运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20240108

基于生存理论的两类博弈模型*

王能发[1,2]，杨　哲[3]，刘自鑫[1,2]

(1. 贵州财经大学 数学与统计学院；2. 贵州省大数据统计分析重点实验室，贵阳 550025；
3. 上海财经大学 经济学院，上海 200433)

摘要:研究基于生存理论的两类博弈模型(非合作博弈与合作博弈模型)及平衡的存在性。将生存理论思想植入到非合作博弈与合作博弈模型中,构建两类新的博弈模型,并给出新模型的非合作博弈强(弱)平衡和合作博弈强(弱)平衡定义。在满足一定的条件下,得到强(弱)平衡的 4 个存在性定理。这一工作在理论上拓宽了博弈论的研究范畴,具有一定的现实意义。

关键词:博弈模型;生存理论;强平衡;弱平衡

中图分类号:O225　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2024)01-0001-07

平衡的存在性问题是博弈论研究的首要问题,在确保平衡点存在的前提下,研究平衡点集的稳定性、平衡点的计算等其他问题才是有意义的。Nash[1]在研究有限非合作博弈问题时,首先证明了平衡的存在性。随着博弈论的快速发展,非合作博弈已经成为经济与管理等问题的重要研究工具[2]。此外,为了分析参与人之间的合作行为,合作博弈以及若干合作解的概念也被提出。合作博弈大都基于特征函数形式,可以分为传递效用型(transferable utility, TU)与非传递效用型(nontransferable utility, NTU)。Bondareva[3]和 Shapley[4]分别给出了传递效用合作博弈中传递效用核的存在性定理。值得注意的是,非合作博弈重点分析平衡的形成,合作博弈则更多关注联盟中利益的分配。Aumann[5]基于合作思想提出了策略型博弈中合作平衡的概念,Scarf[6]则利用 NTU 核存在性定理[7]证明了相应的存在性定理。之后,Border[8]和 Kajii[9]把 Scarf[6]这一工作推广到具有非序偏好的广义博弈中。文献[1,3-9]分别为非合作博弈平衡和合作博弈平衡的研究提供了基本理论框架。

事实上,各经济体之间往往既有竞争又有合作,也即既是非合作又是合作。因此,Brandenburger 等人[10]提出了非合作-合作两型博弈;南江霞等人[11]引入了基于 CIS 值的非合作-合作两型博弈框架,还研究了非合作-合作两型博弈的 Shapley 值纯策略纳什均衡解的求解方法[12];王能发等人[13]在集值支付博弈中引入合作因素,给出强 Nash 均衡概念,分别从非传递效用和可传递效用得到强 Nash 非传递效用平衡和强 Nash 可传递效用 c^*-平衡的存在性定理。文献[10-13]为本文提供了基本的研究思路。

以上模型都是基于静态结构,而很多事物和系统是发展变化的,生存理论可以更好地刻画事物的发展。具体来说,生存理论主要用于分析各种系统的演化,研究对象一般为动态问题,通常用微分方程来描述确定的演化系统。然而,现实中系统往往存在不确定性,决策人在很多情况下不是完全理性的,因此,演化方向不唯一,而是位于一个可行区域,此时则可使用微分包含进行描述。值得注意的是,虽然系统的演化具有不确定性,但并非毫无规则,所以演化受生存约束。系统中的状态变量必须处于生存集内(或者生存域内),系统才是可行的。于是研究各种模型的生存性成为近些年的一个热点。Aubin 等人[14]系统地给出了生存理论的研究工具即微分包含;Aubin[15-17]系统地阐述了生存理论,并分析了微分博弈和若干经济问题[16];郑丕谔等人[18]利用生存理论分析了股票系统的演化与调控;许跟起[19]研究了 Banach 空间微分包含在闭集上的存在性;叶明确等人[20-22]对生存理论进行了系统的研究,并分析了复杂系统的生存决策与生存可达决策;刘磊等人[23]将生存理论应用于轮式移动机器人的反应式避障控制;韩艳丽等人[24]基于生存性理论研究了线性微分博弈系统的有界多面体的识别域问题。

* **收稿日期**:2022-12-20　**修回日期**:2023-12-25　**网络出版时间**:2023-10-07T14:53

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 72371146;No. 62062018);贵州财经大学创新探索及学术新苗项目(No. 2022XSXMB22);贵州省大数据统计分析重点实验室(黔科合平台人才[2019]5103);贵州省高层次创新型人才项目(黔科合平台人才-GCC[2022]020-1)

第一作者简介:王能发,男,副教授,博士,研究方向为非线性分析、博弈论、数理经济学等,E-mail:nengfa_wang@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20231006.1608.002

