$,$\tau=\eta+\mathrm{i}\zeta$,则:

$$W(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{(\overline{z-\tau})^k\partial_{\bar{\tau}^k}^\beta W(\tau)}{k!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\bar{\tau}}\mathrm{d}\bar{\tau}\right]-$$

$$\frac{1}{(1-\beta)\pi}\iint_D\frac{(\overline{z-\tau})^{m-1}\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{(m-1)!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)},z\in D。\tag{7}$$

证明 若 $\beta=0$ 时 $\partial_{\bar{\tau}^k}^\beta=\partial_{\bar{\tau}}^k$,由 Begehr 等人[12-13]的研究知式(7)显然成立。

因此下面只考虑 $0<\beta<1$ 情形下用数学归纳法对式(7)进行证明。

首先,$m=1$ 时由定理 1 知式(7)成立。

其次,假设式(7)对 $m\in\mathbf{N}^+(m>1)$ 时成立,下证当 $W\in C^{(m+1)}(D)\cap C^{(m)}(\overline{D})$,式(7)对 $m+1$ 时也成立。此时由于 $W\in C^{(m)}(D)\cap C^{(m-1)}(\overline{D})$,这等价于证明:

$$\frac{1}{(1-\beta)\pi}\left\{\iint_D\frac{(\overline{z-\tau})^m\partial_{\bar{\tau}^{m+1}}^\beta W(\tau)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{m!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}-\iint_D\frac{(\overline{z-\tau})^{m-1}\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{(m-1)!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\right\}=$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{(\overline{z-\tau})^m\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)}{m!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\bar{\tau}}\mathrm{d}\bar{\tau}\right]\tag{8}$$

成立。利用求导法则可得如下恒等式:

$$\frac{\varphi(\tau)}{\tau}(\partial_{\bar{\tau}}^\beta\psi(\tau))=\partial_{\bar{\tau}}\left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\psi(\tau)\right)-\beta\partial_\tau\left(\frac{\varphi(\tau)}{\bar{\tau}}\psi(\tau)\right)-\frac{\psi(\tau)}{\tau}(\partial_{\bar{\tau}}^\beta\varphi(\tau))。$$

取定一点 $z\in D$,记 $D_1=\{\tau\in D:|\tau-z|<\varepsilon\}$,$D_2=\{\tau\in D:|\tau|<\varepsilon\}$。选取:

$$\varphi(\tau)=\frac{(\overline{z-\tau})^m\tau|\tau|^{2\theta}}{\tau|\tau|^{2\theta}-z|z|^{2\theta}},\psi(\tau)=\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau),$$

代入上面恒等式后在 $D\backslash\{D_1\cup D_2\}$ 上积分,利用高斯定理[3]并注意到 $z|z|^{2\theta}\in H_1^\beta(C)$,得到:

$$\frac{1}{(1-\beta)\pi}\iint_{D\backslash\{D_1\cup D_2\}}\frac{(\overline{z-\tau})^m\partial_{\bar{\tau}^{m+1}}^\beta W(\tau)}{m!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=$$

$$\frac{1}{(1-\beta)\pi}\iint_{D\backslash\{D_1\cup D_2\}}\left\{\partial_{\bar{\tau}}\left[\frac{(\overline{z-\tau})^m\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)}{m!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\right]-\beta\partial_\tau\left[\frac{(\overline{z-\tau})^m\tau|\tau|^{2\theta}\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)}{\bar{\tau}m!(\tau|\tau|^{2\theta}-z|z|^{2\theta})}\right]-\right.$$

$$\left.\frac{\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)}{\tau}\partial_{\bar{\tau}}^\beta\left[\frac{(\overline{z-\tau})^m\tau|\tau|^{2\theta}}{m!(\tau|\tau|^{2\theta}-z|z|^{2\theta})}\right]\right\}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=$$

$$\frac{1}{(1-\beta)\pi}\left\{\int_{L\backslash\{\partial D_1\cup\partial D_2\}}\left\{\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{(\overline{z-\tau})^m\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)}{m!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\mathrm{d}\tau+\frac{\beta}{2\mathrm{i}}\frac{\tau}{\bar{\tau}}\frac{(\overline{z-\tau})^m|\tau|^{2\theta}\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)}{m!(\tau|\tau|^{2\theta}-z|z|^{2\theta})}\mathrm{d}\bar{\tau}\right\}+\right.$$

$$\left.\iint_{D\backslash\{D_1\cup D_2\}}\frac{(\overline{z-\tau})^{m-1}|\tau|^{2\theta}\partial_{\bar{\tau}^m}^\beta W(\tau)}{(m-1)!(\tau|\tau|^{2\theta}-z|z|^{2\theta})}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\right\}。$$

