DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693.2010.05.009

# $r$-置换因子循环线性系统求解的快速算法*

陈　勇，何承源
(西华大学 数学与计算机学院，成都 610039)

摘要：在置换因子循环矩阵的基础上给出了 $r$-置换因子循环矩阵的概念，得到以这类矩阵为系数的线性方程组 $AX=b$ 有解的判定条件和快速算法。当 $r$-置换因子循环矩阵非奇异时，该快速算法求出线性方程组的唯一解，即存在唯一的 $r$-置换因子循环矩阵 $C\in PR_{CM_n}$，使 $AX=b$ 的唯一解是 $C$ 第一列；当 $r$-置换因子循环矩阵奇异时，该快速算法求出线性方程组的特解与通解，即存在唯一的 $r$-置换因子循环矩阵 $H\in PR_{CM_n}$ 及 $C\in PR_{CM_n}$，使得 $C$ 的第一列 $X_1$ 是 $AX=b$ 的一个特解，而且 $X=X_1+(I-H)Z$ 是 $AX=b$ 的通解，这里 $Z$ 是任意的 $n$ 维列向量。

关键词：线性方程组；算法；$r$-置换因子循环矩阵；唯一解；通解
中图分类号：O151　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2010)05-0037-05

## 1 预备知识

循环矩阵是一类很重要的特殊矩阵。在信号处理、数字图像处理、编码理论、自回归滤波器设计、计算机时序分析等领域中，经常会遇到以这类矩阵为系数的线性方程组的求解问题。自 1991 年，L. Stuart 和 J. R. Weaver 提出并研究了置换因子循环矩阵的基本性质[1]。作为一种特殊的循环矩阵——置换因子循环矩阵，也开始成为人们的研究课题。由于这类特殊矩阵具有许多特殊而良好的性质和结构，对其进行推广并探讨其性质和应用显得很有必要。有学者分别对诣零矩阵和拟阵、置换因子循环矩阵、鳞状因子循环矩阵或以它们为系数的线性方程组进了研究[2-8]。受此启发，本文利用多项式理论给出了 $r$-置换因子循环矩阵的概念，得到以这类矩阵为系数的方程 $AX=b$ 有解的条件以及它的唯一解和无穷通解的结构和算法。当 $r$-置换因子循环矩阵非奇异时，该快速算法求出线性方程组的唯一解；当 $r$-置换因子循环矩阵奇异时，该快速算法求出线性方程组的特解与通解。而且还发现解这类线性方程组不需要预先判断它是否有解，而是将有解与无解的判断和求解的过程一并进行。

下设 $M_n$ 为实数域上所有 $n$ 阶矩阵所组成的集合。

**定义 1**[9]　称一个 $n$ 阶置换矩阵 $P$ 为基本置换因子循环矩阵，当且仅当

$$P^n=I_n \tag{1}$$

这里 $I_n$ 是一个 $n$ 阶单位矩阵，$n$ 是满足(1)式的最小正整数。

显然，$P$ 是一个正规矩阵且特征多项式和极小多项式都是 $x^n-1$。

**定义 2**　设 $P$ 为满足(1)式的 $n$ 阶基本置换因子循环矩阵，对于 $M_n$ 中的矩阵 $P_r$，如果满足

$$P_r=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&r\end{pmatrix}P \tag{2}$$

则称 $P_r$ 为 $r$-基本置换因子循环矩阵，本文用 $PR$ 表示 $M_n$ 中的所有 $r$-基本置换因子循环矩阵组成的集合。当 $r=1$ 时，$P_r$ 为一般的基本置换因子循环矩阵。可以验证 $P_r^n=rI_n$，且 $P_r$ 的特征多项式是 $x^n-r$。本文用 $g(x)$ 表示 $P_r$ 的特征多项式(下同)。

