拟线性抛物型方程边值问题时间周期解*

查 中 伟
(重庆三峡学院 数学与计算机科学学院, 重庆 万州 404000)

摘 要:研究一类拟线性抛物型方程的边值问题 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t,\dfrac{\partial u}{\partial x}),(x,t)\in\Omega\\ u(0,t)=\varphi_1(t),u(l,t)=\varphi_2(t)\end{cases}$,$\Omega=\{(x,t)\mid 0<x<l,-\infty<t<+\infty\}$。首先引入时间周期的 Hölder 连续函数空间 $C_{2+\sigma}^T(\Omega)$ 和函数 $F(x,t,w)=\begin{cases}f(x,t,w)-(u-i),u<i\\ f(x,t,w),i\leqslant u\leqslant j\\ f(x,t,w)-(u-j),u>j\end{cases}$,在已知函数的某些假设条件下,利用上下解方法和 Leray-Schauder 不动点定理证明了边值问题 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x,t,\dfrac{\partial u}{\partial x}),(x,t)\in\Omega\\ u(0,t)=\varphi_1(t),u(l,t)=\varphi_2(t)\end{cases}$ 有满足 $j(x)\leqslant u(x,t)\leqslant j(x)$ 的时间周期解 $u(x,t)\in C_{2+\sigma}^T(\Omega)$。由函数 F 的定义推断出所研究的边值问题时间周期解的存在性。

关键词:拟线性抛物型方程;边值问题;Hölder 连续函数;T-周期解
中图分类号:O175.26 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2008)03-0028-04

1 预备知识及结论

关于偏微分方程定解问题时间周期解的研究具有重要的实际意义,不少学者在这方面做了许多工作,如文献[1-7]。本文讨论一类拟线性抛物型方程的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t,\dfrac{\partial u}{\partial x}),(x,t)\in\Omega & (1)\\ u(0,t)=\varphi_1(t),u(l,t)=\varphi_2(t) & (2)\end{cases}$$

的周期解。其中 $f(x,t,w)$,$\varphi_1(t)$,$\varphi_2(t)$ 都是关于时间变量 t 的周期为 T 的周期函数($T>0$),称之为 T-周期函数;且

$$\Omega=\{(x,t)\mid 0<x<l,-\infty<t<+\infty\}。$$

假设 $D\in\mathbf{R}^2$,记 $C_{2+\sigma}(D)$($0<\sigma<1$ 是 Hölder 指数)为 D 上 Hölder 连续函数 $u(x,t)$ 的全体,易知 $C_{2+\sigma}(D)$ 是 Banach 空间[8]。记 $C_{2+\sigma}^T(D)$ 表示 $C_{2+\sigma}(D)$ 中 T-周期函数的集合,则 $C_{2+\sigma}^T(D)$ 是 $C_{2+\sigma}(D)$ 的子空间。

为了需要,首先引入文献[9]中关于常微分方程下解和上解的概念。

定义 设有微分方程

$$y''+f(x,y,y')=0 \tag{3}$$

如果存在函数 $i(x)$,$j(x)\in C^2[a,b]$,使得

$$i''(x)+f(x,i(x),i'(x))\geqslant 0 \tag{4}$$

及

$$j''(x)+f(x,j(x),j'(x))\leqslant 0 \tag{5}$$

那么称 $i(x)$,$j(x)$ 分别是方程(3)在 $[a,b]$ 上的一个下解和上解。

引理 1 设 $g(x)\in C[a,b]$,且方程 $y''+g(x)y=0$ 在 $[a,b]$ 上有一个正的上解,则对任意小的正数 ε,方程 $y''+[g(x)+\varepsilon]y=0$ 在 $[a,b]$ 必有正值解。

证明 对于任何 x_1,x_2($a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$),考虑边值问题

$$\begin{cases}y''+g(x)y=0 & (6)\\ y(x_1)=y(x_2)=0 & (7)\end{cases}$$

易证(6)、(7)式只有零解。事实上,设 $\tilde{y}(x)$ 是(6)、(7)式的一个非零解,不失一般性设 $\tilde{y}(x)\neq 0$。假定 $j(x)$ 是(6)式的一个正上解,那么对任何 $C_1>0$,$C_1j(x)$ 也是(6)式的一个正上解。适当选择 C_1,使得 $C_1j(x)\geqslant\tilde{y}(x)$($x\in[x_1,x_2]$),且对某个 $x_0\in(x_1,x_2)$ 有 $C_1j(x_0)\geqslant\tilde{y}(x_0)$,$C_1j'(x_0)\geqslant\tilde{y}'(x_0)$
得到(6)式的一个上解 $C_1j(x)$ 和一个下解 $\tilde{y}(x)$,且

