2010 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2010
第 27 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 27 No. 5

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 05. 011

一类带有状态时滞中立系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计*

王月娥,吴保卫
(陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062)

摘要:本文对带有状态时滞的不确定中立系统的满阶鲁棒 H_∞ 滤波器设计问题进行了研究,目的是对于所容许的不确定性和时滞,设计一个满阶滤波器使得滤波误差动态系统是渐近稳定的并且满足给定的 H_∞ 性能要求。在 Lyapunov 稳定性理论的基础上,通过使用 LMI 方法得到了满足要求的满阶鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件:$\tilde{\Omega}_0<0, X-Y>0$。并且当这些条件满足时,给出了所求的鲁棒 H_∞ 滤波器。最后用数值算例验证了结论的可行性和有效性。

关键词:中立系统;渐近稳定性;鲁棒 H_∞ 滤波器;LMI
中图分类号:O231 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2010)05-0046-08

近年来,关于鲁棒 H_∞ 滤波器的设计问题得到了广泛关注,已经成为控制理论中的一个热点问题[1-10]。其中包括带有分布时滞以及状态时滞的系统的满阶 H_∞ 滤波器设计[1];带有分布时滞的系统[2-3]。本文则是针对带有状态时滞以及中立项的中立系统的满阶 H_∞ 滤波器设计进行了研究,得到了滤波误差动态系统的渐近稳定性的充分条件以及鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件,并且运用 LMI 方法研究了具有状态时滞的中立系统的鲁棒 H_∞ 满阶滤波器设计问题。

本文采用以下的记号:$\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 分别表示 n 维欧几里得空间和所有的 $n\times n$ 实矩阵集合;对于实对称矩阵 X 和 Y,$X\geqslant Y(X>Y)$ 表示 $X-Y$ 为半正定矩阵(正定矩阵);矩阵 M^{T} 表示矩阵 M 的转置;M^{-1} 表示 M 的逆矩阵;“$*$”表示对称矩阵的主对角线以上块矩阵的转置矩阵;I 和 O 分别表示适当阶数的单位矩阵和零矩阵;$L_2[0,\infty)$ 表示在范数 $\|\cdot\|$ 下,在 $[0,\infty)$ 上平方可积的函数空间,其中 $\|\cdot\|$ 是欧几里得向量范数。

1 问题描述

考虑如下形式中立系统

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-h)+C\dot{x}(t-h)+E\omega(t)\\ y(t)=A_1(t)x(t)+B_1(t)x(t-h)+C_1\dot{x}(t-h)+E_1\omega(t)\\ z(t)=Lx(t)+L_1x(t-h)+L_2\dot{x}(t-h)\\ x(t)=\Psi(t),\forall t\in[-h,0]\end{cases}$$

其中 $x(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量,$y(t)\in\mathbf{R}^m$ 是测量输出,$\omega(t)\in\mathbf{R}^p$ 是扰动输入,且 $\omega(t)\in L_2[0,\infty)$,$z(t)\in\mathbf{R}^q$ 是待估计信号,$\Psi(t)$ 是在区间 $[-h,0]$ 上连续的初始向量值函数,h 是定常时滞,不确定矩阵 $A(t),B(t),A_1(t),B_1(t)$ 满足

$$A(t)=A+\Delta A(t),B(t)=B+\Delta B(t),A_1(t)=A_1+\Delta A_1(t),B_1(t)=B_1+\Delta B_1(t)$$

上式的 $\Delta A(t),\Delta B(t),\Delta A_1(t),\Delta B_1(t)$ 由 $\begin{pmatrix}\Delta A(t) & \Delta B(t)\\ \Delta A_1(t) & \Delta B_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}F(t)\begin{pmatrix}V_1 & V_2\end{pmatrix}$ 给出,其中 M_1,M_2,V_1,V_2 是已知相应维数的实矩阵,$F(t)$ 是不确定矩阵,且 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$。

现在考虑如下的关于信号 $z(t)$ 估计的满阶滤波器 $\Sigma_f:\begin{cases}\dot{\hat{x}}(t)=A_f\hat{x}(t)+B_fy(t)\\ \hat{z}(t)=C_f\hat{x}(t)+D_fy(t)\end{cases}$,其中 $\hat{x}(t)\in\mathbf{R}^n$,$\hat{z}(t)\in$

* 收稿日期:2009-09-02
资助项目:国家自然科学基金(No. 10571114);陕西省自然科学基础研究计划项目(No. SJ08A20)
作者简介:王月娥,女,博士研究生,研究方向为控制理论;通讯作者:吴保卫,E-mail:wubw@snnu.edu.cn

$\mathbf{R}^q$,A_f,B_f,C_f,D_f 是适当维数的待定矩阵。

那么由系统 Σ 和 Σ_f 得到的滤波误差动态系统就可以表示为以下形式

$$\tilde{\Sigma}:\begin{cases}\dot{\xi}(t)=A_c(t)\xi(t)+B_c(t)H\xi(t-h)+C_cH\dot{\xi}(t-h)+E_c\omega(t)\\ \tilde{z}(t)=L_c(t)\xi(t)+L_{c1}(t)H\xi(t-h)+L_{c2}H\dot{\xi}(t-h)+E_{c1}\omega(t)\end{cases}$$

其中 $\xi(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ \hat{x}(t)\end{pmatrix}$,$\tilde{z}(t)=z(t)-\hat{z}(t)$,$A_c(t)=A_c+\Delta A_c(t)$,$B_c(t)=B_c+\Delta B_c(t)$

$$A_c=\begin{pmatrix}A & 0\\ B_fA_1 & A_f\end{pmatrix},\Delta A_c(t)=\begin{pmatrix}\Delta A(t) & 0\\ B_f\Delta A_1(t) & 0\end{pmatrix},B_c=\begin{pmatrix}B\\ B_fB_1\end{pmatrix},C_c=\begin{pmatrix}C\\ B_fC_1\end{pmatrix},\Delta B_c(t)=\begin{pmatrix}\Delta B(t)\\ B_f\Delta B_1(t)\end{pmatrix},E_c=\begin{pmatrix}E\\ B_fE_1\end{pmatrix},$$

$$L_c(t)=L_c+\Delta L_c(t),L_{c1}(t)=L_{c1}+\Delta L_{c1}(t),L_c=(L-D_fA_1-C_f),\Delta L_c(t)=(-D_f\Delta A_1(t)\quad 0),H=(I\quad 0)$$

$$L_{c1}=L_1-D_fB_1,\Delta L_{c1}(t)=-D_f\Delta B_1(t),L_{c2}=L_2-D_fC_1,E_{c1}=-D_fE_1$$