由此可以看出,生存理论主要用于分析动态系统在生存集下的存在性、可达性以及应用等问题。

本文将生存理论思想植入到非合作与合作博弈模型中,建立了2类新的博弈模型,并给出了这2类博弈模型的强(弱)平衡定义,进一步证明它们的存在性。创新之处在于把生存理论融入到经典的博弈模型,分别研究了非合作博弈和合作博弈2类模型的平衡存在性。

1 预备知识

下面先介绍本文将用到的几个重要的概念和结论[25]。

设 X,Y 为2个 Hausdorff 拓扑线性空间,集值映射 $F:X\to 2^Y$ 是上半连续的,则以下2个结论等价:

1) 如果对任意固定 $x\in X$,Y 中任意开集 U,$F(x)\subset U$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使得 $F(x')\subset U$,$\forall x'\in O(x)$;

2) 如果任意网 $\{(x^\alpha,y^\alpha)\in X\times Y\}$,满足 $y^\alpha\in F(x^\alpha)$,$x^\alpha\to x$,则存在子网 $\{y^{\alpha_\lambda}\}$,使得 $y^{\alpha_\lambda}\to y\in F(x)$。

设 X,Y 为2个 Hausdorff 拓扑线性空间,集值映射 $F:X\to 2^Y$ 是下半连续的,则以下2个结论等价:

1) 如果对任意固定 $x\in X$,Y 中任意开集 U,$F(x)\cap U\neq\varnothing$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使得 $F(x')\cap U\neq\varnothing$,$\forall x'\in O(x)$;

2) 如果任意网 $\{x^\alpha\in X\}$,任意 $y\in F(x)$,$x^\alpha\to x$,那么存在网 $\{y^\alpha\}$,使得 $y^\alpha\to y$,$y^\alpha\in F(x^\alpha)$。

如果集值映射 $F:X\to 2^Y$ 既上半连续又下半连续,则称 F 连续。

称集值映射 $F:X\to 2^Y$ 是集值拟凸的,如果对任意 $x_1,x_2\in X$,任意 $t\in[0,1]$,有 $F(tx_1+(1-t)x_2)\subset F(x_1)$,或 $F(tx_1+(1-t)x_2)\subset F(x_2)$。

称集值映射 $F:X\to 2^Y$ 是集值拟凹的,如果对任意 $x_1,x_2\in X$,任意 $t\in[0,1]$,有 $F(x_1)\subset F(tx_1+(1-t)x_2)$,或 $F(x_2)\subset F(tx_1+(1-t)x_2)$。

引理1[25] 设 X 为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中的一个非空凸紧子集,集值映射 $F:X\to 2^X$ 为上半连续且具有非空凸紧值,那么存在 $x^*\in X$,使得 $x^*\in F(x^*)$。

引理2[25] 设 X,Y 为2个 Hausdorff 拓扑空间,且 Y 是紧的,如果集值映射 $F:X\to 2^X$ 具有闭图,那么 F 为上半连续且具有紧值。

2 基于生存理论的非合作博弈模型

本节建立基于生存理论的非合作博弈模型,并定义非合作博弈平衡解和证明该解的存在性。

一个经典的规范型博弈可表示为 $\Gamma=(X_i,u_i)_{i\in N}$,其中:$N=\{1,\cdots,n\}$ 为参与人集合,X_i 为参与人 i 的策略集。设 $X=\prod_{i\in N}X_i$,$X_{-i}=\prod_{j\in N\setminus\{i\}}X_j$;$u_i:X\to\mathbf{R}$ 为参与人 i 的支付函数,如果 $x^*\in X$ 满足:

$$u_i(x_i^*,x_{-i}^*)=\max_{y_i\in X_i}u_i(y_i,x_{-i}^*),\ \forall i\in N,$$

则称 x^* 为 Γ 的 Nash 平衡。

由于博弈中的每一个参与人不一定均完全理性,在一个策略组合 $x^*=(x_i^*,x_{-i}^*)$ 下,参与人 i 得到的支付不再是上述经典的规范型博弈中一个具体的数值 $u_i(x_i^*,x_{-i}^*)$,而是一个集合,记为 $F_i(x^*)$。下面建立具体模型并给出相关定义和主要结论。

