运筹学与控制论

DOI：10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 03. 002

预不变凸函数的一个等价条件*

赵 克 全
（重庆师范大学 数学学院，重庆 400047）

摘要：广义凸性在数学规划与最优化理论中具有十分重要的作用。本文通过将对多元实值函数的研究转化为对单变量的实值函数的研究，首先证明了当 X 为关于 η 的不变凸集，η 满足条件 C，f 满足条件 D 时，对任意给定的 $x,y\in X,\forall\lambda\in[0,1]$，$F(\lambda)=f(y+\lambda\eta(x,y))$ 是凸函数当且仅当 f 为关于 η 的预不变凸函数。在此基础上建立了二次连续可微的预不变凸函数的一个等价条件：设 X 为关于 η 的开不变凸集，η 满足条件 C，f 二次连续可微且满足条件 D，则 f 关于 η 为预不变凸函数等价于 $\forall x,y\in X,\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x)\eta(x,y)\geqslant 0$。本文的结果为判断函数的预不变凸性提供了新的思路。

关键词：广义凸性；预不变凸函数；二次连续可微函数；等价条件
中图分类号：O221.2；O172.2 文献标识码：A 文章编号：1672-6693(2010)03-0006-03

文献[1-2]研究了凸性及其推广形式在数学规划与最优化理论中的应用。作为对凸函数的推广，Hanson 在文献[3]介绍了不变凸函数的概念并在不变凸性条件下证明了 Kuhn-Tucker 条件的充分性。在此基础上，Weir 等人在文献[4-5]中引入了预不变凸函数的概念并研究了预不变凸性在多目标规划中的应用。目前已有大量文献对函数的预不变凸性进行了深入研究[6-9]。特别地，文献[9]在半连续性条件下研究了函数的预不变凸性的一些判别准则，为验证函数的预不变凸性提供了方法。

本文在一定条件下，从不同的角度对函数的预不变凸性进行了研究，给出了一个二次连续可微的预不变凸函数的充分必要条件。

1 预备知识

以下如无特别说明，假定非空集 $X\subseteq\mathbf{R}^n$，$f:X\to\mathbf{R}$，$\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$。

定义 1[4-5] X 为不变凸集。若 $\exists\eta$ 满足 $\forall x,y\in X,\forall\lambda\in[0,1]$，$y+\lambda\eta(x,y)\in X$。

定义 2[4-5] X 为关于 η 的不变凸集。称 f 为关于 η 的预不变凸函数，如果 $\forall x,y\in X,\forall\lambda\in[0,1]$，$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

定义 3[7] 向量值函数 η 满足条件 C 是指 $\forall x,y\in X,\forall\lambda\in[0,1]$，$C_1:\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$，$C_2:\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$。

定义 4[8] f 满足条件 D 是指 $\forall x,y\in X$，$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$。

引理 1[1] X 为开子集，f 是二次连续可微的，则 f 是凸函数当且仅当 Hessian 矩阵在 X 上是半正定的。

若 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是二次可微的，则 f 是凸函数当且仅当 $f''(x)\geqslant 0,\forall x\in(a,b)$。

2 主要结论及其证明

在文献[1]中建立了下面的结果。

X 为凸集，对任意给定的 $x,y\in X,\forall\lambda\in[0,1]$，令 $F(\lambda)=f(y+\lambda(x-y))$，则 $f(x)$ 为凸函数当且仅当 $F(\lambda)$ 是凸函数。

---

* 收稿日期：2009-09-30
资助项目：重庆师范大学青年基金（No. 08XLQ01）
作者简介：赵克全，男，讲师，研究方向为广义凸性及在最优化理论中的应用。

下面给出该结论的推广,建立预不变凸函数的一个等价条件。

定理 1 X 为关于 η 的不变凸集,η 满足条件 C,f 满足条件 D。对任意给定的 $x,y \in X$, $\forall \lambda \in [0,1]$,令 $F(\lambda) = f(y + \lambda\eta(x,y))$,则 $f(x)$ 为关于 η 的预不变凸函数当且仅当 $F(\lambda)$ 是凸函数。

定理 1 的证明思路和文献[10] 中的定理 1 类似。

下面利用定理 1 建立二次连续可微的预不变凸函数的一个等价条件。

定理 2 X 为关于 η 的开不变凸集,η 满足条件 C,f 二次连续可微且满足条件 D,则 $f(x)$ 关于 η 为预不变凸函数等价于 $\forall x,y \in X, \eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x)\eta(x,y) \geqslant 0$。