本文研究的中立系统的满阶鲁棒 H_∞ 滤波器问题就是对于系统 Σ,给定一个常数 $\gamma>0$,确定一个形如 Σ_f 的滤波器,使得由 Σ 和 Σ_f 得到的滤波误差动态系统 $\tilde{\Sigma}$ 是渐近稳定的,并且满足预先给定的 H_∞ 性能 γ,也就是对于任意非零的 $\omega(t)\in L_2[0,\infty)$,有 $\|\tilde{z}(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega(t)\|_2$,在这种情况下就称滤波误差动态系统的噪音衰减保 γ 水平。

引理 1[5]　对给定的对称矩阵 $S=\begin{pmatrix}S_{11} & S_{12}\\ * & S_{22}\end{pmatrix}<0$,其中 $S_{11}=S_{11}^{\mathrm{T}}$,$S_{22}=S_{22}^{\mathrm{T}}$,则下列条件等价:1)$S_{11}<0$,$S_{22}-S_{12}^{\mathrm{T}}S_{11}^{-1}S_{12}<0$;2)$S_{22}<0$,$S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}}<0$。

引理 2[6]　对给定的正定矩阵 $M\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$0\leqslant h_m\leqslant h(t)\leqslant h_M$,$t\geqslant 0$,以及任意的可微向量函数 $x(t)\in\mathbf{R}^n$,下面命题成立,$\left(\int_{t-h_m}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}M\left(\int_{t-h_m}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right)\leqslant h_m\int_{t-h_m}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)M\dot{x}(s)\mathrm{d}s$,$t\geqslant 0$。

引理 3[7]　对给定的适当维数的矩阵 M,U,W,其中 M 是对称,则 $M+UVW+W^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}<0$,对所有满足 $W^{\mathrm{T}}\leqslant I$ 的矩阵成立,当且仅当存在一个常数 $\lambda>0$,使得 $M+\lambda^{-1}UU^{\mathrm{T}}+\lambda W^{\mathrm{T}}W<0$。

假定 1　矩阵 C,C_1,C_cH,$L_{c2}H$ 的所有特征值都在单位圆内。

2 鲁棒 H_∞ 性能分析

下面将通过使用 LMI 方法给出能够使得滤波误差动态系统 $\tilde{\Sigma}$ 达到鲁棒渐近稳定的充分条件。

定理 1　考虑滤波误差动态系统 $\tilde{\Sigma}$,当 $\omega(t)\equiv 0$ 时,对于给定的 $h>0$,在假定 1 下,如果存在矩阵 $P>0$,$W_1>0$,$W_2>0$,$R>0$,$Q_1>0$,$Q_2>0$,以及任意恰当维数的矩阵 N_i,T_i,$i=1,\cdots,5$,使得 $\Sigma<0$ 成立,那么该误差动态系统就是鲁棒渐近稳定的。其中

$$\Sigma:\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} & -hH^{\mathrm{T}}N_1 & -hH^{\mathrm{T}}T_1 & A_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & A_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}Z & P\tilde{M}\\ * & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} & -hN_2 & -hT_2 & B_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & B_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}Z & 0\\ * & * & \Sigma_{33} & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}T_4^{\mathrm{T}} & -hN_3 & -hT_3 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -R & -hN_4 & -hT_4 & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & 0 & 0\\ * & * & * & * & -hW_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -hW_2 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -K & 0 & KH\tilde{M}\\ * & * & * & * & * & * & * & -Z & ZH\tilde{M}\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda I\end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{11}=\tilde{\Sigma}+\lambda\tilde{V}_1^{\mathrm{T}}\tilde{V}_1,\Sigma_{12}=\tilde{\Sigma}_{12}+\lambda\tilde{V}_1^{\mathrm{T}}\tilde{V}_2,\Sigma_{13}=\tilde{\Sigma}_{13},\Sigma_{14}=\tilde{\Sigma}_{14},\Sigma_{22}=\tilde{\Sigma}_{22}+\lambda V_2^{\mathrm{T}}\tilde{V}_2$$

$$\Sigma_{23}=\tilde{\Sigma}_{23},\Sigma_{24}=\tilde{\Sigma}_{24},\Sigma_{33}=\tilde{\Sigma}_{33}$$

证明 令 $\eta(t)=A_c(t)\xi(t)+B_c(t)H\xi(t-h)$,则 $\dot{\xi}(t)-C_cH\dot{\xi}(t-h)=\eta(t)$

对其两边同时积分 $$\int_{t-h}^{t}\dot{\xi}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t}C_cH\dot{\xi}(s-h)\mathrm{d}s=\int_{t-h}^{t}\eta(s)\mathrm{d}s$$

即 $$\xi(t)-\xi(t-h)-C_cH\xi(t-h)+C_cH\xi(t-2h)=\int_{t-h}^{t}\eta(s)\mathrm{d}s \tag{1}$$

构造 Lyapunov 泛函 $V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t)+V_5(t)$,$V_1(t)=\xi^{\mathrm{T}}(t)P\xi(t)$,

$$V_2(t)=\int_{t-h}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}}Q_1H\xi(s)\mathrm{d}s+\int_{t-2h}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}}Q_2H\xi(s)\mathrm{d}s,V_3(t)=\int_{t-h}^{t}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}}RH\dot{\xi}(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_4(t)=\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}}W_1H\dot{\xi}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,V_5(t)=\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\eta^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}}W_2H\eta(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

沿系统 $\tilde{\Sigma}$ 的轨迹 $V_i(t)$,$i=1,2,3,4,5$,关于时间 t 求导为

$$\dot{V}_1(t)=\xi^{\mathrm{T}}(t)PA_c(t)\xi(t)+\xi^{\mathrm{T}}(t)A_c^{\mathrm{T}}(t)P\xi(t)+2\xi^{\mathrm{T}}(t)PB_c(t)H\xi(t-h)+2\xi^{\mathrm{T}}(t)PC_cH\dot{\xi}(t-h)$$

$$\dot{V}_2(t)=\xi^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}Q_1H\xi(t)-\xi^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}Q_1H\xi(t-h)+\xi^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}Q_2H\xi(t)-\xi^{\mathrm{T}}(t-2h)H^{\mathrm{T}}Q_2H\xi(t-2h)$$

$$\dot{V}_3(t)=\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}RH\dot{\xi}(t)-\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}RH\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h),\dot{V}_4(t)=h\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}W_4H\dot{\xi}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}}W_1H\dot{\xi}(s)\mathrm{d}s$$

$$\dot{V}_5(t)=h\eta^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}W_2H\eta(t)-\int_{t-h}^{t}\eta^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}}W_2H\eta(s)\mathrm{d}s$$