从 Blaya 等人[22]及 Guo 等人[28-29]的研究知，存在正常数 c_1，c_2 及 z 的一个去心邻域 $U(z)$ 使得：

$$c_1|\tau-z|\leqslant|\tau|\tau|^{2\theta}-z|z|^{2\theta}|\leqslant c_2|\tau-z|,\forall\tau\in U(z)。$$

由 $m>1$ 及 $\beta>0$ 可知 $j=1,2$ 均有：

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\partial D_j}\frac{(\overline{z-\tau})^m\ |\tau|^{2\theta}\partial_{\overline{\tau}^m}^{\beta}W(\tau)}{m!\ (\tau|\tau|^{2\theta}-z|z|^{2\theta})}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]=0。$$

因此，对上面简化后等式两边同取极限 $\varepsilon\to0^+$ 后蕴含式(8)成立。　　证毕

注 2　定理 5 采用不同于文献[13]的证明方法，利用归纳和构造法首次证明了 $C^{(m)}(D)$ 函数类 Cauchy-Pompeiu 积分公式，结果推广了文献[12-13，17，22-24]中的积分表示结论，例如：当 $\beta=0$ 时，式(7)变为文献[12-13]中的表达式；当 $\beta=0$，$\partial_{\overline{\tau}}^{m}W(\tau)\equiv0$ 时，式(7)变为 m 阶多解析函数表达式[17]；当 $m=1$，$\partial_{\overline{\tau}}^{\beta}W(\tau)\equiv0$ 时，式(7)变成 β 解析函数的 Cauchy 积分表达式[22-24]。

由定理 5，直接得到下述定理。

定理 6　(有界区域上的 m 阶多 β 解析函数 Cauchy 积分公式)若 $W\in H_m^{\beta}(D)\cap C^{(m-1)}(\overline{D})$，则：

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{(\overline{z-\tau})^k\partial_{\overline{\tau}^k}^{\beta}W(\tau)}{k!\ \left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]=W(z),z\in D。\tag{9}$$

定理 6 分别诱导出如下多 β-Cauchy 型积分、多 β-Cauchy 奇异积分：

$$C_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](z)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{(\overline{z-\tau})^kf_k(\tau)}{k!\ \left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right],z\notin L,$$

$$S_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{(\overline{t-\tau})^kf_k(\tau)}{k!\ \left(\tau-t\left|\frac{t}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right],t\in L。$$

显然 $m=1$ 时，上面积分分别退化为标量情形下的式(3)、(4)所定义的 β-Cauchy 型积分、β-Cauchy 奇异积分。作为推广，下面建立如下多 β-Cauchy 型积分的 Plemelj 公式。

定理 7　(多 β-Cauchy 型积分的 Plemelj 公式)若 $f_j\in H^{\mu}(L)(0\leqslant j\leqslant m-1)$，则多 β-Cauchy 奇异积分 $S_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](t)$ 在 L 上处处存在，$\lim\limits_{z\in D^{\pm}\to t}C_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](z)=C_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}]^{\pm}(t)$ 也存在，且

$$C_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}]^{\pm}(t)=\frac{1}{2}[S_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](t)\pm f_0(t)],t\in L。\tag{10}$$

更一般地，当 $0\leqslant j\leqslant m-1$ 时有

$$[\partial_{\overline{z}^j}^{\beta}(C_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](z))]^{\pm}(t)=\frac{1}{2}[S_L^{\beta}[f_j,f_{j+1},\cdots,f_{m-1},0,0,\cdots,0](t)\pm f_j(t)],t\in L。\tag{11}$$

证明　存在性结论由定理 3 显而易见。由式(3)并结合牛顿二项式展开定理，得到：

$$C_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](z)=C_L^{\beta}[f_0](z)+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=0}^{k}\frac{C_k^p(-1)^{k-p}}{k!}\overline{z}^pC_L^{\beta}[\overline{\tau}^{k-p}f_k(\tau)](z)。$$