设 $N=\{1,\cdots,n\}$ 为参与人集合,对任意的 $i\in N$,参与人 i 的策略集为 X_i,可行策略映射为 $G_i:X\to 2^{X_i}$。当参与人 i 选取策略 $x_i\in X_i$ 时,得到一个策略组合 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$。此时,参与人 i 就得到一个生存度 $F_i(x)\subset V$,其中 V 为生存度空间,$F_i(x)$ 是一个集值映射,而不是单点。$F_i(x)$ 体现了生存理论中的不确定思想。又假设参与人 i 的生存集为 $K_i\subset V$,则基于生存理论的非合作博弈可以描述为 $\Gamma=(N,(G_i,F_i,K_i,X_i)_{i\in N})$。

定义1 对任意的 $i\in N$,$x_i^*\in G_i(x^*)$,$F_i(x^*)\subset K_i$,则称策略组合 $x^*\in X$ 为博弈 Γ 的非合作强平衡。

定义2 对任意的 $i\in N$,$x_i^*\in G_i(x^*)$,$F_i(x^*)\cap K_i\neq\varnothing$,则称策略组合 $x^*\in X$ 为博弈 Γ 的非合作弱平衡。

注1 无论是非合作强平衡还是非合作弱平衡,它们都是每一个参与人的可行策略。非合作强平衡对应的

生存度全部位于生存集中；而非合作弱平衡对应的生存度函数只需与生存集有交集。明显地，非合作强平衡也是弱平衡。

下面给出上述平衡解的存在性条件并证明。

定理 1　假设基于生存理论的博弈 $\Gamma=(N,(G_i,F_i,K_i,X_i)_{i\in N})$满足如下条件：

1）对任意的 $i\in N$，X_i 为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间 E_i 中的一个非空凸紧子集；

2）对任意的 $i\in N$，K_i 为 Hausdorff 拓扑线性空间 V 中的一个非空闭子集；

3）对任意的 $i\in N$，G_i 为上半连续且有非空凸紧值；

4）对任意的 $i\in N$，$F_i:X\rightarrow 2^V$ 为下半连续的集值映射，而且对任意的 $x_{-i}\in X_{-i}$，$F_i(\cdot,x_{-i})$为集值拟凸的；

5）博弈 Γ 具有强一致性质，即对任意的 $x\in X$，存在 $z\in X$，使得对任意的 $x\in X$，$z_i\in G_i(x)$，$F_i(z_i,x_{-i})\subset K_i$。

那么博弈 Γ 存在一个非合作强平衡。

证明　定义集值映射 $T:X\rightarrow 2^X$：$T(x)=\prod_{i\in N}T_i(x)$，$T_i(x)=\{z_i\in G_i(x)\mid F_i(z_i,x_{-i})\subset K_i\}$，$\forall x\in X$。

明显地，由条件 5)可知，对任意的 $x\in X$，$T(x)$非空。

对任意 $i\in N$，任意 $x\in X$，任意 $z_i^1,z_i^2\in T_i(x)$，以及任意 $t\in[0,1]$，有 $z_i^1,z_i^2\in G_i(x)$，$F_i(z_i^1,x_{-i})\subset K_i$，$F_i(z_i^2,x_{-i})\subset K_i$，由条件 3)可知，$G_i(x)$为凸的，则有 $tz_i^1+(1-t)z_i^2\in G_i(x)$。

由条件 4)可知，$F_i(\cdot,x_{-i})$为集值拟凸的，则 $F_i(tz_i^1+(1-t)z_i^2,x_{-i})\subset F_i(z_i^1,x_{-i})\subset K_i$，或 $F_i(tz_i^1+(1-t)z_i^2,x_{-i})\subset F_i(z_i^2,x_{-i})\subset K_i$。

因此，即对任意的 $x\in X$，$T(x)$是凸的。

为了证明 T_i 为上半连续且具有紧值，由引理 2 可知，只需证明 T_i 的图是闭的。

对任意网$\{(x^\alpha,z_i^\alpha)\in X\times X_i\}$有$(x^\alpha,z_i^\alpha)\rightarrow(x,z_i)\in X\times X_i$，$z_i^\alpha\in T_i(x^\alpha)$，则 $z_i^\alpha\in G_i(x^\alpha)$，$F_i(z_i^\alpha,x_{-i}^\alpha)\subset K_i$。由条件 3)可得 $z_i\in G_i(x)$。

如果 $F_i(z_i,x_{-i})\not\subset K_i$，则存在 $v_i\in F_i(z_i,x_{-i})$，$v_i\notin K_i$。

因为 F_i 是下半连续的，所以存在网$\{v_i^\alpha\in V\}$使得 $v_i^\alpha\rightarrow v_i$，且有 $v_i^\alpha\in F_i(z_i^\alpha,x_{-i}^\alpha)$。

