关于不定方程 $x^2-3y^4=166$*

朱 德 辉
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:利用一种初等的证明方法,对一个不定方程 $x^2-3y^4=166$ 的正整数解进行了研究。证明过程中仅涉及到初等的数论知识,即运用递归数列、同余式和平方剩余的方法。首先利用 Pell 方程的解的性质把不定方程 $x^2-3y^4=166$ 的解转化为由两个非结合类给出,然后再进一步利用相关知识使得问题简化为两种相对简单的情况,对其每一种情况都利用递归数列,同余式和平方剩余的相关知识对其是否有正整数解进行证明,如果有正整数解则进行求解。最后得出该不定方程 $x^2-3y^4=166$ 仅有正整数解 $(x,y)=(13,1),(293,13)$。

关键词:平方剩余;递归序列;正整数解;不定方程
中图分类号:O156.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)03-0021-03

关于不定方程 $x^2-Dy^4=N$(其中 D,N 为给定的整数,且 $D>0$ 为非平方数)已有不少研究工作[1-3]。设 $N(D,N)$ 是方程 $x^2-Dy^4=N$ 的正整数解的组数,Cohn[4] 证明了以下几个结果:$N(5,44)=1,(x,y)=(7,1)$;$N(5,11)=2,(x,y)=(4,1),(56,5)$;$N(5,-44)=3,(x,y)=(6,2),(19,3),(181,9)$。Tzanakis[5] 证明了 $y\equiv 0(\mathrm{mod}8)$ 时,$N(2,17)=0,N(2,41)=0,N(8,17)=0,N(2,97)=0$。黎进香[6] 证明了 $N(3,46)=2,(x,y)=(7,1),(17,3)$。林丽娟[7] 证明了 $N(3,22)=2,(x,y)=(5,1),(85,7)$。

本文运用递归数列、同余式和平方剩余证明了不定方程 $x^2-3y^4=166$ 仅有正整数解 $(x,y)=(13,1),(293,13)$。

定理 不定方程
$$x^2-3y^4=166 \tag{1}$$
仅有正整数解 $(x,y)=(13,1),(293,13)$。

证明 首先考虑 pell 方程
$$a^2-3b^2=166$$
其一般解可由下面两个非结合类给出
$$a+b\sqrt{3}=\pm(13+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$$
或
$$a+b\sqrt{3}=\pm(-13+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$$
令 $u_n\sqrt{3}+v_n=(\sqrt{3}+2)^n$,则如果(1)式有解,必有 n 使得
$$y^2=\pm(v_n+13u_n)\text{ 或}$$
$$y^2=\pm(-v_n+13u_n)=\mp(v_{-n}+13u_{-n})$$
当 $n\geqslant 0$ 时,$v_n+13u_n>0$;当 $n<0$ 时,$v_n+13u_n<0$。因此可归结为
$$y^2=v_n+13u_n,n\geqslant 0 \tag{2}$$
或
$$y^2=-v_n+13u_n,n>0 \tag{3}$$
容易验证下列关系
$$v_{n+2}=4v_{n+1}-v_n,v_0=1,v_1=2$$
$$u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n,u_0=0,u_1=1$$
$$\begin{aligned}&v_{2n}=v_n^2+3u_n^2=2v_n^2-1=6u_n^2+1\\&u_{2n}=2v_nu_n\\&v_{n+l}=3u_nu_l+v_nv_l\\&u_{n+l}=u_nv_l+v_nu_l\end{aligned} \tag{4}$$
$$\begin{aligned}&u_{n+2kr}\equiv(-1)^ku_n(\mathrm{mod}v_r)\\&v_{n+2kr}\equiv(-1)^kv_n(\mathrm{mod}\ v_r)\\&u_{n+2kr}\equiv u_n(\mathrm{mod}\ u_r),v_{n+2kr}\equiv v_n(\mathrm{mod}\ u_r)\end{aligned} \tag{5}$$

ⅰ)对(2)式取模 8,得剩余序列周期为 4,当 $n\equiv 1,2,3(\mathrm{mod}\ 4)$ 时,$v_n+13u_n\equiv 7,3,5(\mathrm{mod}\ 8)$ 为模 8 的平方非剩余,故排除。剩 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$,即 $n\equiv 0,4(\mathrm{mod}\ 8)$。对(2)式取模 7,得剩余序列周期为 8,当 $n\equiv 4(\mathrm{mod}\ 8)$ 时,$v_n+13u_n\equiv 6(\mathrm{mod}\ 7)$ 为

* 收稿日期:2007-12-10 修回日期:2008-02-20
资助项目:重庆市教委科研基金项目(No. 010204)
作者简介:朱德辉(1981-),女,硕士研究生,研究方向为数论。

模 7 的平方非剩余,故排除。剩 $n \equiv 0 \pmod 8$。

若 $n \neq 0$,令 $n = 0 + 2(4k \pm 1)m, m = 2^t, t \geqslant 2$,由(5)式知

$$y^2 = v_n + 13u_n = v_{0+8km\pm 2m} + 13u_{0+8km\pm 2m} \equiv v_{\pm 2m} + 13u_{\pm 2m} \equiv \pm 13u_{2m} \pmod{v_{2m}} \tag{6}$$