根据引理2,又有 $\dot{V}_4(t)\leqslant h\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}W_1H\dot{\xi}(t)-(\int_{t-h}^{t}H\dot{\xi}(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}\frac{1}{h}W_1(\int_{t-h}^{t}h\dot{\xi}(s)\mathrm{d}s)$。

令 $R+hW_1=K$,$hW_2=Z$,则 $\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}RH\dot{\xi}(t)+h\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}W_1H\dot{\xi}(t)=\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}KH\dot{\xi}(t)$

$$\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}KH\dot{\xi}(t)=[\xi^{\mathrm{T}}(t)A_c^{\mathrm{T}}(t)+\xi^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}B_c^{\mathrm{T}}(t)+$$
$$\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}C_c^{\mathrm{T}}]H^{\mathrm{T}}KH[A_c(t)\xi(t)+B_c(t)H\xi(t-h)+C_cH\dot{\xi}(t-h)]$$

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}ZH\eta(t)=h[\xi^{\mathrm{T}}(t)A_c^{\mathrm{T}}(t)+\xi^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}B_c^{\mathrm{T}}(t)]H^{\mathrm{T}}W_2H[A_c(t)\xi(t)+B_c(t)H\xi(t-h)]$$

根据牛顿-莱布尼茨公式 $\int_{t-h}^{t}\dot{\xi}(s)\mathrm{d}s=\xi(t)-\xi(t-h)$ 有

$$2[\xi^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}N_1H+\xi^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}N_2H+\xi^{\mathrm{T}}(t-2h)H^{\mathrm{T}}N_3H+\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}N_4H]\times[\xi(t)-\xi(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{\xi}(s)\mathrm{d}s]=0$$

由(1)式有 $$2[\xi^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}T_1H+\xi^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}T_2H+\xi^{\mathrm{T}}(t-2h)H^{\mathrm{T}}T_3H+\dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}T_4H]\times$$
$$[\xi(t)-\xi(t-h)-C_cH\xi(t-h)+C_cH\xi(t-2h)-\int_{t-h}^{t}\eta(s)\mathrm{d}s]=0$$

综上,$\dot{V}(t)\leqslant\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\eta^{\mathrm{T}}(t,s,h)\Sigma_0\eta(t,s,h)\mathrm{d}s$。

其中 $\eta^{\mathrm{T}}(t,s,h)=(\xi^{\mathrm{T}}(t)\quad \xi^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}\quad \xi^{\mathrm{T}}(t-2h)H^{\mathrm{T}}\quad \dot{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h)H^{\mathrm{T}}\quad \dot{\xi}^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}}\quad \eta^{\mathrm{T}}(s)H^{\mathrm{T}})$

$$\Sigma_0=\begin{pmatrix}\bar{\Sigma}_{11} & \bar{\Sigma}_{12} & \bar{\Sigma}_{13} & \bar{\Sigma}_{14} & -hH^{\mathrm{T}}N_1 & -hH^{\mathrm{T}}T_1\\ * & \bar{\Sigma}_{22} & \bar{\Sigma}_{23} & \bar{\Sigma}_{24} & -hN_2 & -hT_2\\ * & * & \bar{\Sigma}_{33} & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}H_4^{\mathrm{T}} & -hN_3 & -hT_3\\ * & * & * & -R+C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}KHC_c & -hN_4 & -hT_4\\ * & * & * & * & -hW_1 & 0\\ * & * & * & * & * & -hW_2\end{pmatrix}$$

$$\bar{\Sigma}_{11}=\hat{\Sigma}_{11}+A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}KHA_c(t)+A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}ZHA_c(t),\bar{\Sigma}_{13}=\hat{\Sigma}_{13},\bar{\Sigma}_{14}=\hat{\Sigma}_{14}+A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}KHA_c,$$
$$\bar{\Sigma}_{12}=\hat{\Sigma}_{12}+A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}KHB_c(t)+A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}ZHB_c(t),\bar{\Sigma}_{23}=\hat{\Sigma}_{23},\bar{\Sigma}_{24}=\hat{\Sigma}_{24}+B_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}KHA_c,$$

$$\bar{\Sigma}_{22} = \hat{\Sigma}_{22} + B_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}KHB_c(t) + B_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}ZHB_c(t), \Sigma_{33} = T_3HC_c - Q_2 + C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}T_3^{\mathrm{T}}$$

因此由 $\Sigma_0 < 0$ 就表明了 $\dot{V}(t) \leqslant -v\|\xi(t)\|^2$,其中 v 是充分小的正数,而假定 1 又保证了系统 $\xi(t) - C_cH\xi(t-h) = 0$ 的稳定性,因此滤波误差动态系统 $\tilde{\Sigma}(t) \leqslant$ 在初始条件下是渐近稳定的。

根据引理 1,$\Sigma_0 < 0$ 又等价于 $\Sigma_1 < 0$,其中

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{11} & \hat{\Sigma}_{12} & \hat{\Sigma}_{13} & \hat{\Sigma}_{14} & -hH^{\mathrm{T}}N_1 & -hH^{\mathrm{T}}T_1 & A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}K & A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}Z \\ * & \hat{\Sigma}_{22} & \hat{\Sigma}_{23} & \hat{\Sigma}_{24} & -hN_2 & -hT_2 & B_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}K & B_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}Z \\ * & * & \hat{\Sigma}_{33} & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}H_4^{\mathrm{T}} & -hN_3 & -hT_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -R & -hN_4 & -hT_4 & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & 0 \\ * & * & * & * & -hW_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -hW_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -K & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -Z \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_{11} = PA_c(t) + A_c^{\mathrm{T}}(t)P + H^{\mathrm{T}}(Q_1 + Q_2 + N_1 + N_1^{\mathrm{T}} + T_1 + T_1^{\mathrm{T}})H, \hat{\Sigma}_{13} = \tilde{\Sigma}_{13}, \hat{\Sigma}_{14} = \tilde{\Sigma}_{14}$$

$$\hat{\Sigma}_{12} = PB_c(t) + H^{\mathrm{T}}(-N_1 + N_2^{\mathrm{T}} - T_1 + T_2^{\mathrm{T}}) - H^{\mathrm{T}}T_1HC_c, \hat{\Sigma}_{22} = \tilde{\Sigma}_{23}\hat{\Sigma}_{23} = \tilde{\Sigma}_{23}, \hat{\Sigma}_{24} = \tilde{\Sigma}_{24}\hat{\Sigma}_{33} = \tilde{\Sigma}_{33}$$

