DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 03. 011

具非线性扩散系数的偏微分方程组解的振动性*

曾云辉
(衡阳师范学院 数学与计算科学系,湖南 衡阳 421008)

摘要:考虑一类具非线性扩散系数的时滞双曲型偏微分方程组解的振动性,利用 Green 公式和边值条件将这类具非线性扩散系数的时滞双曲型偏微分方程组的振动问题转化为微分不等式不存在最终正解,通过利用 Riccati 变换和微分不等式方法,获得了该方程组在 Robin 边值条件 $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial N}=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+,i\in I_m$ 下所有解振动的充分条件是 $\int_{t_0}^{\infty}\left\{\phi(s)Q(s)-\frac{[\phi'(s)]^2}{4\phi(s)(1-\sigma'(s))}\right\}\mathrm{d}s=\infty$。

关键词:振动;非线性扩散系数;Riccati 变换
中图分类号:O175.23 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2010)03-0044-04

众所周知,由于在物理学、生物学、工程学等自然和人为过程中都存在着滞后现象,因而用来描述这些过程的数学模型中也就包含着时滞项,即模型是带有泛函变元的偏微分方程,被统称为泛函偏微分方程。泛函偏微分方程(组)的研究能更精确地揭示事物本质,同时能丰富微分方程(组)理论的研究,因而很多学者对偏泛函微分方程组解的振动性理论进行了研究和探讨,并获得了许多好的结果[1-9]。本文将考虑一类具非线性扩散系数时滞双曲型偏微分方程系统

$$\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2}=a(t)h(u_i(x,t))\Delta u_i(x,t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)h_j(u_i(x,t-\tau_j(t)))\Delta u_i(x,t-\tau_j(t))-\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)u_k(x,t-\sigma(t)),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+,i\in I_m \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial N}=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+,i\in I_m \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial N}+cu_i(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+,i\in I_m \tag{3}$$

解的振动性,其中 $(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+\equiv G$;$\mathbf{R}_+=[0,+\infty)$,$I_m=\{1,2,\cdots,m\}$,$\Omega$ 为 $\mathbf{R}^M$ 中具有逐片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域;Δ 为 $\mathbf{R}^M$ 中的 M 维 Laplace 算子,N 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,$c=const>0$。

本文总假定下列条件成立

1) $a(t),a_{ij}(t),\tau_j(t),\sigma(t)\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,$b_{ik}(x,t)\in C(\overline{\Omega}\times\mathbf{R}_+,(0,\infty))$,$b_{ik}(t)=\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\{b_{ik}(x,t)\}$,$\tau_j(t)\leqslant t$,$\sigma(t)\leqslant t$,$\sigma'(t)\leqslant 1$,且 $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\tau_j(t))=\lim\limits_{t\to\infty}(t-\sigma(t))=\infty$,$\bar{b}_{ik}(t)=\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}}\{b_{ik}(x,t)\}$,$Q(t)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{b_{ii}(t)-\sum\limits_{k=1,i\neq k}^{m}\bar{b}_{ki}(t)\}\geqslant 0$,$i\in I_m=\{1,2,\cdots,m\}$,$j\in I_n=\{1,2,\cdots,n\}$,$k\in I_m=\{1,2,\cdots,m\}$。

2) $h(u_i),h_j(u_i)\in C'(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$,$u_ih'(u_i)\geqslant 0$,$u_ih_j'(u_i)\geqslant 0$,$j\in I_n$,$i\in I_m$。

定义 1 称数值函数 $u:\Omega\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 振动,如果对任意正数 α,均存在一点 $(x_0,t_0)\in\Omega\times[\alpha,\infty)$,使得 $u(x_0,t_0)=0$;称向量值函数 $V:\Omega\times[0,\infty)\to\mathbf{R}^M$ 振动,如果 V 至少有一个分量作为数值函数是振动的;称向量值函数 $V:\Omega\times[0,\infty)\to\mathbf{R}^M$ 非振动,如果对它的每一个分量都是非振动的。