再由定理 3，将上式两边取正、负边值得：

$$\begin{aligned}\text{左边}=&\pm\frac{1}{2}f_0(t)+\frac{1}{2}S_L^{\beta}[f_0](t)+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=0}^{k}\frac{C_k^p(-1)^{k-p}}{k!}\overline{t}^p\left[\pm\frac{\overline{t}^{k-p}f_k(t)}{2}+\frac{S_L^{\beta}[\overline{\tau}^{k-p}f_k(\tau)](t)}{2}\right]=\\&\frac{1}{2}[S_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](t)\pm f_0(t)]+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\overline{t}^kf_k(t)\sum_{p=0}^{k}\frac{C_k^p(-1)^{k-p}}{k!}=\\&\frac{1}{2}[S_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](t)\pm f_0(t)]+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\overline{t}^kf_k(t)(1-1)^k=\text{右边}。\end{aligned}$$

由此证明式(10)成立。又因为：

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{z}^j}^{\beta}(C_L^{\beta}[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}](z))=&\sum_{p=0}^{m-j-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{(\overline{z-\tau})^pf_{p+j}(\tau)}{p!\ \left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]=\\&C_L^{\beta}[f_j,f_{j+1},\cdots,f_{m-1},0,0,\cdots,0](z),\end{aligned}$$

所以根据已证明的 Plemelj 公式,即式(10),结合上式即可证明式(11)成立。 证毕

前面建立多种高阶多 β 解析函数的积分表示,在求解多种复微分方程边值问题中具有较好的应用价值[1-3,25,28],然而这些积分表示都属于不带平移的积分表示,不便研究带平移边值问题,为此,需要给出一类新的带平移积分表示。

设 α 是 L 上的一个正 Carleman 平移,即 α 是 L 到自身的保持方向的同胚映射,同时在 L 上满足 $\alpha(\alpha(t))=t$,$\alpha'(t)\neq 0$ 并且 $\alpha'\in H^{\mu}(L)$。设点 $\tau\in L$ 关于弧长 s 的参数为 $\tau=\tau(s)$。

令 $K(\tau,t)=\dfrac{(\alpha'(\tau)+\beta\tau\overline{\tau}^{-1})\overline{\alpha'(\tau)\tau'^{2}(s)}}{\alpha(\tau)-\alpha(t)\left|\dfrac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\right|^{2\theta}}-\dfrac{\tau\overline{\tau'^{2}(s)}+\beta\overline{\tau}}{\tau\left(\overline{\tau}-\overline{t}\left|\dfrac{t}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}$,$\tau\neq t$。由文献[28]知,核 $K(\tau,t)$ 具有弱奇异性特征 $|K(\tau,t)|\leqslant M|\tau-t|^{\mu-1}$,$\forall\tau\in U^{0}(t)$。

记 $K_{+}[\varphi](t)\equiv\varphi(t)+\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\displaystyle\int_{L}K(\tau,t)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=0,t\in L$。

定理 8 (高阶 β 解析函数带 Carleman 平移的积分表示)设 Carleman 平移 $\alpha(t)$ 和算子 K_{+} 如上所定义。若对每个 $k(0\leqslant k\leqslant m-1)$ 都有 $W\in H_{m}^{\beta}(D^{+})\cap C^{(m-1)}(\overline{D^{+}})$ 且正边值 $\partial_{\overline{z}^{k}}^{\beta}[W]^{+}(t)\in H^{\mu}(L)$。则存在唯一的一组 $\rho_{k}\in H^{\mu}(L)$ 使得:

$$W(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{z}^{k-1}}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_{L}\frac{\rho_{k}(\alpha(\tau))}{\tau-z\left|\dfrac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]+\sum_{k=1}^{m}\gamma_{k}\overline{z}^{k-1},z\in D^{+}。$$

此处 ρ_{k} 是 Fredholm 积分方程

$$K_{+}[\rho_{k}](t)=\sum_{j=k}^{m}\frac{(-1)^{j+k}}{(j-k)!\ (k-1)!}[\partial_{\overline{z}^{j-1}}^{\beta}[W]^{+}(\alpha(t))\overline{\alpha(t)}^{j-k}-\overline{\partial_{\overline{z}^{j-1}}^{\beta}[W]^{+}(t)t^{j-k}}]$$