* 收稿日期:2007-03-20 修回日期:2008-02-29
作者简介:查中伟(1949-),男,教授,研究方向为偏微分方程及其应用。

有 $C_1 j(x_2) > \tilde{y}(x_2) = 0$

再选择常数 C_2,使 $\tilde{y}(x_2) < C_2 < C_1 j(x_2)$,则由文献[9]的结论知方程(6)有解 $\bar{y}(x)$ 且满足

$$\tilde{y}(x) \leqslant \bar{y}(x) \leqslant C_1 j(x),\ x \in [x_0, x_2]$$
$$\bar{y}'(x_0) = \tilde{y}'(x_0)$$

这与常微分方程初值问题解的唯一性矛盾。于是对任何常数 α, β,方程(6)满足边界条件

$$y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

的边值问题有与 α, β 有关的唯一解 $y(x, \alpha, \beta)$。如果 $\alpha, \beta > 0$,由前面的证明知,$y(x, \alpha, \beta) > 0$。根据常微分方程边值问题解的连续依赖性,

$$y'' + [g(x) + \varepsilon] y = 0$$

必有一个正值解。 证毕

以 K 表示在区域 $\bar{\Omega}$ 上连续且对 x 具有连续偏导数的 T 周期函数 $u(x,t)$ 的集合,定义范数

$$\| u \| = \max_{[0,l]\times[0,T]} |u| + \max_{[0,l]\times[0,T]} |u_x|$$

显然 K 是 Banach 空间。记

$$g_1(x,w) = \min_{t\in[0,T]} f(x,t,w)$$
$$g_2(x,w) = \max_{t\in[0,T]} f(x,t,w)$$

对边值问题(1)、(2)假设如下。

1) $f(x,t,w)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是指数为 σ 的一致 Hölder 连续函数,且对 x, w 是 Hölder 连续的,对 t 是一致的。

2) 当 $|u(x,t)| \leqslant M$(M 为常数)时,$|f(x,t,w)| \leqslant \alpha(|w|)$,其中 $\alpha(|w|)$ 是 w 的非减正值函数,且当 $|w| \to +\infty$ 时,$\alpha(|w|)$ 是 w^2 的高阶无穷小。

3) 存在 $\Psi(x,t) \in C^T_{2+\sigma}(\bar{\Omega})$,有 $\Psi(0,t) = \varphi_1(t)$,$\Psi(l,t) = \varphi_2(t)$。

4) 常微分方程 $y'' + g_1(x, y') = 0$ 及 $y'' + g_2(x, y') = 0$ 分别有下解 $i(x)$ 和上解 $j(x)$ 且满足 $i(x) < j(x)$ $(x \in [0,l])$,$i(0) \leqslant \varphi_1(t) \leqslant j(0)$,$i(l) \leqslant \varphi_2(t) \leqslant j(l)$ $(t \in [0,T])$。

于是有下面的结论。

定理 如果条件1)-4)成立,则定解问题(1)、(2)有解 $u(x,t) \in C^T_{2+\sigma}(\bar{\Omega})$,且满足

$$i(x) \leqslant u(x,t) \leqslant j(x),\ (x,t) \in \bar{\Omega}$$

2 边值问题的时间周期解

引入函数

$$F(x,t,w) = \begin{cases} f(x,t,w) - (u - i), & u < i \\ f(x,t,w), & i \leqslant u \leqslant j \\ f(x,t,w) - (u - j), & u > j \end{cases} \quad (8)$$

考虑拟线性抛物型方程的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(x, t, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), (x,t) \in \Omega & (9) \\ u(0,t) = \varphi_1(t), u(l,t) = \varphi_2(t) & (2) \end{cases}$$

如果能够证明(9)、(2)式有满足 $i(x) \leqslant u(x,t) \leqslant j(x)$ 的 T-周期解 $u(x,t) \in C^T_{2+\sigma}(\bar{\Omega})$,则由 F 的定义知定理结论得以证明。用两个引理完成定理的证明,首先有引理2。

引理2 定解问题(9)、(2)的 T-周期解 $u(x,t)$ 如果存在,则必有

$$i(x) \leqslant u(x,t) \leqslant j(x),\ (x,t) \in \bar{\Omega}$$

证明 记

$$F_1(x,w) = \min_{t\in[0,T]} F(x,t,w)$$
$$F_2(x,w) = \max_{t\in[0,T]} F(x,t,w)$$

由条件4),$i(x)$ 和 $j(x)$ 分别是常微分方程 $y'' + F_1(x, y') = 0$ 和 $y'' + F_2(x, y') = 0$ 的下解和上解。再令

$$E(x,u) = \begin{cases} F_1(x, i') - (u - i), & u < i \\ \dfrac{u - i}{j - i}[F_2(x, j') - F_1(x, i')] + F_1(x, i'), & i \leqslant u \leqslant j \\ F_2(x, j') - (u - j), & u > j \end{cases} \quad (10)$$