因为 K_i 为闭的，故对任意充分大的 α，有 $v_i^\alpha\in F_i(z_i^\alpha,x_{-i}^\alpha)$，$v_i^\alpha\notin K_i$。这与 $F_i(z_i^\alpha,x_{-i}^\alpha)\subset K_i$ 矛盾。因此 T_i 为上半连续且具有紧值。

由引理 1，存在 $x^*\in X$，使得 $x^*\in T(x^*)$，即对任意的 $i\in N$，$x_i^*\in G_i(x^*)$，而且 $F_i(x^*)\subset K_i$。　证毕

定理 2　假设基于生存理论的博弈 $\Gamma=(N,(G_i,F_i,K_i,X_i)_{i\in N})$满足如下条件：

1）对任意的 $i\in N$，X_i 为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间 E_i 中的一个非空凸紧子集；

2）对任意的 $i\in N$，K_i 为 Hausdorff 拓扑线性空间 V 中的一个非空闭子集；

3）对任意的 $i\in N$，G_i 为上半连续且有非空凸紧值；

4）对任意的 $i\in N$，$F_i:X\rightarrow 2^V$ 为上半连续的集值映射，且对任意 $x_{-i}\in X_{-i}$，$F_i(\cdot,x_{-i})$为集值拟凹的；

5）博弈 Γ 具有弱一致性，即对任意的 $x\in X$，存在 $z\in X$，使得对任意的 $i\in N$，$z_i\in G_i(x)$，且 $F_i(z_i,x_{-i})\cap K_i\neq\varnothing$。

那么博弈 Γ 存在一个非合作弱平衡。

证明　定义集值映射 $T:X\rightarrow 2^X$：$T(x)=\prod_{i\in N}T_i(x)$，$T_i(x)=\{z_i\in G_i(x)\mid F_i(z_i,x_{-i})\cap K_i\neq\varnothing\}$，$\forall x\in X$。

明显地，由条件 5)可知，对任意的 $x\in X$，$T(x)$非空。

对任意 $i\in N$，任意 $x\in X$，任意 $z_i^1,z_i^2\in T_i(x)$，任意 $t\in[0,1]$，有 $z_i^1,z_i^2\in G_i(x)$，$F_i(z_i^1,x_{-i})\cap K_i\neq\varnothing$，$F_i(z_i^2,x_{-i})\cap K_i\neq\varnothing$。

由条件 3)可知 $G_i(x)$为凸，则 $tz_i^1+(1-t)z_i^2\in G_i(x)$。

由条件 4)可知 $F_i(\cdot,x_{-i})$为集值拟凹的，则：$F_i(tz_i^1+(1-t)z_i^2,x_{-i})\cap K_i\supset F_i(z_i^1,x_{-i})\cap K_i\neq\varnothing$，或 $F_i(tz_i^1+(1-t)z_i^2,x_{-i})\cap K_i\supset F_i(z_i^2,x_{-i})\cap K_i\neq\varnothing$。

因此，对任意 $x\in X$，$T(x)$是凸的。

为了证明 T_i 是上半连续且具有紧值，由引理 2 知，只需证明 T_i 的图为闭的。

对任意网$\{(x^\alpha,z_i^\alpha)\in X\times X_i\}$具有：$(x^\alpha,z_i^\alpha)\rightarrow(x,z_i)\in X\times X_i$ 和 $z_i^\alpha\in T_i(x^\alpha)$，那么 $z_i^\alpha\in G_i(x^\alpha)$，

$F_i(z_i^\alpha, x_{-i}^\alpha) \cap K_i \neq \varnothing$。由条件3)可得 $z_i \in G_i(x)$。

如果 $F_i(z_i, x_{-i}) \cap K_i = \varnothing$,那么 $F_i(z_i, x_{-i}) \subset V \backslash K_i$。因为 K_i 是非空闭的,所以 $V \backslash K_i$ 为开集。

由于 F_i 为上半连续的,那么对任意充分大的 α,$F_i(z_i^\alpha, x_{-i}^\alpha) \subset V \backslash K_i$,即 $F_i(z_i^\alpha, x_{-i}^\alpha) \cap K_i = \varnothing$。这与 $F_i(z_i^\alpha, x_{-i}^\alpha) \cap K_i \neq \varnothing$ 矛盾。因此 T_i 是上半连续且具有紧值。

由引理1,存在 $x^* \in X$,使得 $x^* \in T(x^*)$,即对任意 $i \in N$,$x_i^* \in G_i(x^*)$,而且 $F_i(x^*) \cap K_i \neq \varnothing$。 证毕