为了消去 $F(t)$,令 $\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ B_fM_2 \end{pmatrix}$,$\tilde{V}_1 = (V_1 \quad 0)$,将 Σ_1 重新整理如下 $\Sigma_1 = \Sigma_2 + \Gamma_dF(t)\Gamma_e + \Gamma_e^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)\Gamma_d^{\mathrm{T}}$,则

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_{11} & \tilde{\Sigma}_{12} & \tilde{\Sigma}_{13} & \tilde{\Sigma}_{14} & -hH^{\mathrm{T}}N_1 & -hH^{\mathrm{T}}T_1 & A_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & A_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}Z \\ * & \tilde{\Sigma}_{22} & \tilde{\Sigma}_{23} & \tilde{\Sigma}_{24} & -hN_2 & -hT_2 & B_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & B_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}Z \\ * & * & \tilde{\Sigma}_{33} & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}H_4^{\mathrm{T}} & -hN_3 & -hT_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -R & -hN_4 & -hT_4 & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & 0 \\ * & * & * & * & -hW_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -hW_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -K & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -Z \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Sigma}_{11} = PA_c + A_c^{\mathrm{T}}P + H^{\mathrm{T}}(Q_1 + Q_2 + N_1 + N_1^{\mathrm{T}} + T_1 + T_1^{\mathrm{T}})H, \tilde{\Sigma}_{12} = PB_c + H^{\mathrm{T}}(-N_1 + N_2^{\mathrm{T}} - T_1 + T_2^{\mathrm{T}}) - H^{\mathrm{T}}T_1HC_c,$$

$$\tilde{\Sigma}_{13} = H^{\mathrm{T}}T_1HC_c + H^{\mathrm{T}}N_3^{\mathrm{T}} + H^{\mathrm{T}}T_3^{\mathrm{T}}, \tilde{\Sigma}_{14} = PC_c + H^{\mathrm{T}}N_4^{\mathrm{T}} + H^{\mathrm{T}}T_4^{\mathrm{T}}, \tilde{\Sigma}_{22} = -Q_1 - N_2 - N_2^{\mathrm{T}} - T_2 - T_2^{\mathrm{T}} - T_2HC_c - C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}T_2^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\Sigma}_{23} = T_2HC_c - T_3^{\mathrm{T}} - C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}T_3^{\mathrm{T}}, \tilde{\Sigma}_{24} = -N_4^{\mathrm{T}} - T_4^{\mathrm{T}} - C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}T_4^{\mathrm{T}}, \tilde{\Sigma}_{33} = T_3HC_c - Q_2 + C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}T_3^{\mathrm{T}}$$

$$\Gamma_d^{\mathrm{T}} = (\tilde{M}^{\mathrm{T}}P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tilde{M}^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K \quad \tilde{M}^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}Z), \Gamma_e = (\tilde{T}_1 \quad T_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

那么根据引理 3,$\Sigma_1 < 0$ 又等价于 $\Sigma_2 + \lambda^{-1}\Gamma_d\Gamma_d^{\mathrm{T}} + \lambda\Gamma_e^{\mathrm{T}}\Gamma_e < 0$。再次应用引理 1,就得到定理 1。　证毕

下面给出能够使得滤波误差动态系统 $\tilde{\Sigma}$ 达到渐近稳定的鲁棒 H_∞ 滤波器 Σ_f 存在的充分条件。

定理 2　设假定 1 成立,对于给定的常数 $\gamma > 0$,如果存在对称矩阵 $P > 0, W_1 > 0, W_2 > 0, R > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, X > 0, Y > 0$ 以及任意恰当维数的矩阵 $N_i, T_i, i = 1,\cdots,5, \Phi_j, j = 1,\cdots,4$,使得 $\tilde{\Omega}_0 < 0$ 成立,且 $X - Y > 0$,则系统 Σ 存在一个 H_∞ 滤波器 Σ_f 使得由 Σ 和 Σ_f 构成的滤波误差动态系统 $\tilde{\Sigma}$ 是渐近稳定的。其中

$$\tilde{\Omega}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_1 & \tilde{\Omega}_2 \\ * & \tilde{\Omega}_3 \end{pmatrix}, \tilde{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_{11} & \tilde{\Omega}_{12} \\ * & \tilde{\Omega}_{22} \end{pmatrix}, \Lambda = Q_1 + Q_2 + N_1 + N_1^{\mathrm{T}} + T_1 + T_1^{\mathrm{T}} + \lambda V_1^{\mathrm{T}}V_1, \tilde{\Omega}_{11} = YA + A^{\mathrm{T}}Y + \Lambda$$

$$\tilde{\Omega}_{12} = YA + A^{\mathrm{T}}X + A_1^{\mathrm{T}}\Phi_2^{\mathrm{T}} + \Phi_1^{\mathrm{T}} + \Lambda, \tilde{\Omega}_{22} = XA + A^{\mathrm{T}}X + \Phi_2A_1 + A_1^{\mathrm{T}}\Phi_2^{\mathrm{T}} + \Lambda,$$

$$\tilde{\Omega}_2=\begin{pmatrix}\tilde{\Delta}_{11} & \tilde{\Delta}_{12} & \tilde{\Delta}_{13} & \tilde{\Delta}_{14} & -hN_1 & -hT_1 & A^{\mathrm{T}}K & A^{\mathrm{T}}Z & \tilde{\Delta}_{19} & YM_1\\ \tilde{\Delta}_{21} & \tilde{\Delta}_{22} & \tilde{\Delta}_{23} & \tilde{\Delta}_{24} & -hN_1 & -hT_1 & A^{\mathrm{T}}K & A^{\mathrm{T}}Z & \tilde{\Delta}_{29} & XM_1+\Phi_2M_2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Delta}_{11}=YB-N_1+N_2^{\mathrm{T}}-T_1+T_2^{\mathrm{T}}-T_1C+\lambda V_1^{\mathrm{T}}V_2,\tilde{\Delta}_{12}=N_3^{\mathrm{T}}+T_3^{\mathrm{T}}+T_1C$$

