DOI :10. 3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 05. 008

具功能反应的离散捕食系统的持续性和周期解*

汤　慧，杨志春
(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要 :讨论一类具有 Holling-N 类功能性反应的离散捕食系统的永久持续生存性和周期解的存在性。首先建立具有 Holling-N 类功能性反应的食饵-捕食系统的离散化模型,然后应用不等式技巧,获得系统永久持续生存的一个充分条件为 :假设(H1) :$r_1^L m > \alpha^U M_2$ 成立,则 $m_1 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\inf x(n)$，$m_2 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\inf y(n)$,其中 $m_1 = \min\left\{\dfrac{r_1^L m - \alpha^U M_2}{a^U m}, \dfrac{r_1^L m - \alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left(r_1^L - a^U(M_1+\varepsilon) - \dfrac{\alpha^U M_2}{m}\right)\right\}$,$m_2 = \min\left\{\dfrac{r_2^L}{b^U}, \dfrac{r_2^L}{b^U}\exp(r_2^L - b^U M_2)\right\}$。最后利用 Brouwer 不动点定理,得到系统正周期解的存在性。

关键词 :Holling 功能反应 ;捕食系统 ;永久持续生存 ;周期解
中图分类号 :O175　　**文献标识码** :A　　**文章编号** :1672-6693(2010)05-0033-04

在种群生态动力学中,多物种生态系统的各种功能性反应一直是诸多学者关注的问题,并进行了深入的研究[1-14]。1965 年,学者 Holling 在试验的基础上,针对不同的物种分别提出如下 3 种功能性反应的营养函数[1],Ⅰ. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}x, 0\leqslant x\leqslant a \\ b, x>a \end{cases}$;Ⅱ. $\varphi(x) = \dfrac{ax}{1+bx}$;Ⅲ. $\varphi(x) = \dfrac{ax^2}{1+bx^2}$。随后许多学者对具有 Holling 功能性反应的捕食系统进行了研究[1-7],其数学模型的一般形式为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xf(x) - y\varphi(x) \\ \dfrac{dy}{dt} = ky\varphi(x) - yg(x) \end{cases} \tag{1}$$

其中 x,y 分别为食饵种群和捕食者种群,均为连续变量,且假设 $f(x)>0$,$f'(x)\leqslant 0$(密度制约,或种类竞争),存在 $x_0>0$,使 $f(x_0)=0$,x_0 为无捕食者种群时 x 的环境容纳量,$g(0)=0$,$g'(y)\geqslant 0$(密度制约,或种内竞争),$\varphi(x)$为营养函数。当 $\varphi(x)$取上述 3 类函数之一时,分别被称为 Holling-Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ类功能反应的捕食系统模型。

最近,Wang & Sun[8]、Yang[9]等人研究了更一般形式的 Holling-N 类功能性反应函数的捕食系统,分别讨论了系统极限环的存在性和周期解的存在性问题,而对该类系统的持续生存性仍未讨论,本文将研究一类 Holling-N 类功能性反应的捕食系统离散模型的永久持续生存性和周期性质。

1 模型

考虑如下具有 Holling-N 类功能性反应的捕食系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\left(r_1(t) - a(t)x(t) - \dfrac{\alpha(t)x^n y}{1+mx^n}\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = y\left(r_2(t) - b(t)y(t) - \dfrac{\beta(t)x^n}{1+mx^n}\right) \end{cases} \tag{2}$$

* 收稿日期 :2009-11-26
资助项目 :国家自然科学基金(No. 10971240,No. 10926033,No. 10926170);重庆市自然科学基金(No. CSTC2008BB2364,No. CSTC2009BB2389);重庆市教委科研项目(No. KJ080806)
作者简介 :汤慧,女,硕士研究生,研究方向为微分方程与动力系统 ;通讯作者 :杨志春,Email :yangzhch@126. com

其中,x,y 分别表示食饵,捕食者种群密度,均具有 Holling 功能性反应和密度制约;$r_1(t)$,$r_2(t)$,$a(t)$,$b(t)$,$\alpha(t)$,$\beta(t)$ 均为$[0,+\infty)$上连续且非负的函数,$r_1(t)$,$r_2(t)$分别为食饵和捕食者的自然增长率(即出生率减去死亡率),$a(t)$,$b(t)$分别为食饵和捕食者的种内竞争率,$\alpha(t)$,$\beta(t)$为食饵和捕食者的种间竞争率,n 为正整数,当 $n=1,2$ 时,模型(2)式分别对应 Holling Ⅱ,Ⅲ类功能反应的捕食系统。