注2 定理1和定理2中的一致性条件主要是为了保证不动点映射的非空性,基本思想受到Nessah等人[26]研究成果中的联盟一致性启示。

3 基于生存理论的合作博弈模型

与第2节类似,建立基于生存理论的合作博弈模型,在新的模型中给出合作博弈平衡的概念和存在性条件,并完成相应的证明。

对规范型博弈 $(X_i, u_i)_{i \in N}$,设 $X_B = \prod_{i \in B} X_i$,如果 $x^* \in X$ 满足对任意 $B \subseteq N$,都不存在 $y_B \in X_B$ 使得:

$$u_i(y_B, z_{-B}) > u_i(x^*), \forall z_{-B} \in X_{-B}, \forall i \in B,$$

那么称 x^* 为合作均衡。

在合作均衡定义的启发下,设 $N = \{1, \cdots, n\}$ 为参与人集合,对任意 $i \in N$,X_i 为参与人 i 的策略集,对任意联盟 $B \subseteq N$,$G_B: X \to 2^{X_B}$ 为联盟 B 的可行策略映射;V 为生存度空间,对任意联盟 $B \subseteq N$,任意联盟策略 $y_B \in X_B$,联盟 B 有一个生存度 $F_B(y_B) \subset V$。值得注意的是,合作的思想在于任意的小联盟都不能打破大联盟的一个策略,此时策略称为一个合作平衡。

基于上述思想,关于生存理论合作博弈可以描述为 $\Gamma = (N, (X_i)_{i \in N}, (G_B, F_B)_{B \subseteq N})$。

定义3 对联盟 $B \subseteq N$,策略组合 $x \in X$,如果存在 $y_B \in X_B$,使得 $F_B(y_B) \not\subset F_N(x)$,则称联盟 $B \subseteq N$ 弱改进策略组合 $x \in X$。

定义4 对博弈 Γ,如果 $x \in G_N(x^*)$,而且任意联盟 $B \subseteq N$ 都不能弱改进策略组合 $x^* \in X$,则称策略组合 $x^* \in X$ 为博弈 Γ 的一个合作强平衡。

定义5 对联盟 $B \subseteq N$,策略组合 $x \in X$,如果存在 $y_B \in X_B$,使得 $F_B(y_B) \cap F_N(x) = \varnothing$,则称联盟 $B \subseteq N$ 强改进策略组合 $x \in X$。

定义6 对博弈 Γ,如果 $x^* \in G_N(x^*)$,而且任意联盟 $B \subseteq N$ 都不能强改进策略组合 $x^* \in X$,则称策略组合 $x^* \in X$ 为博弈 Γ 的一个合作弱平衡。

注3 上述合作平衡体现出策略对于联盟的稳定性。对合作强平衡 x^* 可定义为 $x^* \in G_N(x^*)$,且任意联盟 $B \subseteq N$,$F_B(y_B) \subset F_N(x^*)$,任意 $y_B \in G_B(x^*)$;对合作弱平衡 x^* 也可定义为 $x^* \in G_N(x^*)$,而且任意联盟 $B \subseteq N$,$F_B(y_B) \cap F_N(x^*) \neq \varnothing$,任意 $y_B \in G_B(x^*)$。明显地,合作强平衡也为合作弱平衡。

下面给出上述合作平衡的存在性条件并证明。

定理3 假设基于生存理论的博弈 $\Gamma = (N, (X_i)_{i \in N}, (G_B, F_B)_{B \subseteq N})$ 满足如下条件:

1) 对任意 $i \in N$,X_i 为局部凸Hausdorff拓扑线性空间 E_i 中的一个非空凸紧子集;

2) 生存度空间 V 为一个Hausdorff拓扑线性空间;

3) G_N 上半连续且具有非空凸紧值;

4) 对任意 $B \subseteq N$,G_B 下半连续;

5) 对任意 $B \subseteq N$,$F_B: X \to 2^V$ 为下半连续的集值映射;

6) F_N 的图是闭的,而且为集值拟凹的;

7) 博弈 Γ 具有联盟强一致性,即对任意 $x \in X$,存在 $z \in X$,使得 $z \in G_N(x)$,且

$$\bigcup_{y_B \in G_B(x)} F_B(y_B) \subset F_N(z), \forall B \subseteq N。$$

那么博弈 Γ 存在一个合作强平衡。

证明 定义集值映射 $T: X \to 2^X$:

$$T(x) = \{z \in G_N(x) \mid \bigcup_{y_B \in G_B(x)} F_B(y_B) \subset F_N(z), \forall B \subseteq N\}。$$