证明 假定 $f(x)$ 是二次连续可微的且关于 η 为预不变凸函数,则通过定理 1 可知,对任意给定的 $x,y \in X$, $F(\lambda) = f(y + \lambda\eta(x,y))$ 是定义在 $[0,1]$ 上的二次连续可微的凸函数。利用引理 1 有 $\forall \lambda \in (0,1)$, $F''(\lambda) \geqslant 0$。而

$$F'(\lambda) = \eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla f(y + \lambda\eta(x,y)), F''(\lambda) = \eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y + \lambda\eta(x,y))\eta(x,y)$$

这样 $F''(\lambda) = \eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y + \lambda\eta(x,y))\eta(x,y) \geqslant 0$。

由 f 的二次连续可微性,令 $\lambda \to 0^+$, $\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y)\eta(x,y) \geqslant 0$。

另一方面,假定对任意给定的 $x,y \in X$, $\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y)\eta(x,y) \geqslant 0$。那么,由条件 C 可得, $\forall \lambda \in (0,1)$, $y + \lambda\eta(x,y) \in X$。故

$$\eta(x,y + \lambda\eta(x,y)) \nabla^2 f(y + \lambda\eta(x,y))\eta(x,y + \lambda\eta(x,y)) \geqslant 0$$

从而 $(1-\lambda)^2\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y + \lambda\eta(x,y))\eta(x,y) \geqslant 0$。即 $\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y + \lambda\eta(x,y))\eta(x,y) \geqslant 0$。于是得到 $F''(\lambda) \geqslant 0$。再使用引理 1 和定理 1,可知 $f(x)$ 是关于向量值函数 η 的预不变凸函数。　　证毕

定理 1 提供了一种新的判断函数的预不变凸性的方法,如例 1 所示。

例 1 假定 $X = (-2,-1) \cup (1,2)$ 且 $\eta(x,y) = \begin{cases} x-y, & -2 < x < -1, -2 < y < -1 \\ x-y, & 1 < x < 2, 1 < y < 2 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & 1 < x < 2, -2 < y < -1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & -2 < x < -1, 1 < y < 2 \end{cases}$,可以验证 η 满足条件 C。令 f 为 $f(x) = \begin{cases} \left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)^2, & -2 < x < -1 \\ \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2, & 1 < x < 2 \end{cases}$,可以验证函数 $f(x)$ 是二次连续可微的且满足条件 D。

此外,对任意的 $x,y \in X$,可以验证 $\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x)\eta(x,y) \geqslant 0$。故由定理 2 可知函数 f 关于 η 是预不变凸函数。

参考文献:

[1] Avriel M, Diewert W E, Schaible S S, et a1. Generalized concavity[M]. New York: Penum Press, 1988.

[2] Bazaraa M S, Shetty C M. Nonlinesr programming theory and algorithms[M]. New York: John whley & Sons, 1979.

[3] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn Tucker conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80: 544-550.

[4] Weir T, Mond B. Preinvex functions in multiobjective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136: 29-38.

[5] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1988, 38: 177-189.

[6] Pini R. Inexity and generalized convexity[J]. Optimization, 1991, 22: 513-525.

[7] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189: 901-908.

[8] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Generalizaed invexity and generalized invariant monotonicty[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 117(3): 607-625.

[9] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256: 229-241.
[10] 赵克全. r-预不变凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2006, 23(1): 10-13.

Operations Research and Cybernetics

An Equivalent Condition of Preinvex Function

ZHAO Ke-quan

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal university, Chongqing 400047, China)

Abstract: Generalized convexity has been playing an important role in mathematical programming. In this paper, an equivalent condition of twice continuously differentiable preinvex function is established by transforming multivariate real-valued function into univariate real-valued function. Suppose that X be open invex set with respect to η, η satisfies condition C, f be twice continuously differentiable and satisfies condition D. Then f is preinvex function with respect to η if and only if $\forall x, y \in X, \eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x) \eta(x,y) \geqslant 0$. Our results provide new thoughts to verify the preinvexity of function and also generalize some known results.

Key words: generalized convexity; preinvex function; twice continuously differentiable function; equivalent condition

(责任编辑 黄 颖)