$$\tilde{\Delta}_{21}=XB+\Phi_2B_1-N_1+N_2^{\mathrm{T}}-T_1+T_2^{\mathrm{T}}-T_1C+\lambda V_1^{\mathrm{T}}V_2,\tilde{\Delta}_{22}=N_3^{\mathrm{T}}+T_3^{\mathrm{T}}+T_1C,\tilde{\Delta}_{13}=YC+N_4^{\mathrm{T}}+T_4^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\Delta}_{14}=YE+N_5^{\mathrm{T}}+T_5^{\mathrm{T}},\tilde{\Delta}_{19}=L^{\mathrm{T}}-A_1^{\mathrm{T}}\Phi_4^{\mathrm{T}}-\Phi_3^{\mathrm{T}},\tilde{\Delta}_{23}=XC+\Phi_2C_1+N_4^{\mathrm{T}}+T_4^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{\Delta}_{24}=XE+\Phi_2E_1+N_5^{\mathrm{T}}+T_5^{\mathrm{T}},\tilde{\Delta}_{29}=L^{\mathrm{T}}-A_1^{\mathrm{T}}\Phi_4^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\Omega}_3=\begin{pmatrix}\Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & -hN_2 & -hT_2 & B^{\mathrm{T}}K & B^{\mathrm{T}}Z & L_1^{\mathrm{T}}-B_1^{\mathrm{T}}\Phi_4^{\mathrm{T}} & 0\\ * & \Xi_{22} & C^{\mathrm{T}}T_4^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}}T_5^{\mathrm{T}} & -hN_3 & -hT_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & -R & 0 & -hN_4 & -hT_4 & C^{\mathrm{T}}K & 0 & L_2^{\mathrm{T}}-C_1^{\mathrm{T}}\Phi_4^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & -\gamma^2I & -hN_5 & -hT_5 & E^{\mathrm{T}}K & E^{\mathrm{T}}Z & -E_1^{\mathrm{T}}\Phi_4^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & * & -hW_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -hW_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -K & 0 & 0 & KM_1\\ * & * & * & * & * & * & * & -Z & 0 & ZM_1\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I & -\Phi_4M_2\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda I\end{pmatrix}$$

$$\Xi_{11}=-Q_1-N_2-N_2^{\mathrm{T}}-T_2-T_2^{\mathrm{T}}-T_2C-C^{\mathrm{T}}T_2^{\mathrm{T}}+\lambda V_2^{\mathrm{T}}V_2,\Xi_{12}=T_2C-T_3^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}}T_3^{\mathrm{T}}-N_3^{\mathrm{T}}$$

$$\Xi_{13}=-T_4^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}}T_4^{\mathrm{T}}-N_4^{\mathrm{T}},\Xi_{14}=-T_5^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}}T_5^{\mathrm{T}}-N_5^{\mathrm{T}},\Xi_{22}=-Q_2+T_3C+C^{\mathrm{T}}T_3^{\mathrm{T}}$$

而鲁棒 H_∞ 滤波器 Σ_f 的参数则为 $A_f=S^{-1}\Phi_1Y^{-1}W^{-\mathrm{T}}$,$B_f=S^{-1}\Phi_2$,$C_f=\Phi_3Y^{-1}W^{-\mathrm{T}}$,$D_f=\Phi_4$,且 $SW^{\mathrm{T}}=I-XY^{-1}$。

证明 首先引进 H_∞ 性能指标 $J=\int_0^\infty[\tilde{z}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{z}(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)]\mathrm{d}t$。由滤波误差动态系统的渐近稳定性,当 $t\to\infty$ 时,$\xi(t)\to0$。那么在零初始条件下考虑系统 $\tilde{\Sigma}$ 的 H_∞ 性能指标,其中

$$\omega(t)\in L_2[0,\infty),J=\int_0^\infty[\tilde{z}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{z}(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)+\dot{V}(t)]\mathrm{d}t-V(\infty)+V(0)\leqslant$$

$$\int_0^\infty[\tilde{z}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{z}(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)+\dot{V}(t)]\mathrm{d}t$$

$V(t)$ 在定理1中被定义。

于是可以得到 $J\leqslant\int_0^\infty\frac{1}{h}\int_{t-h}^t\mu^{\mathrm{T}}\Omega\mu\mathrm{d}s\mathrm{d}t$,其中

$$\Omega=\Theta+(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad -\gamma^2I\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}\times(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad I\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)+$$
$$(L_c(t)\quad L_{c1}(t)\quad 0\quad L_{c2}\quad E_{c1}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}\times(L_c(t)\quad L_{c1}(t)\quad 0\quad L_{c2}\quad E_{c1}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)$$

$$\Theta=\begin{pmatrix}\Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} & \Theta_{15} & -hH^{\mathrm{T}}N_1 & -hH^{\mathrm{T}}T_1 & A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}K & A_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}Z\\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} & \Theta_{25} & -hN_2 & -hT_2 & B_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}K & B_c^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}Z\\ * & * & \Theta_{33} & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}T_4^{\mathrm{T}} & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}T_5^{\mathrm{T}} & -hN_3 & -hT_3 & 0 & 0\\ * & * & * & -R & 0 & -hN_4 & -hT_4 & C_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & 0\\ * & * & * & * & 0 & -hN_5 & -hT_5 & E_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}K & E_c^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}Z\\ * & * & * & * & * & -hW_1 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -hW_2 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -K & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -Z\end{pmatrix}$$

$$\Theta_{11}=PA_c(t)+A_c^{\mathrm T}(t)P+H^{\mathrm T}(Q_1+Q_2+N_1+N_1^{\mathrm T}+T_1+T_1^{\mathrm T})H,\Theta_{12}=PB_c(t)+H^{\mathrm T}(-N_1+N_2^{\mathrm T}-T_1+T_2^{\mathrm T})-H^{\mathrm T}T_1HC_c$$

$$\Theta_{13}=H^{\mathrm T}N_3^{\mathrm T}+H^{\mathrm T}T_3^{\mathrm T}+H^{\mathrm T}T_1HC_c,\Theta_{14}=H^{\mathrm T}N_4^{\mathrm T}+H^{\mathrm T}T_4^{\mathrm T}+PC_c,\Theta_{15}=H^{\mathrm T}N_5^{\mathrm T}+H^{\mathrm T}T_5^{\mathrm T}+PE_c$$

$$\Theta_{22}=-Q_1-N_2-N_2^{\mathrm T}-T_2-T_2^{\mathrm T}-T_2HC_c-C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_2^{\mathrm T},\Theta_{23}=-N_3^{\mathrm T}-T_3^{\mathrm T}+T_2HC_c-C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_3^{\mathrm T}$$

$$\Theta_{24}=-N_4^{\mathrm T}-T_4^{\mathrm T}-C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_4^{\mathrm T},\Theta_{25}=-N_5^{\mathrm T}-T_5^{\mathrm T}-C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_5^{\mathrm T},\Theta_{33}=-Q_2+T_3HC_c+C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_3^{\mathrm T}$$

