2010 年 7 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jul. 2010
第 27 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 27 No. 4

运筹学与控制论

DOI:10.3969/J.ISSN.1672-6693.2010.04.002

关于 s-预不变凸函数的 Hadamard 型不等式*

李觉友
(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要：本文得到了关于 s-预不变凸函数的 3 个 Hadamard 型不等式。首先通过推广 s-凸函数的概念，定义了一类广义凸函数—s-预不变凸函数。同时使用推导 s-凸函数的 Hadamard 不等式的类似方法，给出了 s-预不变凸函数的 Hadamard 型不等式，即设 $K=[a,a+\eta(b,a)]\subset[0,\infty)$ 关于 η 为不变凸集，$f:K\to[0,\infty)$ 在 K° 上为 s-预不变凸函数，$a,b\in K^{\circ}$，$a<a+\eta(b,a)$，则有 $2^{s-1}f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{s+1}$，其中上式第一个不等式中的 η 满足条件 C：$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$；$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$，$\forall x,y\in\mathbf{R},\lambda\in[0,1]$。最后还得到了有关两个 s-预不变凸函数乘积形式的 Hadamard 型不等式。

关键词：s-凸函数；s-预不变凸函数；Hadamard 型不等式
中图分类号：O174.13 文献标识码：A 文章编号：1672-6693(2010)04-0005-04

1 预备知识

在不等式理论研究中，凸函数所发挥的作用是不可替代的。1893 年，Hadamard 发表了他的关于凸函数的著名不等式：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

近年来，不少学者给出了(1)式的各种改进和推广[1-3]，同时提出了各种类型的凸函数，也给出了其它类型凸函数的 Hadamard 型不等式[4-6]。Weir 和 Mond 引入了不变凸集和预不变凸函数[7]，它是一类重要的广义凸函数。杨新民等研究了预不变凸函数的各种重要性质及其在最优化中的应用[8-9]。最近，Noor 给出了预不变凸函数和对数-预不变凸函数的 Hadamard 型不等式[10]，即设 $f:K=[a,a+\eta(b,a)]\to(0,\infty)$ 在 K°(K 的内部)上为预不变凸函数，$a,b\in K^{\circ}$，$a<a+\eta(b,a)$，则有

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

文献[11]定义了 r-预不变凸函数的概念，并得到了 r-预不变凸函数的 Hadamard 型不等式。

本文受到文献[6,10]的启发，定义了一类 s-预不变凸函数，并给出相应的 Hadamard 型不等式，还得到了有关两个 s-预不变凸函数乘积形式的 Hadamard 型不等式。本文的定理 1—3 推广了文献[5-6,10]中相应的结果。

2 相关定义

定义 1[7] 称 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的不变凸集，若 $\exists\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$。显然当 $\eta(x,y)=x-y$ 时，不变凸集 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 就退化为凸集。

* 收稿日期：2009-12-14
资助项目：国家自然科学基金(No. 10671207)；重庆师范大学青年基金资助项目(No. 08XLQ03)
作者简介：李觉友，男，讲师，硕士，研究方向为不等式理论。

定义2[7-8] 设K关于η为不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$,称f是关于η的不变凸函数,若对$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。显然当$\eta(x,y)=x-y$时,$f$就退化为凸集$K$上的凸函数。

定义3[4] 称$f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$是$s$-凸函数,若对$\forall x,y\in[0,\infty),\lambda\in[0,1]$和对某个$s\in(0,1]$有$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda^s f(x)+(1-\lambda)^s f(y)$。显然当$s=1$时,$s$-凸函数就退化为定义在$[0,\infty)$的凸函数。

定义4 设$K\subset[0,\infty)$关于η为不变凸集,称$f:K\to\mathbf{R}$是s-预不变凸函数,若对$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$和对某个$s\in(0,1]$有$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda^s f(x)+(1-\lambda)^s f(y)$。

显然当$\eta(x,y)=x-y$时,s-预不变凸函数就退化为s-凸函数;当$s=1$时,s-预不变凸函数就退化为定义在$[0,\infty)$的预不变凸函数。

Dragomir和Fitzpatrick证明了如下关于s-凸函数的Hadamard型不等式[5]。

定理A[5] 设$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$是$s$-凸函数,$s\in(0,1]$且$a,b\in[0,\infty),a<b$。若$f\in L^1[a,b]$,则