**定义 3**　设 $P_r\in PR$，对于 $M_n$ 中的矩阵 $A$，如果满足

$$A=h(P_r)=a_0P_r^0+a_1P_r+a_2P_r^2+\cdots+a_{n-1}P_r^{n-1}$$

则称 $A$ 为 $r$-置换因子循环矩阵。其中 $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 是 $A$ 的第一行元素 $(a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_{n-1}})$ 除去 $r$ 因子后对应于 $P_r$ 的一个重排，方法是若 $P^m$ 的第一行第 $i$ 个元素 $c_{1i}$ 不为零，则取 $a_m=\frac{1}{c_{1i}}a_{i_{i-1}}$ $(m=0,1,\cdots,n-1$；$i=1,2,\cdots,n)$。规定 $P_r^0=I_n$，称 $h(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$ 为

* 收稿日期：2009-11-30
作者简介：陈勇，男，讲师，硕士，研究方向为矩阵理论及其应用。

$A$ 的伴随多项式(下同)。本文用 $RP_{CM_n}$ 表示 $M_n$ 中的所有 $r$-置换因子循环矩阵组成的集合。

**定义4**[10] 设 $A,B\in M_n$ 满足下列两个方程 1) $ABA=A$;2) $BAB=B$,则称 $B$ 为 $A$ 的一个反射 $g$ 逆,简记为 $A^{\{1,2\}}$。若只满足条件 1),则称 $B$ 为 $A$ 的 $\{1\}$-逆。

**引理1**[11] 设多项式矩阵$\begin{pmatrix} h(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$经初等行变换化为$\begin{pmatrix} d(x) & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$,则 $(h(x),g(x))=d(x)$ 且满足 $h(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$。

**引理2** 设 $A\in PR_{CM_n}$,则 $A$ 的特征值为 $h(\omega_j)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\omega_j^i$,其中 $\omega_j$ 是 $g(x)$ 的 $n$ 个不同的根,$j=0,1,\cdots,n-1$。

**证明** 因为 $P_r$ 的特征多项式 $g(x)=|xI-P_r|=x^n-r$,所以 $P_r$ 特征根为 $\omega_k=\sqrt[n]{|r|}(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})$,$k=0,1,\cdots,n-1$,由于 $\omega_k\neq\omega_j(k\neq j)$,即 $P_r$ 的特征多项式 $g(x)$ 有 $n$ 个不同的特征根,故 $P_r$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量,从而 $P_r$ 可以对角化。即存在可逆矩阵 $T$,使得

$$P_r=T\,diag(\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1})T^{-1}$$

又 $A\in PR_{CM_n}$,所以

$$A=h(P_r)=a_0P_r^0+a_1P_r^1+\cdots+a_{n-1}P_r^{n-1}$$

在上式的两边左乘 $T^{-1}$ 和右乘 $T$,于是

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= T^{-1}(a_0I+a_1P_r+a_2P_r^2+\cdots+a_{n-1}P_r^{n-1})T= \\ & a_0T^{-1}IT+a_1T^{-1}P_rT+a_2T^{-1}P_r^2T+\cdots+a_{n-1}T^{-1}P_r^{n-1}T= \\ & a_0I+a_1(T^{-1}P_rT)+a_2(T^{-1}P_rT)^2+\cdots+a_{n-1}(T^{-1}P_rT)^{n-1}= \\ & a_0E+a_1diag(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-1})+ \\ & a_2diag(\omega_0^2,\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_{n-1}^2)+\cdots+ \\ & a_{n-1}diag(\omega_0^{n-1},\omega_1^{n-1},\omega_2^{n-1},\cdots,\omega_{n-1}^{n-1})= \\ & diag\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_i\omega_0^i,\sum_{i=0}^{n-1}a_i\omega_1^i,\sum_{i=0}^{n-1}a_i\omega_2^i,\cdots,\sum_{i=0}^{n-1}a_i\omega_{n-1}^i\right)= \\ & diag(h(\omega_0),h(\omega_1),h(\omega_2),\cdots,h(\omega_{n-1}))=D \end{aligned}$$