则 $E(x,u)$ 是 $[0,l] \times (-\infty, +\infty)$ 上的连续函数,且对 x 和 u 是 Hölder 连续的(指数为 σ)。取一参数 λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$,构成拟线性抛物型方程族的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda F\left(x, t, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + (1 - \lambda) E(x,u) & (11) \\ u(0,t) = \varphi_1(t), u(l,t) = \varphi_2(t) & (2) \end{cases}$$

可以断言,(11)、(2)式的任何 T-周期解 $u(x,t)$ 必满足不等式

$$i(x) \leqslant u(x,t) \leqslant j(x),\ (x,t) \in \bar{\Omega} \quad (12)$$

事实上,为证(12)式的右方不等式,只需证

$$h(x,t) = u(x,t) - j(x) \leqslant 0,\ (x,t) \in \bar{\Omega}$$

用反证方法,如若不然,由假设4)知,$h(x,t)$ 必在 $\bar{\Omega}$ 的内点 $M_0(x_0, t_0)$ 取得正的最大值,于是有

$$\left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{M_0} = 0, \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_{M_0} \leqslant 0$$

注意到 $j''(x) + F_2(x, y') \leqslant 0$ 及函数 $E(x,u)$ 的表示式(10)式,则得到

$$0 \leqslant \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{M_0} + j''(x_0) \leqslant$$

$$\lambda F\left(x_0, t_0, \left(\frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial x}\right)\right) + (1 - \lambda) E(x_0, u(x_0, t_0)) -$$

$$F_2(x_0,j''(x_0)) \leqslant \lambda F(x_0,t_0,\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x}) + (1-\lambda)E(x_0,u(x_0,t_0)) - [\lambda F_2(x_0,j'(x_0)) + (1-\lambda)E(x_0,j(x_0))] = -[u(x_0,t_0) - j(x_0)] = -h(x_0,t_0) < 0$$

矛盾。同理可得(12)式的左端不等式成立。特别地，当 $\lambda = 1$ 时就是需要的结论。

设 $v(x,t)$ 是函数空间 K 中的一已知函数，考察线性抛物型方程的边值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda F(x,t,\frac{\partial v}{\partial x}) + (1-\lambda)E(x,v(x,t)),(x,t) \in \Omega & (13)\\ u(o,t) = \varphi_1 t, u(l,t) = \varphi_2(t) & (2)\end{cases}$$

由 $K \to K$ 定义积分算子

$$R(v,\lambda) = v_\lambda(x,t) \tag{14}$$

这里

$$v_\lambda(x,t) = u_0(x,t) + \int_{-\infty}^{t}\int_0^l G(x,t;\xi,\eta)[\lambda F(\xi,\eta,\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial x}) + (1-\lambda)E(\xi,v(\xi,\eta))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{15}$$

其中是 $G(x,t;\xi,\eta)$ 是 $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 的 Green 函数，$u_0(x,t)$ 是方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 满足边界条件(2)的唯一解。根据文献[10]知，$v_\lambda(x,t)$ 是线性抛物方程定解问题(13)、(2)的唯一 T-周期解，且 $v_\lambda(x,t) \in C_{2+\sigma}^T(\Omega)$。　　证毕

引理 3　由(14)式定义的积分算子 $R(v,\lambda)$ 有不动点 $R(v,1) = v(x,t)$。

证明　注意到 $R(v,\lambda)$ 对任何 $v(x,t) \in K$，当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时都有定义，且对固定的 $\lambda \in [0,1]$ 是连续的。首先证明 $R(v,\lambda) = v_\lambda(x,t)$ 的所有解 $v_\lambda(x,t)$ 关于 K 的范数是有界的。事实上，令

$$N = \max_{x \in [0,l]}(|i(x)|,|j(x)|)$$

由引理 2 知

$$|v_\lambda(x,t)| \leqslant N,(x,t) \in \overline{\Omega} \tag{16}$$

为了说明 $\frac{\partial v_\lambda}{\partial x}$ 是有界的，将 $v_\lambda(x,t)$ 表示成以下形式

$$v_\lambda(x,t) = u_0(x,t) + \int_{t-\tau}^{t}\int_0^l G(x,t;\xi,\eta)[\lambda F(\xi,\eta,\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial x}) + (1-\lambda)E(\xi,v(\xi,\eta))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int_0^l G(x,t;\xi,t-\tau)v(\xi,t-\tau)\mathrm{d}\xi \tag{17}$$

其中 $\tau > 0$ 为常数。(17)式两边对 x 求导数得

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \int_{t-\tau}^{l}\int_0^l \frac{\partial G}{\partial x}[\lambda F + (1-\lambda)E]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int_0^l \frac{\partial G}{\partial x}v\mathrm{d}\xi$$