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{s+1}\tag{3}$$

Kirmaci等建立了有关凸函数和s-凸函数乘积形式的Hadamard型不等式[6]。

定理B[6] 设$f,g:[a,b]\to[0,\infty),a,b\in[0,\infty),a<b$。若$f$是凸函数,$g$是$s$-凸函数,$s\in(0,1]$,则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{s+2}M(a,b)+\frac{1}{(s+1)(s+2)}N(a,b)\tag{4}$$

和

$$2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{(s+1)(s+2)}M(a,b)+\frac{1}{s+2}N(a,b)\tag{5}$$

其中$M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b),N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$。

3 主要结果

定理1 设$K=[a,a+\eta(b,a)]\subset[0,\infty)$关于$\eta$为不变凸集,$f:K\to[0,\infty)$在$K^\circ$上为$s$-预不变凸函数,$a,b\in K^\circ,a<a+\eta(b,a)$,则有

$$2^{s-1}f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{s+1}\tag{6}$$

其中(6)式中第一个不等式要求η满足条件C[7]:$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$;$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y),\forall x,y\in\mathbf{R},\lambda\in[0,1]$。

证明 因为f是s-预不变凸函数,所以有

$$\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\,\mathrm{d}x=\eta(b,a)\int_0^1 f(a+t\eta(b,a))\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\eta(b,a)\int_0^1\left[t^s f(b)+(1-t)^s f(a)\right]\mathrm{d}t=\eta(b,a)\frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

即证(6)式中第二个不等式。由η满足条件C知,对$\forall t\in[0,1]$有

$$a+(1-t)\eta(b,a)+\frac{1}{2}\eta(a+t\eta(b,a),a+(1-t)\eta(b,a))=a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\tag{7}$$

且f是s-预不变凸函数,所以

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)=\int_0^1 f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^1 f\left(a+(1-t)\eta(b,a)+\frac{1}{2}\eta(a+t\eta(b,a),a+(1-t)\eta(b,a))\right)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2^s}\int_0^1 f(a+t\eta(b,a))\,\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{2^s}\int_0^1 f(a+(1-t)\eta(b,a))\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^{s-1}}\int_0^1 f(a+t\eta(b,a))\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^{s-1}\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\,\mathrm{d}x$$

即证(6)式中第一个不等式。 证毕

注 1　在定理 1 的(6)式中,当 $\eta(b,a)=b-a$ 时,即得(3)式;当 $s=1$ 时,即得(2)式。

在下面的讨论中将使用 Euler 型 Beta 函数,即 $\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$。

定理 2　设 $K=[a,a+\eta(b,a)]\subset[0,\infty)$ 关于 η 为不变凸集,$a,b\in K^\circ$,$a<a+\eta(b,a)$,$f,g:K\to[0,\infty)$。若 f 在 K° 上为 s_1- 预不变凸函数,g 在 K° 上为 s_2- 预不变凸函数,$s_1,s_2\in(0,1]$,则有

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{s_1+s_2+1}M(a,b)+\mathrm{B}(s_1+1,s_2+1)N(a,b)\tag{8}$$

证明　因为 f,g 在 K° 上分别为非负的 s_1,s_2- 预不变凸函数,所以对 $\forall t\in[0,1]$ 有

$$f(a+t\eta(b,a))g(a+t\eta(b,a))\leqslant t^{s_1+s_2}f(b)g(b)+t^{s_1}(1-t)^{s_2}f(b)g(a)+$$
$$t^{s_2}(1-t)^{s_1}f(a)g(b)+(1-t)^{s_1+s_2}f(a)g(a)$$

对上面的不等式在 $[0,1]$ 上对 t 积分即得

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(a+t\eta(b,a))g(a+t\eta(b,a))\leqslant$$
$$\frac{1}{s_1+s_2+1}(f(a)g(a)+f(b)g(b))+f(b)g(a)\int_0^1 t^{s_1}(1-t)^{s_2}\mathrm{d}t+f(a)g(b)\int_0^1 t^{s_2}(1-t)^{s_1}\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{s_1+s_2+1}M(a,b)+\mathrm{B}(s_1+1,s_2+1)N(a,b)$$

证毕

注 2　在定理 2 的(8)式中,当 $s_1=1$ 和 $\eta(b,a)=b-a$ 时,即得(4)式。

定理 3　设 $K=[a,a+\eta(b,a)]\subset[0,\infty)$ 关于 η 为不变凸集,其中 η 满足条件 C,$a,b\in K^\circ$,$a<a+\eta(b,a)$,$f,g:K\to[0,\infty)$。若 f 在 K° 上为 s_1- 预不变凸函数,g 在 K° 上为 s_2- 预不变凸函数,$s_1,s_2\in(0,1]$,则

$$2^{s_1+s_2-1}f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)g\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{s_1+s_2+1}N(a,b)+\mathrm{B}(s_1+1,s_2+1)M(a,b)\tag{9}$$