即 $A$ 与对角矩阵 $D$ 相似,由于相似矩阵具有相同的特征值,故 $A$ 的特征值

$$\lambda_j=h(\omega_j)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(\omega_j^i)$$ 证毕

**引理3** 设 $A\in PR_{CM_n}$,$B\in PR_{CM_n}$,则 $AB=BA\in PR_{CM_n}$。

**证明** 设 $A\in PR_{CM_n}$,$B\in PR_{CM_n}$,$A$、$B$ 伴随多项式分别为 $h_1(x)$、$h_2(x)$,则 $AB$ 的伴随多项式为 $h_1(x)h_2(x)$,$BA$ 的伴随多项式为 $h_2(x)h_1(x)$。由于 $h_1(x)h_2(x)=h_2(x)h_1(x)$,于是令 $x=P_r$,即有 $AB=BA\in PR_{CM_n}$。 证毕

**引理4**[10] 设 $B$ 是 $m\times n$ 矩阵 $A$ 的一个 $\{1\}$-逆,如果线性方程 $AX=b$ 有解,则其通解可表示为 $x=Bb+(I-BA)Z$,这里 $Z$ 是任意 $n$ 维向量。

## 2 主要结论

**定理** $r$-置换因子循环矩阵线性方程组 $AX=b$ 有唯一解的充要条件是 $(h(x),g(x))=1$。当 $r$-置换因子循环矩阵线性方程组 $AX=b$ 有唯一解时,存在唯一的 $r$-置换因子循环矩阵 $C\in PR_{CM_n}$,使 $AX=b$ 的唯一解是 $C$ 第一列。

**证明** 充分性。由于 $(h(x),g(x))=1$,由引理1,对多项式矩阵$\begin{pmatrix} h(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$进行一系列初等行变换化为$\begin{pmatrix} 1 & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$,因而得到 $u(x)h(x)+v(x)g(x)=1$。取 $x=P_r$,由于 $h(P_r)=A$,$g(P_r)=0$,所以 $Au(P_r)=I_n$。故 $A$ 非奇异,线性方程组 $AX=b$ 有唯一解。

必要性。由于线性方程组 $AX=b$ 有唯一解,所以 $A$ 非奇异,由引理2知 $A$ 的行列式 $\prod_{j=0}^{n-1}h(w_j)\neq 0$,其中 $w_j$ 是 $g(x)$ 的 $n$ 个不同的根,$j=0,1,\cdots,n-1$。因此 $g(x)$ 的 $n$ 个不同的根都不是 $h(x)$ 的根,所以 $(h(x),g(x))=1$。

设 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$,根据 $r$-置换因子循环矩阵元素的结构,构造以 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$ 为第一列的 $r$-置换因子循环矩阵 $B$,则 $B$ 具有形式

$$B=m(P_r)=b_{i_0}P_r^0+b_{i_1}P_r+b_{i_2}P_r^2+\cdots+b_{i_{n-1}}P_r^{n-1}$$

其中 $b_{i_0},b_{i_1},\cdots,b_{i_{n-1}}$ 是 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$ 相对于 $P_r^0,P_r^1,\cdots,P_r^{n-1}$ 的一个重排,方法是若 $P_r^m$ 的第一列第 $i$ 个元素 $a_{i1}$ 不为零,则取

$$b_{i_m}=\frac{1}{a_{i1}}b_{i-1}(m=0,1,\cdots,n-1;i=1,2,\cdots,n)$$

由于 $P_r^m$ 第一列只有一个元素不为零,而且 $m$ 不同这个不为零的元素 $a_{i1}$ 的位置也不同,因此这样 $B$ 的是唯一的,而且 $B$ 的伴随多项式为 $m(x)=\sum_{j=0}^{n-1}b_{i_j}x^j$(下同)。并由引理1对多项式矩阵$\begin{pmatrix} h(x) & 1 & 0 & m(x) \\ g(x) & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$只进行一系列的行初等变换一定能化为