满足条件 $\rho_{k}(t)+\overline{\rho_{k}(\alpha(t))}=0$ 下的唯一解,γ_{k} 是由边值 $\partial_{\overline{z}^{k-1}}^{\beta}[W]^{+}(t)(1\leqslant k\leqslant m)$ 唯一确定的实常数。

证明 因为 $W\in H_{m}^{\beta}(D^{+})\cap C^{(m-1)}(\overline{D^{+}})$,故由直和分解定理 4 知存在 m 个 k 分支函数 $W_{k}\in H_{1}^{\beta}(D^{+})(k=1,2,\cdots,m)$,使得 $W(z)=W_{1}(z)+\overline{z}W_{2}(z)+\overline{z}^{2}W_{3}(z)+\cdots+\overline{z}^{m-1}W_{m}(z)$。

对上面等式两边同作运算 $\partial_{\overline{z}^{p}}^{\beta}(0\leqslant p\leqslant m-1)$ 后得到如下方程组:

$$\partial_{\overline{z}^{p}}^{\beta}[W](z)=\sum_{k=p}^{m-1}k(k-1)\cdots(k-p+1)W_{k}(z)\overline{z}^{k-p}。$$

令

$$\boldsymbol{G}(z)=\begin{bmatrix}W_{1}\\W_{2}\\\vdots\\W_{m}\end{bmatrix}(z),\boldsymbol{H}(z)=\begin{bmatrix}W\\\partial_{\overline{z}}^{\beta}W\\\vdots\\\partial_{\overline{z}^{m-1}}^{\beta}W\end{bmatrix}(z),$$

则上述方程组可写为向量形式:$\boldsymbol{C}(z)\boldsymbol{G}(z)=\boldsymbol{H}(z)$,这里 $\boldsymbol{C}(z)=\{c_{r,k}(z)\}_{m\times m}$,其中:

$$c_{r,k}(z)=\begin{cases}\dfrac{(k-1)!}{(k-r)!}\overline{z}^{k-r},k\geqslant r,\\0,k<r。\end{cases}$$

注意到 $\boldsymbol{C}(z)$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{C}^{-1}(z)=\{b_{k,j}(z)\}_{m\times m}$,其中:

$$b_{k,j}(z)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{j+k}}{(j-k)!\ (k-1)!}\overline{z}^{j-k},j\geqslant k,\\0,j<k。\end{cases}$$

因此

$$W_{j}(z)=\sum_{k=j}^{m}\frac{(-1)^{j+k}}{(k-j)!\ (j-1)!}\overline{z}^{k-j}\partial_{\overline{z}^{k-1}}^{\beta}[W](z)。\tag{12}$$

由于 $W_{k}(z)\in H_{1}^{\beta}(D^{+})$,故由文献[28]中的定理 3.2 知存在一组唯一的 $\rho_{k}\in H^{\mu}(L)$ 使得:

$$W_k(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L \frac{\rho_k(\alpha(\tau))}{\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]+\gamma_k, z\in D^+,$$

其中：ρ_k 是 Fredholm 积分方程 $K_+[\rho_k](t)=W_k^+(\alpha(t))-\overline{W_R^+(t)}$ 在满足条件 $\rho_k(t)+\overline{\rho_k(\alpha(t))}=0$ 下的唯一解，γ_k 是由 $W_k(z)$ 确定的唯一实常数，根据式(12)可知完全由 $\partial^{\beta}_{\overline{z}^{k-1}}[W](z)$ 确定，代入后积分方程即为：

$$K_+[\rho_k](t)=\sum_{j=k}^{m}\frac{(-1)^{j+k}}{(j-k)!\ (k-1)!}\left[\partial^{\beta}_{\overline{z}^{j-1}}[W]^+(\alpha(t))\overline{\alpha(t)}^{j-k}-\overline{\partial^{\beta}_{\overline{z}^{j-1}}[W]^+(t)t^{j-k}}\right]。$$

