

虚位移法求解电磁场力*

陈文峰,胡先权

(重庆师范大学 物理学与电子工程学院,重庆 400047)

摘要 根据电磁场的唯一性定理,采用虚位移法^[1]举例计算了电流恒定时,导体和电介质受到的电场力 $f = \frac{1}{2} \xi_0 E^2 n =$

$\frac{\sigma^2}{2\xi_0} n$ 磁链恒定时,载流回路和磁介质受到的磁场力 $F = -\nabla W$ 。计算结果表明:用虚位移法求解和用库仑定律、洛伦兹力公式求解相同的问题,后者求解的过程相当繁琐,而且计算量大,有些问题牵涉到泛函数,不一定能求解出答案,而用虚位移法求解,过程非常简单,避免了一些繁琐而不必要的过程。所以用虚位移法求解电磁场力比用库仑定律、安培力的公式更简单方便。

关键词 电场力 磁场力 虚位移法

中图分类号 O441

文献标识码 A

文章编号 1672-6693(2010)05-0062-04

电磁力具有较好的消(增)涡控制、减震控制、减阻控制和制动控制效应,所以对电磁力的研究具有非常重要的意义。然而在工程电磁场或者在电磁学中,经常会遇到一些求电磁场力的问题,如求带电体系中某带电体所受的电场力,某带电体系在外场中所受的力矩,及磁场中某导线所受的磁场力等。对于这些问题的解决,通常是从力的角度出发,应用库仑定律或安培定律及力的叠加原理来求解。而用此方法求解都要经过受力分析、矢量运算,甚至出现张量运算与泛函积分等问题^[2-6]。目前,国内外文献提出采用最小作用量和电磁场应力张量来计算电磁力^[2-6],但此方法需要事先计算出总场,事实上总场的计算并不容易。若采用虚位移法求解,即采用力学中物体势能的空间变化率来计算力,也即假定受力物体在受力方向上发生微小的“虚位移”,根据不同情况下电源供给系统的能量、系统增加的电磁场能量、场力和磁场力做功之间的关系,就可方便地求出物体受到的静电力和磁场力。

1 电流恒定时导体和电介质所受电场力

理论上,当多导体系统中所有电荷保持不变时,可认为带电系统充电后与外电源脱离关系。假设系统内某一导体(或电介质)因受静电力的作用引起某种位移,则静电力一定等于电势能的空间变化率,用公式表示为^[7-8]

$$F = -\nabla W_C \Big|_{\varphi = \text{const}}$$

若导体系统内各导体保持与外加电源相连,则这时各导体的势保持为常数。如果某一导体(或电介质)发生位移,则必然引起有导体上电荷的变化,故外界电源要做功,所做的功为

$$\Delta W = \sum \varphi_i \Delta q_i \quad (1)$$

电场能量的增量为^[7]

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} \sum \varphi_i \Delta q_i \quad (2)$$

故电源提供能量的一半用于电场储能,另一半用于静电力做功。这时的静电力计算为

$$F = -\nabla W_C \Big|_{\varphi = \text{const}} \quad (3)$$

所以分别按(1)、(2)、(3)式解题,就很容易求出导体和电介质的电磁场力。

另外,无论导体系统与电源是相连($\varphi = \text{常量}$)还是不相连($q = \text{常量}$),都是同一导体系统状态的两种假设,所计算的静电力结果应该是一样的。

实例1 求带电导体单位面积上的静电力。

虚位移法求解。设想从导体表面分出一个面积 ΔS ,并使 ΔS 产生一个向外的微小位移 dL 。在这过程中,系统静电能的减少量就等于能量密度与面元 ΔS 所扫过的体积,即 $\Delta S dL$ 的乘积,则 $-dW = \frac{1}{2} E^2 \Delta S dL$,上式中的 $E = \frac{\sigma}{\xi_0}$ (σ 电荷的面密度)为导

* 收稿日期 2009-09-16 修回日期 2010-01-06

资助项目 重庆市教委基础理论研究基金(No. KJ080825)

作者简介 陈文峰,男,硕士研究生,研究方向为电磁场理论;通讯作者 胡先权, E-mail: huxuan2003@yahoo.com.cn

体表面处的场强,由功能原理, $-dW = \Delta F \cdot n dl$, 得面积元 ΔS 所受的电场力的法向分量为

$$\Delta F_n = - \left(\frac{dW}{dl} \right)_{q = \text{const}} = \frac{1}{2} \xi_0 E^2 \Delta S$$