易知 $v_{2m} \equiv 6 \pmod{13}$,所以 $\left(\frac{6}{13}\right) = -1$,又 $v_{2m} \equiv 1 \pmod 8$,设 $2^s \parallel u_m$,则

$$\left(\frac{u_m}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{u_m/2^s}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{v_{2m}}{u_m/2^s}\right) = \left(\frac{6u_m^2 + 1}{u_m/2^s}\right) = 1$$

$$\left(\frac{v_m}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{2v_m^2 - 1}{v_m}\right) = \left(\frac{-1}{v_m}\right) = 1$$

所以 $\left(\frac{u_{2m}}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{2u_m v_m}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{u_m}{v_{2m}}\right)\left(\frac{v_m}{v_{2m}}\right) = 1$

因此 $1 = \left(\frac{y^2}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 13u_{2m}}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{13}{v_{2m}}\right)\left(\frac{u_{2m}}{v_{2m}}\right) = -1$。所以(6)式不成立,此时(2)式无解。当 $n = 0$ 时,得到方程(1)式的正整数解 $(x, y) = (13, 1)$。

ⅱ)对(3)式取模 3,得剩余序列周期为 6,当 $n \equiv 0, 1 \pmod 6$ 时,$-v_n + 13u_n \equiv 2, 2 \pmod 3$ 为模 3 的平方非剩余,故排除。剩 $n \equiv 2, 3, 4, 5 \pmod 6$,即 $n \equiv 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11 \pmod{12}$。对(3)式取模 13,得剩余序列周期为 12,当 $n \equiv 2, 4, 5, 8, 10, 11 \pmod{12}$ 时,$-v_n + 13u_n \equiv 6, 7, 2, 7, 6, 11 \pmod{13}$ 为模 13 的平方非剩余,故排除。剩 $n \equiv 3, 9 \pmod{12}$,即 $n \equiv 3 \pmod 6$。

对(3)式取模 8,得剩余序列周期为 4,当 $n \equiv 0, 1, 2 \pmod 4$ 时,$-v_n + 13u_n \equiv 7, 3, 5 \pmod 8$ 为模 8 的平方非剩余,故排除。还剩 $n \equiv 3 \pmod 4$。

对(3)式取模 71,得剩余序列周期为 7,当 $n \equiv 0, 1, 4, 6 \pmod 7$ 时,$-v_n + 13u_n \equiv 70, 11, 63, 56 \pmod{71}$ 为模 71 的平方非剩余,故排除。剩 $n \equiv 2, 3, 5 \pmod 7$。

对(3)式取模 10333,得剩余序列周期为 84,当 $n \equiv 2, 4, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 22, 25, 27, 29, 31, 33, 34, 40, 41, 44, 46, 49, 50, 51, 54, 55, 56, 57, 59, 61, 62, 64, 67, 69, 71, 73, 75, 76, 82, 83 \pmod{84}$,$-v_n + 13u_n \equiv 45, 631, 1802, 8752, 2207, 2645, 2150, 5955, 1004, 1573, 352, 3510, 9910, 8651, 2165, 993, 1404, 8330, 5054, 59, 15, 10288, 9702, 8531, 1581, 8126, 7688, 8183, 4378, 9329, 8760, 9981, 6823, 423, 1682, 8168, 9340, 8929, 2003, 5279, 10274, 10318 \pmod{10333}$ 为模 10333 的平方非剩余,故排除。还剩 $n \equiv 0, 1, 3, 5, 6, 10, 11, 16, 18, 21, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 45, 47, 48, 52, 53, 58, 60, 63, 65, 66, 68, 70, 72, 74, 77, 78, 79, 80, 81 \pmod{84}$。

由 $n \equiv 3 \pmod 4$, $n \equiv 2, 3, 5 \pmod 7$, $n \equiv 3 \pmod 6$,可排除 $n \equiv 0, 1, 5, 6, 10, 11, 16, 18, 21, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 45, 47, 48, 52, 53, 58, 60, 63, 65, 66, 68, 70, 72, 74, 77, 78, 79, 80, 81 \pmod{84}$。还剩 $n \equiv 3 \pmod{84}$,若 $n \neq 3$,令 $n = 3 + 2(4k \pm 1) \times 3 \times 7 \times 2^t$,令

$$m = \begin{cases} 2^t, t \equiv 0, 1, 4, 7, 8, 9, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 27, 30, 31, 32, 34, 37, 38 \pmod{42} \\ 3 \times 2^t, t \equiv 2, 5, 6, 13, 23, 26, 28, 29, 35, 36, 41 \pmod{42} \\ 7 \times 2^t, t \equiv 10, 11, 16, 25, 40 \pmod{42} \\ 3 \times 7 \times 2^t, t \equiv 3, 12, 33, 39 \pmod{42} \end{cases}$$