利用半离散方法,可以得到 Holling-N 类功能性反应的离散捕食系统

$$\begin{cases}x(n+1)=x(n)\exp\left\{\left[r_1(n)-a(n)x(n)-\dfrac{\alpha(n)x^n(n)y(n)}{1+mx^n(n)}\right]\right\}\\ y(n+1)=y(n)\exp\left\{\left[r_2(n)-b(n)y(n)+\dfrac{\beta(n)x^n(n)}{1+mx^n(n)}\right]\right\}\end{cases}\tag{3}$$

对任意有界序列 $\{f(n)\}$,定义$f^U=\sup\limits_{n\in N}f(n)$,$f^L=\inf\limits_{n\in N}f(n)$。

考虑实际问题的生物意义,所取的解 $\{x(n),y(n)\}$ 要满足条件 $x(0)>0$,$y(0)>0$。

2 持续生存性和周期性

定义 1 如果存在正常数 m_1,m_2 和 M_1,M_2,使得系统(3)式的每个正解$(x(n),y(n))$满足

$$m_1\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf x(n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup x(n)\leqslant M_1,m_2\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf y(n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup y(n)\leqslant M_2$$

则系统(3)式是永久持续生存的。

为了获得持续生存性,首先给出下面的引理。

引理 1[10] $\max\limits_{x\in\mathbf{R}}x\exp(a-bx)=\dfrac{\exp(a-1)}{b}$,其中 $a>0$,$b>0$。

引理 2 对于系统(3)式的每个解 $\{x(n),y(n)\}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\sup x(n)\leqslant M_1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sup y(n)\leqslant M_2$,其中 $M_1=\max\left\{\dfrac{r_1^U}{a^L},\dfrac{\exp(r_1^U-1)}{a^L}\right\}$,$M_2=\max\left\{\dfrac{\exp\left(r_2^U+\dfrac{\beta^U}{m}-1\right)}{a^L},\dfrac{r_2^U+\dfrac{\beta^U}{m}}{b^L}\right\}$。

证明 显然,$x(n)>0$,$y(n)>0$,$n\geqslant0$。下证$\lim\limits_{n\to\infty}\sup x(n)\leqslant M_1$,分以下两种情况证明。

第一种情况 存在一个 i,使得 $x(i+1)\geqslant x(i)$,利用方程(3)式有 $r_1(i)-a(i)x(i)-\dfrac{\alpha(i)x^n(i)y(i)}{1+mx^n(i)}\geqslant0$。由于 $\mathbf{R}_+^2$ 是正向不变集,所以有 $r_1(i)-a(i)x(i)-\dfrac{\alpha(i)x^n(i)y(i)}{1+mx^n(i)}\leqslant r_1^U-a^Lx(i)$。从而 $r_1^U-a^Lx(i)\geqslant0$,i. e.,$x(i)\leqslant\dfrac{r_1^U}{a^L}$。

代入(3)式的第一个式子,并应用引理 1,得

$$x(i+1)=x(i)\exp\left\{\left[r_1(i)-a(i)x(i)-\frac{\alpha(i)x^n(i)y(i)}{1+mx^n(i)}\right]\right\}\leqslant x(i)\exp(r_1^U-a(i)x(i))=\frac{\exp(r_1^U-1)}{a_1^L}$$

下面假设对任意的 $n\in\mathbf{N}$,都有 $x(n)\leqslant M_1$ 成立。否则,一定存在 $n_0>i$,使得 $x(n_0)>M_1$,则 $n_0\geqslant i+2$,令 $n_0'=i+2$ 是 $x(n_0')>M_1$ 成立的最小整数,则 $x(n_0'-1)<x(n_0')$,由上面的证明思路可以推出 $x(n_0')\leqslant M_1$,矛盾,故假设成立。

第二种情况 对所有的 $n\in\mathbf{N}$,$x(n+1)<x(n)$。这种情况下,$\lim\limits_{n\to\infty}x(n)$一定存在,记为 $\bar{x}$。假设 $\bar{x}\leqslant\dfrac{r_1^U}{a^L}$成立,不然$\lim\limits_{n\to\infty}\left[r_1(n)-a(n)x(n)-\dfrac{\alpha(n)x^n(n)y(n)}{1+mx^n(n)}\right]=0$。然而$\lim\limits_{n\to\infty}\left[r_1(n)-a(n)x(n)-\dfrac{\alpha(n)x^n(n)y(n)}{1+mx^n(n)}\right]\leqslant r_1^U-a^L\bar{x}<0$,这就得到矛盾,故假设成立,从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sup x(n)\leqslant M_1$ 成立。