* 收稿日期:2009-02-28 修回日期:2009-11-13
资助项目:湖南省教育厅基金资助项目(No. 07C165);衡阳师范学院科学基金项目(No. 08A26)
作者简介:曾云辉,男,讲师,硕士,研究方向为偏微分方程振动性。

定理 1　若存在函数 $\phi(t) \in C^1([t_0,\infty),\mathbf{R}_+)$，使得

$$\int_{t_0}^{\infty}\left\{\phi(s)Q(s) - \frac{[\phi'(s)]^2}{4\phi(s)(1-\sigma'(s))}\right\}\mathrm{d}s = \infty, t_0 > 0 \tag{4}$$

则系统(1)、(2)式的所有解在 G 内振动。

证明　设系统(1)、(2)式有一个非振动解 $u(x,t) = \{u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t)\}^{\mathrm{T}}$，不妨设当 $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ 时，$|u_i(x,t)| > 0, i = 1,2,\cdots,m$，令 $\delta_i = \operatorname{sgn} u_i(x,t), z_i(x,t) = \delta_i u_i(x,t)$，则 $z_i(x,t) > 0,(x,t) \in \Omega\times[t_0,\infty), i = 1,2,\cdots,m$，由条件 1) 知存在 $t_1 \geqslant t_0$，使得当 $t \geqslant t_1$ 时，$z_i(x,t) > 0, z_i(x,t-\tau_j(t)) > 0$ 和 $z_i(x,t-\sigma(t)) > 0,(x,t) \in \Omega\times[t_1,\infty), i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,m$。

对(1)式两边关于 x 在 Ω 上积分有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_\Omega z_i(x,t)\mathrm{d}x\right] = a(t)\int_\Omega h(u_i(x,t))\Delta z_i(x,t)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_i}{\delta_k}\int_\Omega b_{ik}(x,t)z_k(x,t-\sigma(t))\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\int_\Omega h_j(u_i(x,t-\tau_j(t)))\Delta z_i(x,t-\tau_j(t))\mathrm{d}x, t \geqslant t_1, i \in I_m \tag{5}$$

由 Green 公式、边值条件(2)式条件 1)、2) 及 Jensen 不等式有

$$\int_\Omega h(u_i(x,t))\Delta z_i(x,t)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} h(u_i(x,t))\frac{\partial z_i(x,t)}{\partial N}\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla h(u_i(x,t))\nabla z_i(x,t)\mathrm{d}x = -\int_\Omega \delta_i h'(u_i(x,t))|\operatorname{grad} u_i(x,t)|^2\mathrm{d}x \leqslant 0, t \geqslant t_1, i \in I_m \tag{6}$$

$$\int_\Omega h_j(u_i(x,t-\tau_j(t)))\Delta z_i(x,t-\tau_j(t))\mathrm{d}x \leqslant 0, t \geqslant t_1, i \in I_m, j \in I_n \tag{7}$$

$$\int_\Omega b_{ik}(x,t)z_k(x,t-\sigma(t))\mathrm{d}x \leqslant \bar{b}_{ik}(t)\int_\Omega z_k(x,t-\sigma(t))\mathrm{d}x, k \in I_m, t \geqslant t_1, i \in I_m \tag{8}$$

其中 $\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素。

令 $V_i(t) = \int_\Omega z_i(x,t)\mathrm{d}x, t \geqslant t_1, i \in I_m$，显然 $V_i(t) > 0, t \geqslant t_1, i \in I_m$，于是结合(5)～(8)式可得

$$V''_i(t) + b_{ii}(t)V_i(t-\sigma(t)) - \sum_{k=1,k\neq i}^{m}\bar{b}_{ik}(t)V_k(t-\sigma(t)) \leqslant 0, t \geqslant t_1, i \in I_m \tag{9}$$

令 $V(t) = \sum_{i=1}^{m}V_i(t), t \geqslant t_1$，上述不等式按 $i = 1,2,\cdots,m$ 垂直相加，并据条件 1) 得

$$V''(t) + \min_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{b_{ii}(t) - \sum_{k=1,k\neq i}^{m}\bar{b}_{ki}(t)\right\}\left[\sum_{i=1}^{m}V_i(t-\sigma(t))\right] \leqslant 0$$