单位面积所受的电场力为

$$f = \frac{1}{2} \xi_0 E^2 n = \frac{\sigma^2}{2 \xi_0} n$$

2) 利用库仑定律和洛伦兹力公式求解。首先分析半径为 R , 均匀带电 σ 的导体球面上任一点 P 的电场强度, 如图 1 把球面分成若干圆环, 轴线与 OP 重合, 其中一个圆环(虚线部分), 它的半径对球心张的角度为 θ , 它的宽度为 $R d\theta$, 它所带的电量为

$$dQ = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$$

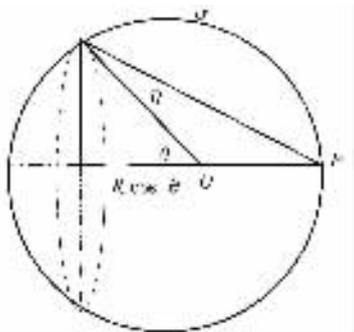


图 1 导体球示意图

则这个圆环在 P 点产生的电场强度为

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\xi_0 [(R \sin\theta)^2 + (R + R \cos\theta)^2]^{3/2}} n = \frac{\sigma}{2\xi_0} \frac{\sin\theta d\theta}{2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}} n = -\frac{\sigma}{4\sqrt{2}\xi_0} \frac{d(\cos\theta)}{\sqrt{1+\cos\theta}} n$$

把上式积分, 便可得到整个球面电荷在 P 点产生的电场强度, 积分得

$$E = \frac{\sigma n}{4\sqrt{2}\xi_0} \int_{-1}^1 \frac{d(\cos\theta)}{\sqrt{1+\cos\theta}} = \frac{\sigma}{2\xi_0} n$$

因此, 由洛伦兹力公式可知, 单位导体表面受到的电

$$场力为 f = qE = \frac{\sigma^2}{2\xi_0} n.$$

从上面的两种不同的解法, 可以看到用库仑定律求解电场力非常繁琐, 而且计算量很大, 甚至有些问题的解答过程中涉及到泛函积分, 难以求解, 然而用虚位移的方法求解却非常简单。

实例 2 一平行板电容器的极板(图 2)是边长为 a 的正方形, 间距为 d , 带电 $\pm Q$, 把一块厚为 d 相对介电系数为 ϵ_r 的电介质板插入一半, 它受力多少? 方向如何?

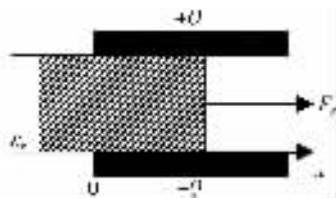


图 2 平行板电容器

1) 虚位移法求解。在如图 2 的坐标系中, 当介质插入 x 时, 电容器的电容为 $c_x = \frac{\epsilon_0 a(a-x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a x}{d} = \frac{\epsilon_0 a [a + (\epsilon_r - 1)x]}{d}$, 此时电容器的储能为 $W_x = \frac{Q^2}{2C_x} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a [a + (\epsilon_r - 1)x]}$ 。设想介质在 x 方向进入 δx , 则储能变化 $\delta W = -F_x \delta x$, 其中 F_x 为介质受力, 所以 $F_x = -\frac{\delta W}{\delta x} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q^2 d}{2\epsilon_0 a [a + (\epsilon_r - 1)x]}$ 。将 $x = \frac{a}{2}$ 代入上式, 则 $F = \frac{2(\epsilon_r - 1)Q^2 d}{(\epsilon_r + 1)^2 \epsilon_0 a^3}$, F 为正, 表明介质板受力沿介质板被吸入的方向。

2) 利用库仑定律和洛伦兹力公式求解。假定插入介质板的电容器是理想电容器, 没有边缘效应, 极板上各区的电荷密度为 σ_1 , σ_2 和介质板表面的极化电荷密度 σ' 都是常数, 设电容器极长为 l , 宽为 a , 充以电荷 Q , 插入一宽为 a , 厚为 d , 相对介电常数为 ξ 的介质板, 若介质板插入之至 x ($1 > x \gg a$), 图由于对称性, 只有 σ_2 与 σ' 相互作用才产生对介质板水平方向的库仑力^[10-11], 此处 $\sigma_1 = \xi \sigma_2$, $\sigma_2 = \frac{Q}{a [a + (\xi_r - 1)x]}$, 上极板长为 a , 宽为 dx' , 面密度为 σ_2 , 导体在空间点 $M(\xi, \eta)$ 处产生的场强为

$$dE = \frac{\sigma_2 dx'}{2\pi\xi_0 r_1}$$

上下极板在 M 点产生的电场水平分量为

$$E_x = \frac{\sigma_2}{4\pi\xi_0} \ln \frac{(x' - \xi)^2 + (\frac{d}{2} + \eta)^2}{(x' - \xi)^2 + (\frac{d}{2} - \eta)^2} \Big|_x^a$$