证明　由 η 满足条件 C 知,对 $\forall t\in[0,1]$ 有(7)式成立,又 f,g 在 K° 上分别为非负的 s_1,s_2- 预不变凸函数,所以对 $\forall t\in[0,1]$ 有

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)g\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{2^{s_1+s_2}}\Big[f(a+t\eta(b,a))+f(a+(1-t)\eta(b,a))\Big]\Big[g(a+t\eta(b,a))+g(a+(1-t)\eta(b,a))\Big]\leqslant$$
$$\frac{1}{2^{s_1+s_2}}\Big\{\Big[f(a+t\eta(b,a))g(a+t\eta(b,a))+f(a+(1-t)\eta(b,a))g(a+(1-t)\eta(b,a))\Big]+$$
$$\Big[t^{s_1+s_2}+(1-t)^{s_1+s_2}\Big]N(a,b)+\Big[t^{s_1}(1-t)^{s_2}+t^{s_2}(1-t)^{s_1}\Big]M(a,b)\Big\}$$

对上面的不等式在 $[0,1]$ 上对 t 进行积分即得

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)g\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{2^{s_1+s_2-1}}\left[\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{s_1+s_2+1}N(a,b)+\mathrm{B}(s_1+1,s_2+1)M(a,b)\right]$$

证毕

注 3　在定理 3 的(9)式中,当 $s_1=1$ 和 $\eta(b,a)=b-a$ 时,即得(5)式。

参考文献:

[1] 匡继昌. 常用不等式[M]. 第三版. 山东:山东科学技术出版社,2004.
[2] 王良成,王顺国. 线性空间上凸函数的若干不等式[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1996,26(4):86-93.

[3] 罗健英. Hadamard 不等式的推广及应用[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2001,24(1):45-50.

[4] Hudzik H,Maligranda L. Some remarks on s-convex functions[J]. Aequationes Math,1994,48:101-111.

[5] Dragomir S S,Fitzpatrick S. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense[J]. Demonstratio Math 1999, 32(4):687-696.

[6] Kirmaci U S,Klaricic Bakula M,Ozdemir M E,et al. Hadamard-type inequalities for s-convex functions[J]. Applied Mathematics and Computation,2007,193:26-35.

[7] Weir T,Mond B. Preinvex functions in multiobjective optimization[J]. J Math Anal Appl,1988,136:29-38.

[8] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. J Math Anal Appl,2001,256:229-241.

[9] 焦合华. 半(p,r)-(预)不变凸函数及其规划的鞍点最优性条件[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2007,31(4):394-399.

[10] Noor M A. On hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions[J]. J Inequal Pure and Appl Math, 2007,8(3):75-76.

[11] 毕燕丽. 关于 r-预不变凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 数学的实践与认识,2009,39(2):190-192.

Operations Research and Cybernetics

On Hadamard-type Inequalities for s-Preinvex Functions

LI Jue-you

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In recent years, various refinements of the classical Hadamard inequalities for the convex functions and its variant forms are obtained in the literature by many researchers. At the same time, several refinements and variant forms of the Hadamard-type inequalities for s-convex functions as a generalization of convex functions, are also derived. The objective of this paper is to obtain several new Hadamard-type inequalities about s-preinvex functions. A new kind of generalized convex functions, termed s-preinvex functions in the second sense is introduced through relaxing the concept of s-convex functions. And the Hadamard-type inequalities for s-preinvex functions are established under certain conditions, i. e. let $K\subset[0,\infty)$ be an invex set with respect to η. Assuming that $f:K=[a,a+\eta(b,a)]\to[0,\infty)$ is an s-preinvex function in K°. $a,b\in K^{\circ},a<a+\eta(b,a)$, then for some fixe $s\in(0,1]$, $2^{s-1}f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{s+1}$, where η satisfies the well-known condition C: $\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$; $\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R},\lambda\in[0,1]$ for the first inequality in the above inequalities. With Kirmaci's two new Hadamard-type inequalities for products of convex and s-convex functions, two new Hadamard-type inequalities for products of two s-preinvex functions are obtained. These results generalize some known results and include the previous known conclusions for s-convex as special case.

Key words: s-convex functions; s-preinvex functions; Hadamard's inequality

(责任编辑 黄 颖)