亦即

$$V''(t) + Q(t)V(t-\sigma(t)) \leqslant 0, t > t_1 \tag{10}$$

于是由(10)式知 $V''(t) \leqslant 0, t \geqslant t_1$，即 $V'(t)$ 在区间 $[t_1,\infty)$ 上单调减少，由此不难推出

$$V'(t) \geqslant 0, t \geqslant t_1 \tag{11}$$

事实上，若(11)式不成立，则必存在 $t_2 \geqslant t_1$，使得 $V'(t_2) < 0$，所以当 $t \geqslant t_2$ 时，由 $V'(t)$ 单调减少可得 $V(t) - V(t_2) = \int_{t_2}^{t}V'(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_{t_2}^{t}V'(t_2)\mathrm{d}s = V'(t_2)(t-t_2)$，在此式中，令 $t\to\infty$，可得 $\lim\limits_{t\to\infty}V(t) = -\infty$，但这与 $V(t) > 0$ 矛盾，故(11)式成立。

记 $w(t) = \dfrac{\phi(t)V'(t)}{V(t-\sigma(t))}, t \geqslant t_1$，显然有 $w(t) \geqslant 0$，且有

$$w'(t) = \frac{\phi'(t)V'(t)}{V(t-\sigma(t))} + \frac{\phi(t)V''(t)}{V(t-\sigma(t))} - \frac{\phi(t)V'(t)V'(t-\sigma(t))(1-\sigma'(t))}{V^2(t-\sigma(t))}$$

注意到 $V'(t)$ 单调减少，因此有 $\dfrac{\phi(t)[V'(t)]^2(1-\sigma'(t))}{V^2(t-\sigma(t))} \leqslant \dfrac{\phi(t)V'(t)V'(t-\sigma(t))(1-\sigma'(t))}{V^2(t-\sigma(t))}$

结合(10)式有

$$w'(t) \leqslant \frac{\phi'(t)V'(t)}{V(t-\sigma(t))} + \frac{\phi(t)V''(t)}{V(t-\sigma(t))} - \frac{\phi(t)[V'(t)]^2(1-\sigma'(t))}{V^2(t-\sigma(t))} \leqslant$$

$$-\phi(t)Q(t)+\frac{[\phi'(t)]^2}{4\phi(t)(1-\sigma'(t))}-\left[\frac{V'(t)\sqrt{\phi(t)(1-\sigma'(t))}}{V(t-\sigma(t))}-\frac{\phi'(t)}{2\sqrt{\phi(t)(1-\sigma'(t))}}\right]^2\leqslant$$

$$-\left\{\phi(t)Q(t)-\frac{[\phi'(t)]^2}{4\phi(t)(1-\sigma'(t))}\right\},t\geqslant t_1$$

对上式从 t_1 到 $t(\geqslant t_1)$ 积分得 $\quad 0\leqslant w(t)\leqslant w(t_1)-\int_{t_1}^{t}\left\{\phi(s)Q(s)-\frac{[\phi'(s)]^2}{4\phi(s)(1-\sigma'(s))}\right\}\mathrm{d}s$

在上式中,令 $t\to\infty$,并结合(4)式可得 $\lim\limits_{t\to\infty}w(t)=-\infty$,这与 $w(t)\geqslant 0$ 矛盾。 证毕

推论1 如果微分不等式(10)式无最终正解,则系统(1),(2)式的所有解在 G 内振动。

为了讨论系统(1),(3)式的振动性,引入如下引理。

引理[10] 设 λ_0 是下列特征值问题

$$\begin{cases}\Delta\phi(x)+\lambda\phi(x)=0,x\in\Omega,\lambda\text{ 是常数}\\ \dfrac{\partial\phi(x)}{\partial N}+c\phi(x)=0,x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{12}$$