其中 $t \geqslant 1$,由(4),(5)式可得

$$y^2 = -v_n + 13u_n = -v_{3+8km\pm 2m} + 13u_{3+8km\pm 2m} \equiv -v_{3\pm 2m} + 13u_{3\pm 2m} \equiv -(3u_3 u_{\pm 2m} + v_3 v_{\pm 2m}) + 13(u_3 v_{\pm 2m} + v_3 u_{\pm 2m}) \equiv \pm 293u_{2m} + 169v_{2m} \pmod{v_{2m}} \tag{7}$$

易知 $v_{2m} \equiv 1 \pmod 8$,又由 ⅰ)知 $\left(\frac{u_{2m}}{v_{2m}}\right) = 1$,所以

$$1 = \left(\frac{y^2}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 293u_{2m}}{v_{2m}}\right) = \left(\frac{v_{2m}}{293}\right) \tag{8}$$

对 v_{2m} 取模 293 得剩余序列周期为 147,对 $2m$ 模 147 得剩余序列周期为 42 且有表 1。

表 1 $2m$ 模 147 和 v_{2m} 模 293 的情况表

$t(\geqslant 1) \pmod{42}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$2m \pmod{147}$	1	2	12	21	16	96	45	128	109	71	112	77	21	27	67	134	112	95	43	86	25
$v_{2m} \equiv \pmod{293}$	2	7	207	27	245	194	263	280	44	62	50	18	27	273	78	154	50	105	74	110	173
$t(\geqslant 1) \pmod{42}$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
$2m \pmod{147}$	50	100	12	106	14	96	113	90	33	22	44	88	21	58	54	108	23	46	21	112	75
$v_{2m} \equiv \pmod{293}$	85	92	207	187	116	194	47	41	138	251	11	241	27	217	213	200	98	162	27	50	230

表中所有$2m$均有$\left(\frac{v_{2m}}{293}\right)=-1$,所以(8)式不成立,此时(3)式无解。当$n=3$时,得到方程(1)的正整数解$(x,y)=(293,13)$。

综合ⅰ),ⅱ)知方程(1)式仅有正整数解(x,y)=(13,1),(293,13)。 证毕

致谢:感谢罗明教授对本稿写作的指导!

参考文献:

[1] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989.

[2] 柯召,孙琦. 数论讲义[M]. 北京:高等教育出版社,2001.

[3] 罗明. 关于不定方程$x^3+1=7y^2$[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),2003,20(1):5-7.

[4] COHN J H E. Some Quartic Diophantine Equations[J]. Pacific J Math,1986,26:233-243.

[5] TZANAKIS N. On the Diophantine Equations $y^2-D=2^n$[J]. J Number Theory,1983,17:144-164.

[6] 黎进香,张春蕊. 关于不定方程的初等解法[J]. 哈尔滨工业大学学报,1995(5):13-16.

[7] 林丽娟,何波. 关于不定方程$x^2-3y^4=22$[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2007,24(3):31-32.

On the Diophantine Equation $x^2-3y^4=166$

ZHU De-hui

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The study of the Diophantine equation $x^2-Dy^4=N$ (D and N are the given integers, $D>0$ and D is non-square) has caused some authors' interests, such as Cohn, Tzanakis, LI Jin-xiang, LIN LI-juan. Cohn has proven some conclusions. For example: $N(5,44)=1,(x,y)=(7,1)$; $N(5,11)=2,(x,y)=(4,1),(56,5)$; $N(5,-44)=3,(x,y)=(6,2),(19,3),(181,9)$. Tzanakis has proven some conclusions while $y\equiv 0\pmod 8$. For example: $N(2,17)=0, N(2,41)=0, N(8,17)=0, N(2,97)=0$. LI Jin-xiang has proven one conclusion: $N(3,46)=2,(x,y)=(7,1),(17,3)$. LIN LI-juan has also proven one conclusion: $N(3,22)=2,(x,y)=(5,1),(85,7)$. But this Diophantine equation $x^2-3y^4=166$ still has not been solved until now. In this paper the author has proved that the Diophantine equation $x^2-3y^4=166$ has only positive integral solutions $(x,y)=(13,1),(293,13)$ with the primary methods of recursive sequence, quadratic remainder and congruence.

Key words: congruence; recursive sequence; quadratic remainder; positive integral solution

(责任编辑 游中胜)

关于《重庆师范大学学报(自然科学版)》实行开放获取的公告

近十多年来,国际学术传播领域兴起了网络传播开放获取(Open Access,OA)运动,2001年来自世界各地的代表在布达佩斯召开国际学术出版界会议,签署了开放获取协议(BOAI),积极倡议全世界学术文献资料开放共享,将'开放获取'的定义协定为——学术论文发布于因特网,允许任何读者免费使用,自由阅读、下载、复制、编辑和链接全部内容。为提高本刊的传播范围,扩大社会影响,本刊响应布达佩斯倡议,决定全面实行Open Access,并已加入DOAJ等一些国际OA机构数据库,将本刊刊发的内容提交这些数据库进行网络OA发布。特此通告本刊广大作者,如不愿意将作品实行OA,请在投稿时作特别申明,以便我们对来稿作特殊处理。

本刊编辑部