最后，将 $W_k(z)$ 表达式代入直和分解式，即得证明。　　证毕

注 3　定理 8 给出了 m 阶 β 解析函数带 Carleman 平移的积分表示，这是一个全新的积分表示，它不仅推广了文献[28]中定理 3.2、文献[1]中定理 13.2 和文献[2-3]中古典带平移积分表示的结论，而且凭此积分表示式能解决 m 阶 β 解析函数带平移的 Haseman 边值问题[1-3,28-29]。此外，证明中所得到的式(12)给出了 $W(z)\in H_m^{\beta}(D^+)\cap C^{(m-1)}(\overline{D^+})$ 的每个 k 分支 $W_k(\xi)\in H_1^{\beta}(D^+)$ 的计算公式。事实上，利用式(12)并结合式(6)和 Cauchy 积分表示式(9)，进而得到下面这一有用的结论。

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{\overline{z}^k W_{k+1}(\tau)}{k!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]=$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{(\overline{z-\tau})^k\partial^{\beta}_{\overline{\tau}^k}W(\tau)}{k!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right], z\in D^+。\tag{13}$$

类似地，将式(12)代入上式左边的 $W_{k+1}(\tau)$ 中计算化简也可证式(13)对于 $z\in D^-$ 仍然成立，或从右边出发利用 $(\overline{z-\tau})^k$ 的二项式展开定理也可证明式(13)对于 $z\in D^-$ 成立。

定理 9　(无界区域上的 m 阶多 β 解析函数 Cauchy 积分公式)若 $W\in H_m^{\beta}(D^-)\cap C^{(m-1)}(\overline{D^-})$ 且 $W(z)$ 的每个 β 分支 $W_k(z)\in H_1^{\beta}(D^-)$ 在无穷远处有限，则：

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{(\overline{z-\tau})^k\partial^{\beta}_{\overline{\tau}^k}W(\tau)}{k!\left(\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}\right)}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}W_k(\infty)\overline{z}^k-W(z), z\in D^-,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}W_k(\infty)\overline{z}^k, z\notin\overline{D^-}。\end{cases}\tag{14}$$

证明　由一阶 β 解析函数的 Cauchy 积分公式(2)得：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{W_{k+1}(\tau)}{\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]=\begin{cases}W_{k+1}(\infty)-W_{k+1}(z), z\in D^-,\\ W_{k+1}(\infty), z\in D^+。\end{cases}$$

由此得到：

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\overline{z}^k}{2\pi\mathrm{i}(1-\beta)}\int_L\frac{W_{k+1}(\tau)}{\tau-z\left|\frac{z}{\tau}\right|^{2\theta}}\left[\mathrm{d}\tau+\beta\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{d}\overline{\tau}\right]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}(W_{k+1}(\infty)-W_{k+1}(z))\overline{z}^k, z\in D^-,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}W_{k+1}(\infty)\overline{z}^k, z\in D^+。\end{cases}$$

再由直和分解式(6)及注 3 即证明式(14)。　　证毕

下面给出多 β-Cauchy 型积分的 Plemelj 公式在求解一类黎曼跳跃问题(简称 RJ 问题)中的应用。

RJ 问题：设已知函数 $g_j\in H^{\mu}(L)(0\leqslant j\leqslant m-1)$，求函数 $\Phi\in H_m^{\beta}(D^+\cup D^-)$，它从 L 的内、外两侧 Hölder 连续到边界，且对于 $k=1,2,\cdots,m$，满足边值条件：

$$\begin{cases}[\partial^{\beta}_{\overline{z}^{k-1}}\Phi]^+(t)-[\partial^{\beta}_{\overline{z}^{k-1}}\Phi]^-(t)=g_{k-1}(t), t\in L,\\ \displaystyle\lim_{z\to\infty}\sum_{j=k}^{m}\frac{(-1)^{j+k}}{(j-k)!\ (k-1)!}\overline{z}^{j-k}\partial^{\beta}_{\overline{z}^{j-1}}\{\Phi-C_L^{\beta}[g_0,g_1,\cdots,g_{m-1}]\}(z)=0。\end{cases}\tag{15}$$

若记 $\psi(z)=C_L^{\beta}[g_0,g_1,\cdots,g_{m-1}](z), z\notin L$，则 $\psi\in H_m^{\beta}(D^+\cup D^-)$ 且 $\psi(\infty)=0$。由定理 7 知：

$$[\partial^{\beta}_{\overline{z}^k}(C_L^{\beta}[g_0,g_1,\cdots,g_{m-1}](z))]^+(t)-[\partial^{\beta}_{\overline{z}^k}(C_L^{\beta}[g_0,g_1,\cdots,g_{m-1}](z))]^-(t)=g_k(t)。$$