$\begin{pmatrix}1 & u(x) & v(x) & c(x)\\ 0 & s(x) & t(x) & c_1(x)\end{pmatrix}$,于是有 $\begin{pmatrix}u(x) & v(x)\\ s(x) & t(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h(x)\\ g(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}u(x) & v(x)\\ s(x) & t(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m(x)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c(x)\\ c_1(x)\end{pmatrix}$。故 $u(x)h(x)+v(x)g(x)=1$,$u(x)m(x)=c(x)$。若取 $x=P_r$,则 $h(P_r)=A$,$g(P_r)=0$,$m(P_r)=B$,于是 $Au(P_r)=I_n$,$u(P_r)B=c(P_r)$。所以 $A^{-1}=u(P_r)\in PR_{CM_n}$。若取 $C=c(P_r)=A^{-1}B$,则由引理3知 $C\in PR_{CM_n}$ 且 $C$ 的第一列是 $A^{-1}b$。由于 $AA^{-1}b=b$,于是 $C$ 的第一列就是 $AX=b$ 的解。因 $A^{-1}$ 和 $B$ 都是唯一的,所以 $A^{-1}b$ 是唯一的。 证毕

**定理2** $r$-置换因子循环矩阵线性方程组 $AX=b$ 有无穷解的充要条件是 $(h(x),g(x))\neq 1$ 且 $AA^{\{1,2\}}=b$。当 $r$-置换因子循环矩阵线性方程组 $AX=b$ 有无穷解时,存在唯一的 $r$-置换因子循环矩阵 $H\in PR_{CM_n}$ 及 $C\in PR_{CM_n}$,使得 $C$ 的第一列 $X_1$ 是 $AX=b$ 的一个特解,而且 $X=X_1+(I-H)Z$ 是 $AX=b$ 的通解,这里 $Z$ 是任意的 $n$ 维列向量。

**证明** 充分性。由于 $(h(x),g(x))=d(x)\neq 1$,则存在 $h_1(x)$ 满足 $h(x)=d(x)h_1(x)$。设 $w_j$ 是 $g(x)$ 的 $n$ 个不同的根,$j=0,1,\cdots,n-1$,于是在 $w_j$ 中至少存在一个 $w_i$,使得 $d(w_i)=0$,从而得到 $h(w_i)=0$,这样 $A$ 的行列式 $\prod_{j=0}^{n-1}h(w_j)=0$,说明秩 $A<n$。又由于 $AA^{\{1,2\}}=b$,所以 $r$-置换因子循环矩阵线性方程组 $AX=b$ 有无穷解。

必要性。由于 $r$-置换因子循环矩阵线性方程组 $AX=b$ 有无穷解,所以 $A$ 奇异。由引理2知 $A$ 的行列式 $\prod_{j=0}^{n-1}h(w_j)=0$,其中 $w_j$ 是 $g(x)$ 的 $n$ 个不同的根,$j=0,1,\cdots,n-1$,因此 $h(x)$ 和 $g(x)$ 有公共根,即 $(h(x),g(x))\neq 1$。

由 $(h(x),g(x))=d(x)\neq 1$,若设

$$h(x)=d(x)h_1(x),g(x)=d(x)g_1(x)$$

则 $(h_1(x),g_1(x))=1$。因为 $g(x)$ 无重根,所以 $(d(x),g_1(x))=1$。于是

$$(h(x),g_1(x))=(d(x)h_1(x),g_1(x))=1$$

从而 $(h(x)d(x),g_1(x))=1$。

设 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$,同定理1,构造以 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$ 为第一列的 $r$-置换因子循环矩阵 $B$,则 $B$ 具有形式

$$B=m(P_r)=b_{i_0}P_r^0+b_{i_1}P_r+b_{i_2}P_r^2+\cdots+b_{i_{n-1}}P_r^{n-1}$$

同理取 $B$ 的伴随多项式为 $m(x)=\sum_{j=0}^{n-1}b_{i_j}x^j$。由引理1,对多项式

$$\begin{pmatrix}h(x)d(x) & 1 & 0 & m(x)d(x) & h(x)d(x)\\ g_1(x) & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