的最小特征值,$\phi(x)$ 是与 λ_0 对应的特征函数,则 $\lambda_0>0,\phi(x)>0,x\in\Omega$。

定理2 设定理1中的条件全部满足,$h(u_i)$,$h_j(u_i)$ 为常数(均设为1,$j\in I_m$,则边值问题(1)、(3)式的所有解在 G 是振动的。

证明 假设系统(1)、(3)式有一个非振动解 $u(x,t)=\{u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t)\}^{\mathrm{T}}$,不妨设当 $t\geqslant t_0\geqslant 0$ 时,$|u_i(x,t)|>0,i=1,2,\cdots,m$,令 $\delta_i=\operatorname{sgn}u_i(x,t)$,$z_i(x,t)=\delta_i u_i(x,t)$,则 $z_i(x,t)>0,(x,t)\in\Omega\times[t_0,\infty),i=1,2,\cdots,m$,由条件1)知存在 $t_1\geqslant t_0$,使得当 $t\geqslant t_1$ 时,$z_i(x,t)>0,z_i(x,t-\tau_j(t))>0$ 和 $z_i(x,t-\sigma(t))>0,(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty),i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,m$。

对(1)式两边乘以 $\phi(x)$ 后关于 x 在 Ω 上积分有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_\Omega z_i(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x\right]=a(t)\int_\Omega\Delta z_i(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\int_\Omega\Delta z_i(x,t-\tau_j(t))\phi(x)\mathrm{d}x-$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_i}{\delta_k}\int_\Omega b_{ik}(x,t)z_k(x,t-\sigma(t))\phi(x)\mathrm{d}x,t\geqslant t_1,i\in I_m\tag{13}$$

由 Green 公式、边值条件(3)式、条件1)、2)及 Jensen 不等式有

$$\int_\Omega z_i(x,t)\Delta\phi(x)\mathrm{d}x-\int_\Omega\phi(x)\Delta z_i(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}z_i(x,t)\frac{\partial\phi(x)}{\partial N}\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega}\phi(x)\frac{\partial z_i(x,t)}{\partial N}\mathrm{d}S=0$$

所以

$$\int_\Omega z_i(x,t)\Delta\phi(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega\phi(x)\Delta z_i(x,t)\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_\Omega z_i(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x\tag{14}$$

$$\int_\Omega z_i(x,t-\tau_j(t))\Delta\phi(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega\phi(x)\Delta z_i(x,t-\tau_j(t))\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_\Omega z_i(x,t-\tau_j(t))\phi(x)\mathrm{d}x\tag{15}$$

又由条件1)、2)有

$$\int_\Omega b_{ik}(x,t)z_k(x,t-\sigma(t))\phi(x)\mathrm{d}x\leqslant\bar{b}_{ik}(t)\int_\Omega z_k(x,t-\sigma(t))\phi(x)\mathrm{d}x,k\in I_m,t\geqslant t_1\tag{16}$$

其中 $\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素。

令 $U_i(t)=\int_\Omega z_i(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x,t\geqslant t_1,i\in I_m$,显然 $U_i(t)>0,t\geqslant t_1,i\in I_m$,于是

结合(13)~(16)式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_\Omega z_i(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x\right]=a(t)\int_\Omega\Delta z_i(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\int_\Omega\Delta z_i(x,t-\tau_j(t))\phi(x)\mathrm{d}x-$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_i}{\delta_k}\int_\Omega b_{ik}(x,t)z_k(x,t-\sigma(t))\phi(x)\mathrm{d}x\leqslant-b_{ii}(t)U_i(t-\sigma(t))+\sum_{k=1,k\neq i}^{m}\bar{b}_{ik}(t)U_k(t-\sigma(t)),t\geqslant t_1,i\in I_m\tag{17}$$

上式按 $i=1,2,\cdots,m$ 垂直相加,并记 $U(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}U_i(t)$,显然 $U(t)>0,t>t_1$ 得

$$U''(t)+\min_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{b_{ii}(t)-\sum_{i=1,k\neq i}^{m}\bar{b}_{ki}(t)\right\}\left[\sum_{i=1}^{m}U_i(t-\sigma(t))\right]\leqslant 0$$

亦即 $U''(t)+Q(t)U(t-\sigma(t))\leqslant 0, t>t_1$。

以下同定理 1 的证明，故略。 证毕

参考文献：

[1] Lalli B S, Yu Y H, Cui T. Oscillation of certain partial differential equations with deviating arguments[J]. Bull Austral Math Soc, 1992, 46(2): 373-380.