因此只要使 $\Omega<0$ 就可以得到 $J<0$,而 $J<0$ 就表明了 $\|\tilde z(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega(t)\|_2$。

与定理 1 中的方法一样,通过使用引理 1,引理 3 可以得到 $\Omega<0$ 又等价于 $\bar\Omega<0$,有

$$\Omega=\begin{pmatrix}
\bar\Omega_{11} & \bar\Omega_{12} & \bar\Omega_{13} & \bar\Omega_{14} & \bar\Omega_{15} & -hH^{\mathrm T}N_1 & -hH^{\mathrm T}T_1 & A_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}K & A_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}Z & L_c^{T} & P\tilde M\\
* & \bar\Omega_{22} & \bar\Omega_{23} & \bar\Omega_{24} & \bar\Omega_{25} & -hN_2 & -hT_2 & B_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}K & B_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}Z & L_{c1}^{\mathrm T} & 0\\
* & * & \bar\Omega_{33} & \bar\Omega_{34} & \bar\Omega_{35} & -hN_3 & -hT_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & -R & 0 & -hN_4 & -hT_4 & C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}K & 0 & L_{c2}^{\mathrm T} & 0\\
* & * & * & * & -\gamma^2I & -hN_5 & -hT_5 & E_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}K & E_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}Z & E_{c1}^{\mathrm T} & 0\\
* & * & * & * & * & -hW_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -hW_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & -K & 0 & 0 & KH\tilde M\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -Z & 0 & ZH\tilde M\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -I & \tilde M_2\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda I
\end{pmatrix}$$

$$\bar\Omega_{11}=PA_c+A_c^{\mathrm T}P+H^{\mathrm T}(Q_1+Q_2+N_1+N_1^{\mathrm T}+T_1+T_1^{\mathrm T})H+\lambda\tilde V_1^{\mathrm T}\tilde V_1$$

$$\bar\Omega_{12}=PB_c+H^{\mathrm T}(-N_1+N_2^{\mathrm T}-T_1+T_2^{\mathrm T})-H^{\mathrm T}T_1HC_c+\lambda\tilde V_1^{\mathrm T}V_2$$

$$\bar\Omega_{13}=H^{\mathrm T}N_3^{\mathrm T}+H^{\mathrm T}T_3^{\mathrm T}+H^{\mathrm T}T_1HC_c,\bar\Omega_{14}=H^{\mathrm T}N_4^{\mathrm T}+H^{\mathrm T}T_4^{\mathrm T}+PC_c,\bar\Omega_{15}=H^{\mathrm T}N_5^{\mathrm T}+H^{\mathrm T}T_5^{\mathrm T}+PE_c$$

$$\bar\Omega_{22}=-Q_1-N_2-N_2^{\mathrm T}-T_2-T_2^{\mathrm T}-T_2HC_c-C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_2^{\mathrm T}+\lambda V_2^{\mathrm T}V_2$$

$$\bar\Omega_{23}=-N_3^{\mathrm T}-T_3^{\mathrm T}+T_2HC_c-C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_3^{\mathrm T},\bar\Omega_{24}=-N_4^{\mathrm T}-T_4^{\mathrm T}-C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_4^{\mathrm T},\bar\Omega_{25}=-N_5^{\mathrm T}-T_5^{\mathrm T}-C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_5^{\mathrm T}$$

$$\bar\Omega_{33}=-Q_2+T_3HC_c+C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_3^{\mathrm T},\bar\Omega_{34}=C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_4^{\mathrm T},\bar\Omega_{35}=C_c^{\mathrm T}H^{\mathrm T}T_5^{\mathrm T},\tilde M_2=-D_fM_2$$

令 $SW^{\mathrm T}=I-XY^{-1}$,其中 $X>0$,$Y>0$,由 $I-XY^{-1}$ 是非奇异的可知 W,S 是非奇异矩阵,那么下面定义 $Y_1=\begin{pmatrix}\bar Y & I\\ W^{\mathrm T} & 0\end{pmatrix}$,$Y_2=\begin{pmatrix}I & X\\ 0 & S^{\mathrm T}\end{pmatrix}$,其中 $\bar Y=Y^{-1}$。

令 $P=Y_2Y_1^{-1}$,就可以得到 $P=\begin{pmatrix}X & S\\ S^{\mathrm T} & W^{-1}\bar Y(X-Y)\bar YW^{-\mathrm T}\end{pmatrix}>0$。在 $\bar\Omega$ 的左边乘以 $diag(Y_1^{\mathrm T},I,I,I,I,I,I,I,I,I,I)$,在 $\bar\Omega$ 的右边乘以 $diag(Y_1,I,I,I,I,I,I,I,I,I,I)$,就可以得到 $\Omega_0=\begin{pmatrix}\Omega_1 & \Omega_2\\ * & \Omega_3\end{pmatrix}$,其中

$$\Omega_1=\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ * & \Omega_{22}\end{pmatrix},\Omega_{11}=A\bar Y+\bar YA^{\mathrm T}+\bar Y(Q_1+Q_2+N_1+N_1^{\mathrm T}+T_1+T_1^{\mathrm T})\bar Y+\lambda\bar YV_1^{\mathrm T}V_1\bar Y$$

$$\Omega_{12}=A+\bar YA^{\mathrm T}X+\bar YA_1^{\mathrm T}B_f^{\mathrm T}S^{\mathrm T}+WA_f^{\mathrm T}S^{\mathrm T}+\bar Y(Q_1+Q_2+N_1+N_1^{\mathrm T})I+T_1+T_1^{\mathrm T}+\lambda\bar YV_1^{\mathrm T}V_1$$

$$\Omega_{22}=XA+SB_fA_1+A^{\mathrm T}X+A_1^{\mathrm T}B_f^{\mathrm T}S^{\mathrm T}+Q_1+Q_2+N_1+N_1^{\mathrm T}+T_1+T_1^{\mathrm T}+\lambda V_1^{\mathrm T}V_1$$

$$\Omega_2=\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} & -h\bar YN_1 & -h\bar YT_1 & \bar YA^{\mathrm T}K & \bar YA^{\mathrm T}Z & \Delta_{19} & M_1\\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} & -hN_1 & -hT_1 & A^{\mathrm T}K & A^{\mathrm T}Z & \Delta_{29} & \Delta_{210}\end{pmatrix}$$