只进行一系列行初等变换就能化为多项式矩阵 $\begin{pmatrix}1 & u_1(x) & v_1(x) & c(x) & h_1(x)\\ 0 & s_1(x) & t_1(x) & c_1(x) & h_2(x)\end{pmatrix}$。因此有

$$h(x)d(x)u_1(x)+g_1(x)v_1(x)=1 \quad (3)$$

$$d(x)u_1(x)m(x)=c(x) \quad (4)$$

$$d(x)u_1(x)h(x)=h_1(x) \quad (5)$$

在(3)式两端右乘以 $h(x)$,得

$$h(x)d(x)u_1(x)h(x)+g_1(x)v_1(x)h(x)=h(x)$$

于是

$$h(x)d(x)u_1(x)h(x)+g(x)h_1(x)v_1(x)=h(x) \quad (6)$$

在(4)~(6)式中令 $x=P_r$,由于 $h(P_r)=A$,$g(P_r)=0$,$m(P_r)=B$,所以

$$d(P_r)u_1(P_r)B=c(P_r) \quad (7)$$

$$d(P_r)u_1(P_r)A=h_1(P_r) \quad (8)$$

$$Ad(P_r)u_1(P_r)A=A \quad (9)$$

同理在(3)式两端左乘以 $d(x)u_1(x)$,并令 $x=P_r$ 得

$$d(P_r)u_1(P_r)Ad(P_r)u_1(P_r)=d(P_r)u_1(P_r) \quad (10)$$

由(9)、(10)两式知,$r$-置换因子循环矩阵 $T=d(P_r)u_1(P_r)$ 是 $A$ 的反射 $g$ 逆。取 $C=c(P_r)=TB$,$H=h_1(P_r)=TA$,对 $TB=C$,且 $C$ 的第一列是 $Tb=X_1$。同时有

$$A(X_1+(I-H)Z)=ATb+A(I-H)Z=b+AZ-ATAZ=b$$

这里 $Z$ 是任意的 $n$ 维列向量。由引理4知 $X=X_1+(I-H)Z$ 是 $AX=b$ 的通解。

由于 $A$,$T$ 都是 $r$-置换因子循环矩阵,所以有 $AT=TA$,若还存在一个 $r$-置换因子循环矩阵 $T_0$,满足 $T_0AT_0=T$,$AT_0A=A$。设 $AT=TA=K$,$T_0A=AT_0=Q$。由 $K^2=TATA=TA=K$,$Q^2=T_0AT_0A=T_0A=Q$,于是 $K=AT=AT_0AT=QK$,$Q=T_0A=T_0ATA=QK$,所以 $K=Q$。从而

$$T=TAT=KT=QT=T_0AT=T_0Q=T_0AT_0=T$$

这就证明了 $T$ 是唯一的,而且 $C=TB$,$H=TA$ 也是唯一的,$Tb$ 也唯一。 证毕

可以看出,文献[5-7]中的结论都是本文定理1和定理2的特殊情况。

## 3 算法及举例

求解 $r$-置换因子循环线性系统 $AX=b$ 的一般步骤如下。

步骤1 由循环矩阵 $A\in PR_{CM_n}$,找出 $P_r$,得到3个多项式 $h(x)$,$g(x)$,$m(x)$。

步骤2 对多项式矩阵 $\begin{pmatrix} h(x) & m(x)\\ g(x) & 0\end{pmatrix}$ 只进行初等行变换化为 $\begin{pmatrix} d(x) & c(x)\\ 0 & c_1(x)\end{pmatrix}$。