令

$$W(z)=\Phi(z)-C_L^{\beta}[g_0,g_1,\cdots,g_{m-1}](z),z\in D^+\cup D^-,$$

则对于$k=0,1,\cdots,m-1$,都有$[\partial_{\bar{z}^k}^{\beta}W]^+(t)=[\partial_{\bar{z}^k}^{\beta}W]^-(t),t\in L$,由$\beta$解析延拓得知$W\in H_m^{\beta}(C)$,根据多$\beta$解析函数分解定理4知$W(z)=W_1(z)+\bar{z}W_2(z)+\bar{z}^2W_3(z)+\cdots+\bar{z}^{m-1}W_m(z),W_k\in H_1^{\beta}(C)$。又由式(15)的第2条件及式(12)可知,$W(z)$的$k$分支$W_k(\infty)=0,k=1,2,\cdots,m$。根据一阶$\beta$解析函数的刘维尔定理[22]可以得到$W_k\equiv 0$,从而$W\equiv 0$。因此上述RJ问题的唯一解为:

$$\Phi(z)=C_L^{\beta}[g_0,g_1,\cdots,g_{m-1}](z),z\notin L。$$

因此命题RJ问题,即式(15)的一般解为$\Phi(z)=C_L^{\beta}[g_0,g_1,\cdots,g_{m-1}](z)$。

注4 命题推广了Begehr等人的跳跃边值问题研究结果。例如:当$m=1$时RJ问题(15)变为一阶β解析函数跳跃问题[22];当$\beta=0$时,RJ问题(15)本质上退化为R_{-1}类中m阶多解析函数跳跃问题[12-13]。

3 结束语

针对近期广泛研究的一阶β解析函数类,本文建立了$C^{(m)}(D)$函数类带高阶β-Cauchy核的Cauchy-Pompeiu公式,基于此公式建立了高阶多β解析函数的多种不同类型的积分表示,及刻画高阶多β-Cauchy型积分与多β-Cauchy奇异积分之间关系的Plemelj公式和它在黎曼跳跃问题中的应用。本文系统地建立和总结了高阶多β解析函数积分表示理论,进一步拓展和丰富了积分表示理论,主要结果不仅推广了古典积分表示[1-3],也推广了Begehr、Blaya、Reyes等人建立的积分表示及应用[12-13,21-22,28-29],而且为后续研究高阶多β解析函数的带Carleman平移的边值问题提供了较好的理论支撑[1,28]。此外,利用这些积分表示能推广到Reyes等人[24]研究中得到更一般高阶多β-Cauchy奇异积分的Poincaré-Beltrand公式、高阶多β解析函数的Schwartz表示及它的Poisson型积分表示,但因篇幅所限制故不在本文讨论范围内。

参考文献:

[1] LITVINCHUK G S. Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shifts[M]. London: Kluwer Academic Publishers,2004.

[2] LU J K. Boundary value problems for analytic functions[M]. Singapore:World Scientific Publication,2004.

[3] BEGEHR H. Complex analytic methods for partial differential equations:an introductory text[M]. Singapore:World Scientific Publication,1994.

[4] LIU H. A note about Riemann boundary value problems on non-rectifiable curves[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2007,52(10/11):877-882.

[5] BlAYA R A,REYES J B,VILAIRE J M. A jump problem for β-analytic functions in domains with fractal boundaries[J]. Revista Matematica Complutense,2010,23(1):105-111.

[6] RYAZANOV V. On Hilbert and Riemann problems for generalized analytic functions and applications[J]. Analysis and Mathematical Physics,2021,11(5):1-18.

[7] REYES J B,BLAYA R A,PÉREZ-DE LA ROSA M A,et al. On the Hilbert formulas on the unit circle for α-hyperholomorphic function theory[J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2018,63(11):1509-1528.

[8] LI P R,REN G B. Solvability of singular integro-differential equations via Riemann-Hilbert problem[J]. Journal of Differential Equations,2018,265(11):5455-5471.

[9] ZHOU X L,HE F L. On compound Riemann-Hilbert boundary value problem in the framework of variable exponent spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2021,496(1):1-18.

[10] VEKUA I N. Generalized analytic functions[M]. Oxford:Pergamon Press,1962.

[11] BARATCHART L,LEBLOND J,RIGAT S,et al. Hardy space of the conjugate Beltrami equation[J]. Journal of Functional Analysis,2010,259(2):384-427.