由条件 7)知，对任意 $x\in X$，$T(x)$非空。

对任意 $x\in X$，任意 $z^1,z^2\in T(x)$，任意 $\lambda\in[0,1]$，有：

$$z^1\in G_N(x),z^2\in G_N(x),\ \bigcup_{y_B\in G_B(x)}F_B(y_B)\subset F_N(z^1),\ \bigcup_{y_B\in G_B(x)}F_B(y_B)\subset F_N(z^2),\forall B\subseteq N。$$

因为 F_N 为集值拟凹的，而且 $G_N(x)$为凸的，那么 $\lambda z^1+(1-\lambda)z^2\in G_N(x)$，

$$\bigcup_{y_B\in G_B(x)}F_B(y_B)\subset F_N(z^1)\subset F_N(\lambda z^1+(1-\lambda)z^2),\forall B\subseteq N,$$

或者

$$\bigcup_{y_B\in G_B(x)}F_B(y_B)\subset F_N(z^2)\subset F_N(\lambda z^1+(1-\lambda)z^2),\forall B\subseteq N。$$

因此，$T(x)$是凸的。

为了证明 T 为上半连续且具有紧值，由引理 2 知，只需要验证 T 的图是闭的。

对任意网$\{(x^\alpha,z^\alpha)\in X\times X\}$满足$(x^\alpha,z^\alpha)\to(x,z)\in X\times X$，$z^\alpha\in T(x^\alpha)$，那么 $z^\alpha\in G_N(x^\alpha)$，而且对任意 $B\subseteq N$，$\bigcup_{y_B\in G_B(x^\alpha)}F_B(y_B)\subset F_N(z^\alpha)$，由条件 3)可得 $z\in G_N(x)$。

下面用反证法进行证明。

假设存在 $B\subseteq N$，$y_B\in G_B(x)$，$v\in F_B(y_B)$，使得 $v\notin F_N(z)$。因为 G_B 下半连续，那么存在网$\{y_B^\alpha\in X_B\}$，使得 $y_B^\alpha\to y_B$，$y_B^\alpha\in G_B(x^\alpha)$。又因 F_B 是下半连续的，那么存在网$\{v^\alpha\in V\}$满足 $v^\alpha\to v$ 和 $v^\alpha\in F_B(y_B^\alpha)$。因为 F_N 的图是闭的，那么对任意充分大的 α，$y_B^\alpha\to G_B(x^\alpha)$，$v^\alpha\in F_B(y_B^\alpha)$，$v^\alpha\notin F_N(x^\alpha)$。这与 $\bigcup_{y_B\in G_B(x^\alpha)}F_B(y_B)\subset F_N(z^\alpha)$ 矛盾。因此 T 上半连续且有非空凸紧值。

由引理 1，存在 $x^*\in X$，使得 $x^*\in T(x^*)$，即 $x^*\in G_N(x^*)$，对任意 $B\subseteq N$，有：

$$\bigcup_{y_B\in G_B(x^*)}F_B(y_B)\subset F_N(x^*)。$$

证毕

定理 4　假设基于生存理论的博弈 $\Gamma=(N,(X_i)_{i\in N},(G_B,F_B)_{B\subseteq N})$满足如下条件：

1) 对任意 $i\in N$，X_i 为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间 E_i 中的一个非空凸紧子集；

2) 生存度空间 V 为一个 Hausdorff 拓扑线性空间；

3) G_N 上半连续且具有非空凸紧值；

4) 对任意 $B\subseteq N$，G_B 下半连续；

5) 对任意 $B\subseteq N$，$F_B:X_B\to 2^V$ 上半连续且有非空紧值；

6) F_N 为集值拟凹的；

7) 博弈 Γ 具有联盟弱一致性，即对任意 $x\in X$，存在 $z\in X$，使得 $z\in G_N(x)$，且对任意 $B\subseteq N$，有：

$$F_B(y_B)\cap F_N(z)\neq\varnothing,\forall y_B\in G_B(x)。$$

那么博弈 Γ 存在一个合作弱平衡。

证明　定义集值映射 $T:X\to 2^X$ 如下：

$$T(x)=\{z\in G_N(x)\mid F_B(y_B)\cap F_N(z)\neq\varnothing,\forall y_B\in G_B(x),\forall B\subseteq N\}。$$

由条件 7)知，对任意 $x\in X$，$T(x)$非空。

对任意 $x\in X$，任意 $z^1,z^2\in T(x)$，任意 $\lambda\in[0,1]$，有 $z^1\in G_N(x)$，$z^2\in G_N(x)$，以及

$$F_B(y_B)\cap F_N(z^1)\neq\varnothing,\forall y_B\in G_B(x),\forall B\subseteq N;$$

$$F_B(y_B)\cap F_N(z^2)\neq\varnothing,\forall y_B\in G_B(x),\forall B\subseteq N。$$