其中

$$\Delta_{11}=B-\bar YN_1+\bar YN_2^{\mathrm T}-\bar YT_1+\bar YT_2^{\mathrm T}-\bar YT_1C+\lambda\bar YV_1^{\mathrm T}V_2$$

$$\Delta_{21}=XB+SB_fB_1-N_1+N_2^{\mathrm T}-T_1+T_2^{\mathrm T}-T_1C+\lambda V_1^{\mathrm T}V_2,\Delta_{12}=\bar YN_3^{\mathrm T}+\bar YT_3^{\mathrm T}+\bar YT_1C,\Delta_{22}=N_3^{\mathrm T}+T_3^{\mathrm T}+T_1C,$$

$$\Delta_{13}=\bar{Y}N_4^{\mathrm{T}}+\bar{Y}T_4^{\mathrm{T}}+C,\Delta_{23}=N_4^{\mathrm{T}}+T_4^{\mathrm{T}}+XC+SB_fC_1,\Delta_{14}=\bar{Y}N_5^{\mathrm{T}}+\bar{Y}T_5^{\mathrm{T}}+E,$$

$$\Delta_{24}=N_5^{\mathrm{T}}+T_5^{\mathrm{T}}+XE+SB_fE_1,\Delta_{19}=\bar{Y}L^{\mathrm{T}}-\bar{Y}A_1^{\mathrm{T}}D_f^{\mathrm{T}}-WC_f^{\mathrm{T}},\Delta_{29}=L^{\mathrm{T}}-A_1^{\mathrm{T}}D_f^{\mathrm{T}},\Delta_{210}=XM_1+SB_fM_2$$

$$\Omega_3=\begin{pmatrix}\Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & -hN_2 & -hT_2 & B^{\mathrm{T}}K & B^{\mathrm{T}}Z & L_1^{\mathrm{T}}-B_1^{\mathrm{T}}D_f^{\mathrm{T}} & 0\\ * & \Xi_{22} & C^{\mathrm{T}}T_4^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}}T_5^{\mathrm{T}} & -hN_3 & -hT_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & -R & 0 & -hN_4 & -hT_4 & C^{\mathrm{T}}K & 0 & L_2^{\mathrm{T}}-C_1^{\mathrm{T}}D_f^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & -\gamma^2I & -hN_5 & -hT_5 & E^{\mathrm{T}}K & E^{\mathrm{T}}Z & -E_1^{\mathrm{T}}D_f^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & * & -hW_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -hW_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -K & 0 & 0 & KM_1\\ * & * & * & * & * & * & * & -Z & 0 & ZM_1\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I & -D_fM_2\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda I\end{pmatrix}$$

$$\Xi_{11}=-Q_1-N_2-N_2^{\mathrm{T}}-T_2-T_2^{\mathrm{T}}-T_2C-C^{\mathrm{T}}T_2^{\mathrm{T}}+\lambda V_2^{\mathrm{T}}V_2,\Xi_{12}=T_2C-C^{\mathrm{T}}T_3^{\mathrm{T}}-T_3^{\mathrm{T}}-N_3^{\mathrm{T}}$$

$$\Xi_{13}=-C^{\mathrm{T}}T_4^{\mathrm{T}}-T_4^{\mathrm{T}}-N_4^{\mathrm{T}},\Xi_{14}=-C^{\mathrm{T}}T_5^{\mathrm{T}}-T_5^{\mathrm{T}}-N_5^{\mathrm{T}},\Xi_{22}=-Q_2+T_3C+C^{\mathrm{T}}T_3^{\mathrm{T}}$$

再对 Ω_0 分别左乘和右乘 $diag(Y,I,I,I,I,I,I,I,I,I,I,I)$。并且令 $\Phi_1=SA_fW^{\mathrm{T}}Y,\Phi_2=SB_f,\Phi_3=C_fW^{\mathrm{T}}Y,\Phi_4=D_f$,那么就可以得到定理2中的结论。

由 $\tilde{\Omega}_0<0$ 就得到了 $J<0$,即 $\|\tilde{z}(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega(t)\|_2$,通过使用Matlab中的LMI工具箱解 $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4$ 就可求得 A_f,B_f,C_f,D_f。 证毕

3 数值算例

例1 考虑含有如下参数的不确定中立系统 Σ,其中

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0.5\\ -0.5 & -2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-0.5 & 0\\ -0.7 & 0.4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0.1 & -0.6\\ 0 & 0.09\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}0.2\\ 0.5\end{pmatrix},A_1=\begin{pmatrix}1.5 & 0\\ 2 & 1.6\end{pmatrix}$$

$$B_1=\begin{pmatrix}-0.5 & -0.8\\ -0.2 & 0.3\end{pmatrix},C_1=\begin{pmatrix}0 & 0.4\\ 0.2 & -0.3\end{pmatrix},E_1=\begin{pmatrix}0\\ 0.2\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}1.2 & 0\\ 0.7 & -1.8\end{pmatrix},L_1=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & -0.5\end{pmatrix}$$

$$L_2=\begin{pmatrix}0.1 & -0.5\\ 0 & -0.1\end{pmatrix},M_1=\begin{pmatrix}0.2\\ -0.3\end{pmatrix},M_2=\begin{pmatrix}-0.5\\ -0.2\end{pmatrix},V_1=\begin{pmatrix}-0.2\\ 0.4\end{pmatrix},V_2=\begin{pmatrix}0.5\\ -0.4\end{pmatrix},h=1.5,\gamma=1$$