由 $1 \gg a$, 可视为 $1 \rightarrow \infty$, 则

$$E_x = -\frac{\sigma_2}{4\pi\xi_0} \ln \frac{(x - \xi)^2 + (\frac{d}{2} + \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (\frac{d}{2} - \eta)^2}$$

介质板上表面所受电场力的水平分量为^[8]

$$F_{1x} = -\frac{a\sigma_2 \sigma'}{4\pi\xi_0} \int_0^x \ln \frac{(x - \xi^2) + d^2}{(x - \xi)^2} d\xi =$$

$$-\frac{a\sigma_2\sigma'}{4\pi\xi_0}\left[x\ln\frac{x^2}{x^2+d^2}-2d\arctan\frac{x}{d}\right]$$

因 $x \gg a$, 上式方括号中的第一项为零, 第二项中 $\arctan\frac{x}{d} \approx \frac{\pi}{2}$, 则 $F_{1x} = -\frac{da\sigma_2\sigma'}{4\xi_0}$, 介质板下表面受的水平吸力与上式相同, 所以合力为 $F_{1x} = -\frac{da\sigma_2\sigma'}{2\xi_0}$; 而 $\sigma' = -(\epsilon_r - 1)\sigma_2$, 所以 $F_x = -\frac{\delta W}{\delta x} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q^2 d}{2\epsilon_0 d [a + (\epsilon_r - 1)x]^2}$. 若取 $x = \frac{a}{2}$, 可得 $F = \frac{2(\epsilon_r - 1)Q^2 d}{(\epsilon_r + 1)^2 \epsilon_0 a^3}$. 结果与虚位移解法的结果相同, 但是过程却非常复杂。

2 磁链恒定时载流回路和磁介质所受磁场力

“虚位移”只是一种想象中虚构的微小位移, 被研究的导体回路实际上是不移动, 它是处于一个静止的状态之中^[12-13]. 但是在由多个回路电流组成的系统中, 若要求某部分受到的磁场力, 则可假设其发生微小的位移, 并且假设:

1) 每个回路的磁链 ψ_i 不随时间改变. 由于该部分的位移, 系统中各个回路电流必定发生改变, 才能维持各个回路的磁链不变. 因为与各个电流回路交链的磁通量不随时间改变, 即 $d\psi_i/dt = 0$, 因此与各个又由于回路中没有感应电动势, 故与回路相连的各个电源不对回路系统输入能量(假定焦耳损耗可以忽略), 也就是说电源对系统不做功, 发生位移所需的机械功只有靠系统磁场能的减少来完成. 所以 $F \cdot dr = -dW_c |_{\psi_i = \text{const}}$, 即

$$F = -\nabla W_c |_{\psi = \text{const}} \quad (4)$$

由于磁场能量只与回路电流的最终值有关, 而与电流的建立过程无关, 因此, 可以选择一个便于计算的电流建立过程, 即设各回路电流都按同一比例增长. 故磁场建立过程中, 储存的总能量为 $W_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \psi_i$, 然后根据(4)式, 就可以计算出磁场力。

2) 每个回路的电流不变. 由于该部分的位移, 各回路的磁链要发生变化, 各回路都感应电动势, 这时各电源必然要做功来克服感应电动势以保持电流不变. 电源做功为

$$\Delta W = \sum I_i \frac{\Delta \phi_i}{\Delta t} \Delta t = \sum I_i \Delta \phi_i$$

系统的磁能为 $W_m = \frac{1}{2} \sum I_i \Delta \phi_i$, 即电源输入能量的

一半用于增加磁场储能, 另一半用于该部分位移所需的机械功, 即 $F = \nabla W_m |_{i = \text{const}}$.

无论假设磁链不变, 还是假设电流不变, 都是同一回路发生位移下的两种假设, 求出的磁力应该是相同的。

实例1 图3表示一个电磁铁, 线圈匝数为 N , 电流为 I , 在磁路中产生磁通为 Φ , 铁芯的横截面积为 S , 求衔铁受到电磁铁对它的吸力。

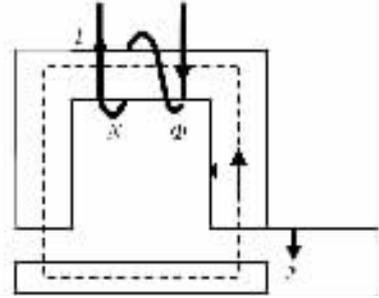


图3 电磁铁

令衔铁发生一虚位移 dy , 调节电源的电压以保持铁芯中的 Φ 恒定, 衔铁的位移将引起系统磁能的变化。

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv$$

由于 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, 得

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \frac{B^2}{\mu} dv', \quad W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \mu H^2 dv'$$

得 $dW_m = 2 \left(\frac{B^2}{2\mu_0} S dy \right) = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} dy$

因为 Φ 是恒定不变的, 因此得到 $F_\phi = a_y (F_\phi)_y = -a_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$. F 小于零, 说明磁场力有使气隙缩小趋势,

亦即通常说的吸力, 大小为 $\frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$.