因为 $G_N(x)$是凸的，有 $\lambda z^1+(1-\lambda)z^2\in G_N(x)$。

进一步，因为 F_N 是集值拟凹的，可得对任意 $B\subseteq N$，任意 $y_B\in G_B(x)$有：

$$F_B(y_B)\cap F_N(\lambda z^1+(1-\lambda)z^2)\supset F_B(y_B)\cap F_N(z^1)\neq\varnothing,$$

或者

$$F_B(y_B)\cap F_N(\lambda z^1+(1-\lambda)z^2)\supset F_B(y_B)\cap F_N(z^2)\neq\varnothing。$$

因此，$T(x)$是凸的。

为了证明 T 上半连续且具有紧值，由引理 2 知，只需要验证 T 的图是闭的。

对任意网$\{(x^\alpha,z^\alpha)\in X\times X\}$满足$(x^\alpha,z^\alpha)\to(x,z)\in X\times X$，$z^\alpha\in T(x^\alpha)$，则有：

$$z^{\alpha}\in G_N(x^{\alpha}),\forall B\subseteq N,\forall y_B\in G_B(x),F_B(y_B)\cap F_N(z^{\alpha})\neq\varnothing。$$

由条件3),显然可得 $z\in G_N(x)$。

下面用反证法进行证明。假设存在 $B\subseteq N$,$y_B\in G_B(x)$,使得 $F_B(y_B)\cap F_N(z)=\varnothing$。

由条件5),$F_B(y_B)$ 与 $F_N(z)$ 为紧值,那么存在 V 中的开集 U_1,U_2 使得

$$F_B(y_B)\subset U_1,F_N(z)\subset U_2,U_1\cap U_2=\varnothing。$$

因为 G_B 下半连续,所以存在网 $\{y_B^{\alpha}\in X_B\}$ 满足 $y_B^{\alpha}\to y_B$,$y_B^{\alpha}\in G_B(x^{\alpha})$。

因为 F_B,F_N 均为上半连续的,那么对任意充分大的 α,$y_B^{\alpha}\in G_B(x^{\alpha})$,$F_B(y_B^{\alpha})\subset U_1$,$F_N(z^{\alpha})\subset U_2$,可得 $F_B(y_B^{\alpha})\cap F_N(z^{\alpha})=\varnothing$,这与 $F_B(y_B^{\alpha})\cap F_N(z^{\alpha})\neq\varnothing$ 矛盾。因此 T 上半连续且有非空凸紧值。

由引理1,存在 $x^*\in X$,使得 $x^*\in T(x^*)$,即 $x^*\in G_N(x^*)$,而且对任意 $B\subseteq N$,任意 $y_B\in G_B(x^*)$,$F_B(y_B)\cap F_N(x^*)\neq\varnothing$。 证毕

4 结束语

本文主要把生存理论思想植入到非合作博弈与合作博弈模型中,构建了2类新的博弈模型。传统的博弈模型更多关注效用或者偏好等,而本文所构建的模型侧重于生存度,主要通过生存集(或者说生存域)来刻画。在模型的定义中,突显了集值的作用。并分别从非合作博弈与合作博弈2类模型着手,给出相应基于生存理论的模型和平衡解。本文的主要创新在于模型的构建,主要结论为非合作强(弱)平衡、合作强(弱)平衡的存在性定理。这一工作在理论上拓宽了博弈论的研究范畴,具有一定的实际意义。

参考文献:

[1] NASH J. Equilibrium point in n-person games[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,1950,36(1):48-49.

[2] 张维迎.博弈论与信息经济学[M].上海:格致出版社,2004.
ZHANG W Y. Game theory and information economics[M]. Shanghai:Gezhi Publishing House,2004.

[3] BONDAREVA O N. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games[J]. Problemi Kibemitiki,1963,10:119-139.

[4] SHAPLEY L S. On balanced sets and cores[J]. Naval Research Logistics Quarterly,1967,14:453-460.

[5] AUMANN R J. The core of a cooperative game without side payments[J]. Transcactions of the American Mathematical Society,1961,98:539-552.

[6] SCARF H E. On the existence of a cooperative solution for a general class of n-person games[J]. Journal of Economic Theory,1971,3:169-181.

[7] SCARF H E. The core of an N-person game[J]. Econometrica,1967,35:50-69.

[8] BORDER K C. A core existence theorem for games without ordered preferences[J]. Econometrica,1984,52:1537-1542.

[9] KAJII A. A generalization of Scarf's theorem:an α-core existence theorem without transitivity or completeness[J]. Journal of Economic Theory,1992,56:194-205.