根据定理2,通过使用Matlab中的LMI工具箱得到具体的可行解如下 $X=\begin{pmatrix}0.660\,5 & -0.119\,7\\ -0.119\,7 & 0.412\,1\end{pmatrix}$

$$Y=\begin{pmatrix}0.437\,9 & -0.095\,2\\ -0.095\,2 & 0.359\,5\end{pmatrix},Q_1=\begin{pmatrix}0.531\,7 & -0.088\,3\\ -0.088\,3 & 0.360\,9\end{pmatrix},Q_2=\begin{pmatrix}0.211\,9 & 0.028\,8\\ 0.028\,8 & 0.129\,2\end{pmatrix},W_1=\begin{pmatrix}0.058\,5 & 0.012\,0\\ -0.012\,0 & 0.014\,9\end{pmatrix}$$

$$W_2=\begin{pmatrix}0.043\,1 & -0.022\,9\\ -0.022\,9 & 0.045\,1\end{pmatrix},R=\begin{pmatrix}0.017\,1 & -0.012\,1\\ -0.012\,1 & 0.090\,4\end{pmatrix},N_1=\begin{pmatrix}-0.023\,6 & 0.002\,8\\ 0.002\,6 & -0.003\,9\end{pmatrix},N_2=\begin{pmatrix}0.004\,2 & 0.006\,4\\ 0.015\,5 & 0.001\,6\end{pmatrix}$$

$$N_3=\begin{pmatrix}0.003\,3 & -0.003\,1\\ 0.000\,4 & 0.000\,3\end{pmatrix},N_4=\begin{pmatrix}-0.001\,5 & 0.002\,2\\ -0.007\,4 & 0.001\,7\end{pmatrix},N_5=(-0.004\,1\quad 0.001\,9),T_1=\begin{pmatrix}-0.035\,3 & 0.013\,0\\ 0.036\,8 & -0.046\,5\end{pmatrix}$$

$$T_2=\begin{pmatrix}0.009\,3 & 0.014\,1\\ 0.016\,6 & 0.013\,0\end{pmatrix},T_3=\begin{pmatrix}-0.000\,6 & 0.000\,6\\ 0.001\,4 & 0.000\,1\end{pmatrix},T_4=\begin{pmatrix}-0.001\,4 & 0.002\,8\\ 0.011\,3 & -0.015\,9\end{pmatrix},T_5=(0.006\,6\quad 0.002\,7)$$

$$\Phi_1=\begin{pmatrix}0.594\,3 & 0.669\,7\\ -0.549\,6 & 0.597\,2\end{pmatrix},\Phi_2=\begin{pmatrix}0.266\,9 & -0.184\,3\\ 0.116\,2 & 0.131\,8\end{pmatrix},\Phi_3=\begin{pmatrix}0.114\,5 & 0.005\,5\\ -0.010\,3 & -0.014\,4\end{pmatrix},\Phi_4=\begin{pmatrix}-0.018\,3 & 0.009\,2\\ 0.010\,3 & -0.006\,2\end{pmatrix}$$

选择 $S=\begin{pmatrix}2 & 1.5\\ 4 & 5\end{pmatrix},W=\begin{pmatrix}-0.388\,7 & 0.306\,2\\ -0.001\,8 & -0.036\,0\end{pmatrix}$,则系统 Σ 的鲁棒 H_∞ 滤波器 Σ_f 如下

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} -57.5863 & -64.3070 \\ 40.6017 & 43.8857 \end{pmatrix}\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.2900 & -0.1810 \\ -0.2088 & 0.1184 \end{pmatrix}y(t)$$

$$\hat{z}(t) = \begin{pmatrix} -1.8815 & -1.4941 \\ 1.1210 & 1.3115 \end{pmatrix}\hat{x}(t) + \begin{pmatrix} -0.0183 & 0.0092 \\ 0.0103 & -0.0062 \end{pmatrix}y(t)$$

且相应的最优 $\gamma = 0.53$。

参考文献：

[1] Xu S, Lam J, Chen T, et al. A delay-dependent approach to robust H_∞ filtering for uncertain distributed delay systems [J]. IEEE Trans Signal Process, 2005, 53: 3764-3772.

[2] Chen D Y, Jin C Y. Delay-dependent stability criteria for a class of uncertain neutral systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34: 889-892.

[3] Zhang J H, Peng S, Qiu J Q. Robust stability criteria for uncertain neutral systems with time delay and nonlinear uncertainties [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 38: 160-167.

[4] Han Q L. A new delay-dependent absolute stability criteria for a class of nonlinear neutral systems [J]. Automatica, 2008, 44: 272-277.

[5] 愈立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[6] Jiang X F, Han Q L. New stability criteria for linear systems with interval timevaring delay [J]. Automatica, 2008, 44: 2680-2685.

[7] Xie L, Fu M, Souza C E. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertain via output feedback [J]. IEEE Trans Autom Contr, 1992, 37(8): 1253-1256.

[8] Yu X G. An LMI approach to robust H_∞ filtering for uncertain systems with timevaring distributed delays [J]. Journal of The Franklin Institute, 2008, 345: 877-890.

[9] Xu S, Chen T. An LMI approach to the H_∞ filter design for uncertain systems with distributed delays [J]. IEEE Trans Circuits Systems: Express Briefs, 2004, 51: 195-201.

[10] 吴保卫, 仝云旭, 陈敏. 不确定多时滞奇异系统鲁棒 H_∞ 降维滤波器的设计[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2008, 36(1): 7-14.

A Design of Robust H_∞ Filter for Uncertain Neutral Systems with Time Delays

WANG Yue-e, WU Bao-wei

(College of Mathematics and Information Sciences, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: In this paper, the problem of robust H_∞ filtering for uncertain neutral systems with time delays is considered. The purpose is to design full filters assuring asymptotically stability and a prescribed H_∞ performance level for the filtering error dynamic system, irrespective of the uncertainties and the timedelays. Based on the Lyapunov stability theory, sufficient condition for the existence of full order H_∞ filt-ers is proposed by LMI method such that the filtering error system is asymptotically sable and satisfies a prescribed attenuation level of noise: $\tilde{\Omega}_0 < 0, X - Y > 0$. Moreover, an explicit parametrizationof all desired full robust filter is presented when these conditions are feasible. A numerical e-xample is given t-o demonstrate the feasibility and effectiveness of the design.

Key words: neutral system; asymptotically stability; robust H_∞ filtering; LMI

（责任编辑　黄　颖）