同理可证$\lim\limits_{n\to\infty}\sup y(n)\leqslant M_2$。 证毕

引理 3 假设(H1):$r_1^Lm>\alpha^UM_2$ 成立,则 $m_1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\inf x(n)$,$m_2\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\inf y(n)$,其中

$$m_1=\min\left\{\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m},\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left(r_1^L-a^U(M_1+\varepsilon)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\right)\right\},m_2=\min\left\{\frac{r_2^L}{b^U},\frac{r_2^L}{b^U}\exp(r_2^L-b^U M_2)\right\}$$

证明　首先证明 $m_1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\inf x(n)$。由引理 2 知,存在 $i^*\in\mathbf{N}$,使得 $n\geqslant i^*$ 时,$x(n)\leqslant M_1+\varepsilon$,$y(n)\leqslant M_2+\varepsilon$。下面分两种情况证明结论。

第一种情况 存在一个 $i_0\geqslant i^*$,使 $x(i_0+1)\leqslant x(i_0)$ 成立。那么,当 $n\geqslant i_0$ 时

$$x(n+1)=x(n)\exp\left\{\left[r_1(n)-a(n)x(n)-\frac{\alpha(n)x^n(n)y(n)}{1+mx^n(n)}\right]\right\}\geqslant$$

$$x(n)\exp\left\{r_1(n)-a(n)x(n)-\frac{\alpha(n)M_2}{m}\right\}\geqslant x(n)\exp\left\{r_1^L-a^U x(n)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\right\}$$

当 $n=i_0$ 时,$r_1^L-a^U x(i_0)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\leqslant 0$,所以 $x(i_0)\geqslant\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m}$,则

$$x(i_0+1)\geqslant\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left\{r_1^L-a^U x(n)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\right\}\geqslant\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left\{r_1^L-a^U(M_1+\varepsilon)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\right\}$$

假设 $x(n)\geqslant\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left\{r_1^L-a^U(M_1+\varepsilon)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\right\}$,$n\geqslant i_0$。否则,存在一个 $p_0\geqslant i_0$,使得

$$x(p_0)\leqslant\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left\{r_1^L-a^U(M_1+\varepsilon)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\right\}$$

那么 $p_0\geqslant i_0+2$。令 $p_0'\geqslant i_0+2$ 是使 $x(p_0')\leqslant\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left\{r_1^L-a^U(M_1+\varepsilon)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\right\}$成立的最小的整数。则 $x(p_0'-1)>x(p_0')$,由以上证明思路可以得到 $x(p_0')\geqslant\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left\{r_1^L-a^U(M_1+\varepsilon)-\frac{\alpha^U M_2}{m}\right\}$,这就造成矛盾,从而假设成立。

第二种情况 对所有 $n\in\mathbf{N}$,有 $x(n+1)>x(n)$ 成立。那么$\lim\limits_{n\to\infty}x(n)$ 存在,记为 $\underline{x}$,证 $\underline{x}\geqslant\frac{r_1^L m-\alpha^U M_2}{a_m^U}$。

否则,有 $r_1^L-a^U\underline{x}-\frac{\alpha^U M_2}{m}\leqslant 0$。

对系统(3)式的第一个方程取极限,得$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{r_1(n)-a(n)x(n)-\frac{\alpha(n)x^n(n)y(n)}{1+mx^n(n)}\right\}=0$。但是

$$\lim_{n\to\infty}\left\{r_1(n)-a(n)x(n)-\frac{\alpha(n)x^n(n)y(n)}{1+mx^n(n)}\right\}\geqslant\lim_{n\to\infty}\left\{r_1(n)-a(n)x(n)-\frac{\alpha(n)M_2}{m}\right\}\geqslant r_1^L-a^U\underline{x}-\frac{\alpha^U M_2}{m}>0$$

这是一个矛盾,故假设成立,从而证明了 $m_1\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\inf x(n)$。

同理可证 $m_2\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\inf y(n)$。　　**证毕**

由引理 2 和引理 3 得 Holling-N 类功能性反应的离散捕食系统(3)式的持续生存性的充分条件。

定理 1　假设(H1)成立,则系统(3)式永久持续生存的。

在此基础上,进一步讨论系统的周期性。假设系统是 T-周期的,即(H2):$r_1(t)$,$r_2(t)$,$a(t)$,$b(t)$,$\alpha(t)$,$\beta(t)$ 均为 T-周期函数(T 为某正整数)。