实例2 图4所示为一电磁铁, 试计算其重力。

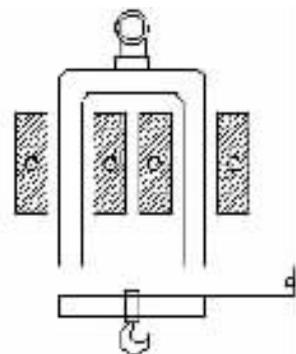


图4 电磁铁

设电磁铁每个极的面积为 S , 气隙长度为 g , 并设气隙中磁场均匀分布. 由于铁芯中的磁场强度很

小,因而磁场能主要存储在气隙之中。假设气隙长度有一微小改变量 dg ,并保证气隙磁通不变,气隙中的磁场能为

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0}(2Sg) = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} g$$

因此,磁场力

$$F = -\nabla W = -\left(\frac{\partial W}{\partial g}\right)_{\varphi=\text{const}} = -\frac{\Phi^2}{\mu_0 S}$$

F 小于零,说明磁场力有使气隙缩小趋势,亦即通常说的吸力。

以上两例题用虚位移解法非常简单,然而用其它方法求解却是非常复杂。

3 结论

文章中所探讨的导体和电介质受到的电场力、载流回路和磁介质受到的磁场力在实际应用上都比较广泛,而求解比较复杂。本文给出了相对比较简单的计算公式,利用它可以较容易地求解出电场力,避免了复杂的计算。

参考文献:

[1] 付宝连. 物理模拟虚位移原理及虚应力原理[J]. 燕山大

学学报,2004,28(1):18-21.

[2] 刘辉,谢元喜. 用叠加法求 Burgers-KdV 方程的精确解[J]. 四川大学学报(自然科学版),2005,28(2):185-186.

[3] 赵升频. 导体在静电场中的问题讨论[J]. 重庆工学院学报(自然科学版),2007,21(11):91-93.

[4] 杨宪章. 工程电磁学[M]. 北京:中国电力出版社,2007.

[5] David J G. Introduction to electrodynamics[M]. New Jersey:Prentice Hall,1999:353-355.

[6] 黄晓琴. 麦克斯韦应力张量方法及其应用[J]. 大学物理,1995,10:9-12.

[7] 梁灿彬. 电磁学[M]. 北京:人民教育出版社,1980.

[8] 赵凯华,陈熙远. 电磁学[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

[9] 张三慧. 大学物理学·基于相对论的电磁学[M]. 第3版. 北京:清华大学出版社,2008.

[10] 汪德新. 电动力学[M]. 北京:科学出版社,2005.

[11] 朱照宣,周起钊,殷金生. 理论力学[M]. 北京:北京大学出版社,1982.

[12] 王典成. 电磁场理论与微波技术[M]. 北京:科学出版社,1986.

[13] 胡先权,欧红叶,田立新,等. 量子散射中格林函数多种围道积分的等价性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2007,24(2):1-5.

Virtual Displacement Method Applied to Analysis of Electromagnetic Field Strength

CHEN Wen-feng, HU Xian-quan

(College of Physics and Electronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: According to the relations among the energy supplied by the power system under different circumstances, the increased electromagnetic energy by the system, the power of electrostatic field strength and magnetic field strength, we can conveniently calculate the electrostatic field and magnetic field strength of the live conductor and dielectric with the virtual displacement method. This paper firstly exemplifies the electric field strength of conductor $f = \frac{1}{2}\xi_0 E^2 \mathbf{n} = \frac{\sigma^2}{2\xi_0} \mathbf{n}$, and dielectric during the constant current, and electric field strength of carrier loop and magnetic medium during the flux linkage constant $F = -\nabla W$, and finally discusses the calculation results briefly. The results show that while analyzing any conductor and dielectric subjected to electrostatic force, magnetic medium to the magnetic force in the conductor system, Coulomb's law, and Ampere force formula can be used theoretically to calculate it. But in fact it is difficult to resolve the problem by means of Coulomb's law. Ampere force formula at this moment. Analoging to the rate of change of object in potential energy spatial to calculate the power in mechanics, we assume that the force objects took place small virtual displacement in the direction of the force.

Key words: electric force; magnetic forces; virtual displacement method

(责任编辑 欧红叶)