[12] BEGEHR H. Integral representations in complex,hypercomplex and Clifford analysis[J]. Integral Transforms and Special Functions,2002,13:223-241.

[13] BEGEHR H,HILE G N. A hierarchy of integral operators[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics,1997,27:669-706.

[14] BEGEHR H,SHUPEYEVA B. Polyanalytic boundary value problems for planar domains with harmonic Green function[J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2021,37(11):1-22.

[15] AKEL M,BEGEHR H,MOHAMMED A. Integral representations in the complex plane and iterated boundary value problems [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics,2022,52(2):101-132.

[16] DU Z H. Higher order Poisson kernels and L(p) polyharmonic boundary value problems in Lipschitz domains[J]. Science China Mathematics,2020,63(6):1065-1106.

[17] BALK M B. Polyanalytic functions[M]. Berlin:Akademie Verlag,2001.

[18] WANG Y,KU M,ZHENG B. Single periodic Riemann problems for null-solutions to polynomially Cauchy-Riemann equations [J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2018,63(6):749-769.

[19] WANG Y F,HAN P J,WANG Y J. On Riemann problem of automorphic polyanalytic functions connected with a rotation group[J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2015,60(8):1033-1057.

[20] BLAYA R A,TORANZO L D. Polyanalytic Hardy decomposition of higher order Lipschitz classes[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2021,493(2):1-10.

[21] REYES J B,BLAYA R A,PEREZ-DE LA ROSA M A,et al. Hilbert and Poincaré-Bertrand formulas in polyanalytic function theory involving higher order Lipschitz classes[J]. Complex Analysis and Operator Theory,2021,15(5):1-13.

[22] BlAYA R A, REYES J B, PENA D P. On the jump problem for β-analytic functions[J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2006,51(8/9/10/11):763-775.

[23] BlAYA R A,REYES J B,PENA D P,et al. Riemann boundary value problem for β-analytic functions[J]. Internatinal Journal of Pure Applied Mathematics,2008,42(1):19-37.

[24] REYES J B,BLAYA R A,PEREZ-DE LA ROSA M A,et al. Integral formulas of the Hilbert,Poincaré-Beltrand,Schwartz and Poisson type for the β-analytic function theory[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2020,492(2):1-17.

[25] REYES J B, BARSEGHYAN D, SCHNEIDER B. Dirichlet-Type problems for certain Beltrami equations[J]. Mediterranean Journal of Mathematics,2021,103(18):1-15.

[26] KATZ D B, KATS B A. Integral representations for solutions of some types of the Beltrami Equations [J]. Russian Mathematics,2018,62(3):18-22.

[27] KATZ D B, KATS B A. Riemann boundary value problems on non-rectifiable curves for certain Beltrami equation [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2018,41(8):2507-2514.

[28] GUO G A,ZHANG S. Riemann-Hilbert problems with Carleman shift and conjugation for polynomial Beltrami equations[J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2020,65(11):1919-1937.

[29] GUO G A,JIN C K,DANG P,et al. Riemann-Hilbert problems with shift on the Lyapunov curve for null-solutions of iterated Beltrami equations[J]. Boundary Value Problems,2019,98:1-34.

Integral Representations for Generalized Poly-Analytic Functions and its Application

QIAN Hanwei, GUO Guoan, LI Xiaoyu

(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: On account of integral representations regarded as the basic theory of complex analysis and a significant tool for solving boundary value problems, integral representations for a class of broader generalized poly-analytic functions are proposed and established. By using decomposition theorem and Cauchy-Pompeiu formula of generalizedβ-analytic functions, together with matrix transformation and the theory of Fredholm integral equations, various integral representations are investigated. Various integral representations including with shift and without shift are obtained, the extension theorem of higher order poly- Cauchy type integral is proved, and the application in solving a class of Riemann jump problems is also provided. Several types of integral representations for a class of generalized poly-analytic function are established, which extend and generalize the integral representation theory of analytic functions, especially poly-analytic functions, and also provide theoretical support for the research on boundary value problems and singular integral operators related to β-analytic functions in the future.

Keywords: Beltrami equation; generalizedβ-analytic functions; Cauchy integral formula with higher order; integral representations; Cauchy integral operator with higher order

(责任编辑　黄　颖)