定理 2　假设(H1),(H2)成立,则系统(3)式至少存在一个正的 T-周期解$(u(n),v(n))$,且$(u(n),v(n))$位于 $S=\{(x,y)\mid 0<m_1\leqslant x\leqslant M_1,0<m_2\leqslant y\leqslant M_2\}$ 中。

证明　定义 Poincare 映射 $U:\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+^2$,$U((x_0,y_0))=(x(T),y(T))$,其中$(x_0,y_0)\in\mathbf{R}_2^+$,$x(n)$,$y(n)$是周期系数方程(3)式满足初始条件 $x(0)=x_0$,$y(0)=y_0$ 的解。由 S 是有界闭凸集和定理 1,U 为映 S 到 S 的自映射,由解对初值的连续依赖性,U 为连续算子,由 Brouwer 不动点定理,S 中存在 U 的不动点,即周期系统(3)式至少存在一个 T-周期解$(u(n),v(n))$,且 $0<m_1\leqslant u(n)\leqslant M_1$,$0<m_2\leqslant v(n)\leqslant M_2$。　　**证毕**

参考文献：

[1] Holling C S. The functional response of predators-prey density and its role in mimicry and population regulation [M]. Dttawa: Mem Ent Sec Can, 1965: 3260.

[2] 马知恩. 种群生态学的数学模型与研究[M]. 合肥:安徽教育出版社,1994.

[3] 陈兰荪,宋新宇,陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 成都:四川科学技术出版社,2003.

[4] 戴国仁,徐长醒. 食饵种群具有常收获率和具有 Holling 第一类功能性反应的捕食系统[J]. 生物数学学报, 1991,6(3):155-162.

[5] 范猛,王克. 一类具有 Holling-II 型功能性反应的捕食者一食饵系统全局周期解的存在性[J]. 数学物理学报, 2001,21(4):492-497.

[6] 陈柳娟,孙建华. 一类 Holling 功能性反应模型极限环的唯一性[J]. 数学学报,2002, 45(2):383-388.

[7] 杨志春. 具有脉冲和 Holling-III 类功能反应的捕食系统的持久生存和周期解[J]. 生物数学学报,2004,19(4): 439-444.

[8] Wang W, Sun J. On the predator-prey system with Holling-(n+1) functional response [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2007, 23 (1): 1-6.

[9] 杨志春. 具有时变时滞和 Holling-N 类功能反应的脉冲捕食系统的周期解[J]. 数学的实践与认识, 2008,16: 10-14.

[10] Zhao X Q. The qualitative analysis of n-species Lotaka-Volterra periodic competition systems [J]. Math Comp Modelig, 1991, 15: 3-8.

[11] 王长有. 具分布时滞和扩散影响的捕食-食饵模型的周期解[J]. 重庆邮电学院学报(自然科学版),2006,18 (3): 409-412.

[12] 路亚朋,张睿,户红艳. 一类被开发的食饵捕食系统[J]. 重庆工学院学报(自然科学版),2009,23(1): 157-160.

[13] 唐小平,李靖云,高文杰. 食饵被开发并具有 Holling Ⅲ型的捕食系统周期解的存在性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2008,31(2):164-167.

[14] 田宝丹. 一类具有反馈控制和 Holling Ⅳ类功能反应的非自治捕食系统的渐近性质[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2006,29(6):672-675.

Persistence and Existence of Periodic Solution for Predator-Prey System with Holling-N Type Functional Response

TANG Hui, YANG Zhi-chun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Based on the previous studies of functional reaction Holling limited predator-prey system, this paper expands Limited class to N and discusses the permanence and existence of periodic solution for predator-prey system with Holling-N type functional response. Firstly, a discrete model of the system is formulated. Then, by the skills of inequalities, we obtain a sufficient condition ensuring the permanence for predator-prey system. $m_1 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \inf x(n)$, $m_2 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \inf y(n)$, where $m_1 = \min\left\{\frac{r_1^L m - \alpha^U M_2}{a^U m}, \frac{r_1^L m - \alpha^U M_2}{a^U m}\exp\left(r_1^L - a^U(M_1+\varepsilon) - \frac{\alpha^U M_2}{m}\right)\right\}$, $m_2 = \min\left\{\frac{r_2^L}{b^U}, \frac{r_2^L}{b^U}\exp(r_2^L - b^U M_2)\right\}$. Under the assumption of (H1), (H1): $r_1^L m > \alpha^U M_2$. Finally, based on the results, the existence of periodic solution of system is derived by using Brouwer fixed point theory.

Key words: Holling type functional response; predator-prey system; permanence; periodic solution

(责任编辑　黄　颖)