[10] BRANDENBURGER A,STUART H. Biform games[J]. Management Science,2007,53(4):537-549.

[11] 南江霞,王盼盼,李登峰.基于CIS值的非合作-合作两型博弈的理论研究[J].控制与决策,2020,35(6):1427-1434.
NAN J X,WANG P P,LI D F. Theory for biform games CIS value-based equilibrium strategies[J]. Control and Decision,2020,35(6):1427-1434.

[12] 南江霞,王盼盼,李登峰.非合作-合作两型博弈的Shapley值纯策略纳什均衡解求解方法[J].中国管理科学,2021,29:202-210.
NAN J X,WANG P P,LI D F. A solution method for Shapley-based equilibrium strategies of biform games[J]. Chinese Journal of Management Science,2021,29:202-210.

[13] 王能发,杨哲,刘自鑫.集值支付博弈中强Nash平衡的存在性定理[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2023,40(1):139-144.
WANG N F,YANG Z,LIU Z X. The existence of strong Nash equilibria for games with set-valued payoffs[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2023,40(1):139-144.

[14] AUBIN J P,CELLINA A. Differential inclusions[M]. Berlin:Springer-Verlag,1984.

[15] AUBIN J P. Differential games: a viability approach[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1990, 28(6): 1294-1320.
[16] AUBIN J P. Viability theory, systems and control[M]. Birkhauser, 1991.
[17] AUBIN J P. Dynamic economic theory: a viability approach[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
[18] 郑丕谔,仲宏生,李光泉,等.基于生存理论的股票系统演化及调控[J].系统工程理论与实践,1997,11:8-13.
ZHENG P E, ZHONG H S, LI G Q, et al. Evolution and control of stock systems based on viability theory[J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 1997, 11: 8-13.
[19] 许跟起.Banach空间微分包含在闭集上的生存性[J].系统科学与数学,1999,19(2):190-195.
XU G Q. The existence for differential inclusions on closed set[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 1999, 19(2): 190-195.
[20] 叶明确,张世英.复杂系统的质量生存决策[J].控制与决策,2001,16(4):398-403.
YE M Q, ZHANG S Y. Quality-viability decision of complex systems[J]. Control and Decision, 2001, 16(4): 398-403.
[21] 叶明确,张世英.复杂系统的质量生存可达性决策[J].控制与决策,2002,17(3):264-268.
YE M Q, ZHANG S Y. Quality viability reachable decision of complex systems[J]. Control and Decision, 2002, 17(3): 264-268.
[22] 叶明确.基于生存理论的复杂经济系统决策与对策研究[M].北京:经济管理出版社,2013.
YE M Q. Study on decision-making and countermeasures of complex economic system based on survival theory[M]. Beijing: Economic Management Press, 2013.
[23] 刘磊,高岩,吴越鹏.基于生存理论的非完整约束轮式机器人高速避障控制[J].控制与决策,2014,29(9):1623-1627.
LIU L, GAO Y, WU Y P. High speed obstacle avoidance control of wheeled mobile robots with non-homonymic constraint based on viability theory[J]. Control and Decision, 2014, 29(9): 1623-1627.
[24] 韩艳丽,高岩.基于生存理论的线性微分博弈系统识别域的判别[J].运筹学学报,2016,20(1):105-111.
HAN Y L, GAO Y. Determining the discriminating domain for linear differential games based on viability theory[J]. Operations Research Transactions, 2016, 20(1): 105-111.
[25] ALIPRANTIS C D, BORDER K C. Infinite dimensional analysis[M]. Berlin: Springer, 2006.
[26] NESSAH R, TIAN G. On the existence of strong Nash equilibria[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 414(2): 871-885.

Operations Research and Cybernetics

Two Kinds of Game Models Based on Viability Theory

WANG Nengfa[1,2], YANG Zhe[3], LIU Zixin[1,2]
(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics;
2. Guizhou Key Laboratory of Big Data Statistical Analysis, Guiyang 550025;
3. School of Economics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: Two kinds of game models based on viability theory (non-cooperative game model and cooperative game model) and the existence of equilibrium are studied. The viability theory is implanted into non-cooperative game and cooperative game models, and two new game models are constructed, and the strong (weak) equilibria of non-cooperative game and strong (weak) equilibria of cooperative game are defined. Under certain conditions, four existence theorems of strong (weak) equilibria are obtained. This work broadens the research scope of game theory theoretically and has certain practical significance in application.

Keywords: game model; viability theories; strong equilibria; weak equilibria

(责任编辑　黄　颖)