步骤3 若 $d(x)=1$,则方程组的解唯一,且 $C=c(P_r)$ 的第一列就是它的解。

步骤4 若 $d(x)\neq 1$,用 $g(x)$ 除以 $d(x)$ 得到 $g_1(x)$,再对多项式矩阵

$$\begin{pmatrix} h(x)d(x) & m(x)d(x) & h(x)d(x) & d(x)h(x)m(x)\\ g_1(x) & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

只进行一系列初等行变换就能化为多项式矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & c(x) & h_1(x) & r(x)\\ 0 & c_1(x) & h_2(x) & r_1(x)\end{pmatrix}$。

步骤5 对于 $r(x)$,取 $x=P_r$,则 $R=r(P_r)=AA^{\{1-2\}}B$。若 $R$ 的第一列就是 $n$ 维向量 $b$,则线性方程组有解(否则无解)。这时 $C=c(P_r)=AA^{\{1-2\}}B$,$H=h_1(P_r)=AA^{\{1-2\}}A$,且 $C$ 的第一列就是方程组 $AX=b$ 的一个特解,进而可以得到通解为 $X=X_1+(I-H)Z$,这里 $Z$ 是任意的 $n$ 维列向量。

例1 解线性方程组 $AX=b$。其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -1\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix},b=(1,2,4)^{\mathrm T}$$

解 由于 $A=I-P_r+2P_r^2$,这里 $P_r=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}P$,$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,且 $P^3=I_3$,于是 $A$ 是一个 $r$-置换因子循环矩阵。并且 $h(x)=1-x+2x^2$,$g(x)=x^3-2$,$m(x)=1+2x+x^2$。取 $A(x)=\begin{pmatrix} h(x) & m(x)\\ g(x) & 0\end{pmatrix}$,对 $A(x)$ 只进行初等行变换

$$A(x)=\begin{pmatrix} 2x^2-x+1 & x^2+2x+1\\ x^3-2 & 0\end{pmatrix}\to\cdots\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{86}(-2x^4+14x^3+44x^2+38x+10)\\ -10x-4 & -2x^4-6x^3-6x^2-2x\end{pmatrix}$$

这时 $d(x)=1$,方程组的解唯一。由

$$c(x)=\frac{1}{86}(-2x^4+14x^3+44x^2+38x+10)$$

计算出 $C=\frac{1}{86}\begin{pmatrix} 38 & 34 & 44\\ 88 & 38 & 34\\ 68 & 88 & 38\end{pmatrix}$,于是原方程组的解为 $C$ 的第一列,即 $X=\left(\frac{19}{43},\frac{44}{43},\frac{34}{43}\right)^{\mathrm T}$。

例2 解线性方程组 $AX=b$,其中

$$A=-2I-P_r+P_r^2,P_r=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 8 & 0 & 0\end{pmatrix},b=(-6,8,8)^{\mathrm T}$$

解 由于 $A$ 是一个 $r$-置换因子循环矩阵。并且 $h(x)=x^2-x-2$,$g(x)=x^3-8$,$m(x)=x^2+x-6$。用例1的方法可以求得 $d(x)=x-2$,这时 $g_1(x)=\frac{g(x)}{d(x)}=x^2+2x+4$。构造多项式矩阵 $A_1(x)=\begin{pmatrix} h(x)d(x) & m(x)d(x) & h(x)d(x) & d(x)h(x)m(x)\\ g_1(x) & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$。

对 $A_1(x)$ 只进行初等行变换

$$A_1(x)=\begin{pmatrix} x^3-3x^2+4 & x^3-x^2+8x+12 & x^3-3x^2+4 & x^5-2x^4-9x^3+22x^2+4x-24\\ x^2+2x+4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} 1 & a_0 & b_0 & c_0\\ 6x+24 & a_1 & b_1 & c_1\end{pmatrix}$$