[2] 罗李平，欧阳自根. 非线性时滞双曲型偏微分方程解的振动性质[J]. 湖南师范大学学报(自然科学版), 2007, 30(1): 13-16.

[3] 林文贤. 一类二阶中立型偏泛函微分方程组解的振动性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2003, 19(3): 263-267.

[4] 崔宝同，俞元洪，林诗仲. 具有时滞的双曲型微分方程解的振动性质[J]. 应用数学学报, 1996, 19(1): 80-88.

[5] 罗李平，欧阳自根. 偶数阶中立型时滞偏微分方程系统解的振动性质[J]. 大学数学, 2007, 23(1): 61-65.

[6] 高正晖. 具有连续时滞的双曲型偏微分方程解的振动性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24(1): 11-14.

[7] 罗李平. 具非线性扩散系数的脉冲时滞双曲型方程组的振动性[J]. 自然科学进展, 2008, 18 (3): 341-344.

[8] 曾云辉，魏跃进. 一类带高阶 Laplace 算子偏微分方程系统解的振动性[J]. 河南师范大学学报, 2008, 36(5): 30-32 .

[9] 罗李平. 非线性双曲型泛函偏微分方程组解的振动准则[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2008, 38(2): 127-129.

[10] 叶其孝，李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1990.

Oscillation of Solutions to Systems of Partial Differential Equations with Nonlinear Diffusion Coefficient

ZENG Yun-hui

(Dept. of Mathematics and Computional Science, Hengyang Normal University, Hengyang Hunan 421008, China)

Abstract: In this paper, we studied the oscillation of solutions to systems of delay hyperbolic Partial differential equations with nonlinear diffusion coefficient. The oscillatory problem of solution to the systems of hyperbolic partial differential equations with nonlinear diffusion coefficient is reduced to which differential inequality has not eventual positive solution by using the Green's formula and boundary value conditions. Thereby, sufficient condition $\int_{t_0}^{\infty}\left\{\phi(s)Q(s)-\frac{[\phi'(s)]^2}{4\phi(s)(1-\sigma'(s))}\right\}ds=\infty$ for each solution to be oscillation is obtained under Robin boundary value condition $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial N}=0, (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+, i\in I_m$ by using Riccati transformation and the method of diferential inequality.

Key words: oscillation; nonlinear diffusion coefficient; Riccati transformation

(责任编辑 黄 颖)

更改双月刊启事

《重庆师范大学学报(自然科学版)》为适应发展需要，决定从 2010 第 1 期起，刊期由原季刊改为双月刊，单月 20 日出版，全年共出版 6 期。

承蒙广大订户的厚爱和大力支持，本刊近年来进步较快，影响得到很大提高，社会效益日益显著。目前不仅为多家国际国内权威文摘和检索机构收录，影响因子也呈逐年大幅上升。本刊创设“运筹学与控制论”、“动物科学”和“三峡地区资源环境生态研究”重点栏目以来，更是受到广大科研人员的关注，稿源量不断增加，刊期调整势在必行。

本刊在全国邮局发行，由于 2010 年的征订工作开始较早，原季刊的征订已来不及更改，经与邮局协商，今年仍按全年 4 期(第 1 ~4 期)在邮局发行，如需要订阅本刊 2010 年第 5、6 期，请直接与编辑部联系。特此敬告广大订户，由此给您带来的不便敬请谅解。

订阅联系人：陈晓韵 联系电话：023-65362431 E-mail：cqnuj@cqnu.edu.cn

本刊编辑部