其中

$$a_0=-\frac{1}{360}(5x^4-15x^3-30x^2+140x-120)=c(x)$$

$$b_0=-\frac{1}{360}(5x^4-25x^3+30x^2+20x-40)=h_1(x)$$

$$c_0=-\frac{1}{360}(5x^6-20x^5-25x^4+200x^3-200x^2-160x+240)=r(x)$$

经计算可知

$$R=-\frac{1}{360}(5P_r^6-20P_r^5-25P_r^4+200P_r^3-200P_r^2-160P_r+240I$$

的第一列就是 $b=(-6,8,8)^{\mathrm T}$,于是方程组有无穷解。这时

$$C=-\frac{1}{360}(5P_r^4-15P_r^3-30P_r^2+140P_r-120I)$$

计算出 $C$ 的第一列为 $X_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-4\right)^{\mathrm T}$ 是一个特

解，且 $H=-\frac{1}{360}(5P_r^4-25P_r^3+30P_r^2+20P_r-40I)=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}8&-2&-1\\-8&8&-2\\-16&-8&8\end{pmatrix}$。

所以，这个方程组的通解为 $X=X_1+(I-H)Z=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-4\right)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4&2&1\\8&4&2\\16&8&4\end{pmatrix}Z$，这里 $Z$ 是任意的 $n$ 维列向量。

## 参考文献：


[1] Stuart J L, Weaver J R. Matrices that commute with a permutations matrix [J]. Linear Algebra and Its Appl, 1991, 150: 255-265.

[2] 汪定国. 诣零矩阵和拟阵[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, 22(3): 1-3.

[3] 江兆林, 刘三阳. 求置换因子循环矩阵逆阵和广义逆阵的快速算法[J]. 高等学校计算数学学报, 2003, 25(3): 227-234.

[4] 江兆林, 刘三阳. 置换因子循环矩阵求逆和广义逆的 Euclid 算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2004, 31(1): 148-152.

[5] 何承源, 罗新建. 鳞状因子循环矩阵方程解的条件与求解的快速算法[J]. 工程数学学报, 2007, 24(3): 1-8.

[6] 何承源. r-循环线性系统求解的快速算法[J]. 系统科学与数学, 2001, 21(2): 182-189.

[7] 崔艳, 朱灵. 置换因子循环线性系统求解的快速算法[J]. 宁波大学学报(理工版), 2008, 21(4): 533-537.

[8] 王正华, 何承源. (m, n)型二重(R, r)-循环线性系统求解的快速傅里叶算法[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2003, 26(2): 143-147.

[9] 江兆林, 周章鑫. 循环矩阵[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1999.

[10] 李乔. 矩阵论八讲[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[11] 张小红, 蔡秉衡. 高等代数专题研究选编[M]. 西安: 西安科学技术出版社, 1990.


# Fast Algorithm for Solution of *r*-Permutation Factor Circulant Linear Systems


*CHEN Yong*, *HE Cheng-yuan*

(School of Mathematics and Computer Engineering, Xihua University, Chengdu 610039, China)



**Abstract**: In this paper, $r$-permutation factor circulant matrix is defined based on the permutation factor circulant matrix, and a fast algorithm for conditions of solution and solution of $r$-permutation factor circulant matrix linear equations $AX=b$ are presented. When $r$-permutation factor circulant matrix are nonsingular, this algorithm computes the single solution of $r$-permutation factor circulant matrix linear equations, that is, there exists a unique $r$-permutation factor circulant matrix $C\in PR_{CM_n}$, which the only solution of $AX=b$ is the first column of $C$; When $r$-permutation factor circulant matrix are singular, it computes the special solution and general of $r$-permutation factor circulant matrix linear equations, which there is a unique $r$-permutation factor circulant matrix $H\in PR_{CM_n}$ and $C\in PR_{CM_n}$ makes the first column $X_1$ of $C$ is a special solution of $AX=b$, but also the $X=X_1+(I-H)Z$ is the general solution of $AX=b$, here $Z$ is an $n$ arbitrary-dimensional column vectors.



**Key words**: linear equations; algorithm; $r$-permutation factor circulant matrix; the single solution; the general solution



(责任编辑 黄 颖)