取

$$N_1 = \max_{\Omega}\left|\frac{\partial v_\lambda}{\partial x}\right|, N_2 = \max_{\Omega}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|$$

$$N_3 = \max_{x \in [0,l]}(|i'(x)|,|j'(x)|)$$

由不等式(16)及假设条件 2)可以得到

$$|E(x,v(x,t))| \leqslant \alpha(N_3)$$

其中，当 $N_3 \to +\infty$ 时，$\alpha(N_3)$ 是 N_3^2 的高阶无穷小。如果 $N_1 \leqslant N_3$，则 N_3 就是 $\frac{\partial v_\lambda}{\partial x}$ 的界，不妨设 $N_1 > N_3$，由假设 2)知 $\alpha(N_3) < \alpha(N_1)$，且

$$N_1 \leqslant N_2 + \alpha(N_1)\int_{t-\tau}^{t}\left|\frac{\partial G(x,t;\xi,\eta)}{\partial x}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + N\int_0^l\left|\frac{\partial G(x,t;\xi,t-\tau)}{\partial x}\right|\mathrm{d}\xi$$

利用 Green 函数 $G(x,t;\xi,\eta)$ 的表达式可知，当 $0 < t-\eta \leqslant \tau$ 时，有 $\int_0^1\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{C}{\sqrt{t-\eta}}$

这里的 C 是与 t,η,τ 及 l 无关的常数。从而有

$$N_1 \leqslant N_2 + 2C\alpha(N_1)\sqrt{\tau} + \frac{CN}{\sqrt{\tau}}$$

如果选取 $\tau \leqslant \frac{N}{\alpha(N_1)}$，由上式得到

$$\frac{N_1^2}{\alpha(N_1)} \leqslant \frac{N_2^2}{\alpha(N_1)} + 4\sqrt{2}CN_2\sqrt{\frac{N}{\alpha(N_1)}} + 8C^2N \tag{18}$$

注意到(18)式的右端是 N_1 的减函数，所以 $\left|\frac{\partial v_\lambda}{\partial x}\right|$ 必有一个先验界 M，因此 $v_\lambda(x,t)$ 关于 K 的范数是有界的。

其次，证明 $R(v,0) = v_0(x,t)$ 在 K 中的解 $v_0(x,t)$ 存在且唯一。$v_0(x,t)$ 的存在性是显然的[11]。为证唯一性，只须证明以下定解问题只有零解

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u}{j-i}[F_2(x,j') - F_1(x,i')] \\ (x,t) \in \Omega & (19)\\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & (20)\end{cases}$$

因为 $[j''(x) + F_2(x,j')] - [i''(x) + F_1(x,i')] \leqslant 0$，所以常微分方程 $y'' + \frac{y}{j-i}[F_2(x,j') - F_1(x,i')] = 0$ 有正的上解 $y(x) = j(x) - i(x)$。由引理 1 知对任意 $\varepsilon > 0$，方程

$$y'' + \left\{\frac{1}{j-i}[F_2(x,j') - F_1(x,i')] + \varepsilon\right\}y = 0$$

必有正值解 $\tilde{y}(x)$。记

$$\tilde{u}(x,t) = \tilde{y}(x)e^{-\frac{\varepsilon}{2}t},(x,t) \in \overline{\Omega}$$

则有 $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} < \frac{\tilde{u}}{j-i}[F_2(x,j') - F_1(x,i')]$

又因 $\lim\limits_{t\to-\infty}\tilde{u}(x,t) = +\infty$,故问题(19)、(20)的任何解必以 $\tilde{u}(x,t)$ 为界[12]。但 $\lim\limits_{t\to+\infty}\tilde{u}(x,t) = 0$,可见(19)、(20)式的解在 $\overline{\Omega}$上不会大于零。同理(19)、(20)式的解在 $\overline{\Omega}$上不会小于零,则只有零解。

最后易知,$R(v,\lambda)$ 是全连续算子,且对任何 $v(x,t) \in K$,$R(v,\lambda)$ 关于 λ 是一致连续的。所以 Leray-Schauder 不动点定理[8] 条件满足,因此,$R(v,\lambda)$ 有不动点 $R(v,1) = v(x,t)$。 证毕

综合引理2和引理3,本文的结论即定理得到证明。

参考文献:

[1] KOLESOV J. Periodic Solutions of a Nonlinear Parabolic Equation of Second Order[J]. Trans Moscow Math Soc, 1970, 21:114-146.

[2] FARLOW S J. Periodic Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems of the Second Kind[J]. Portugal Math, 1973, 32:25-37.

[3] GAINES R, WALTER W. Periodic Solutions to Nonlinear Parabolic Differential Equations[J]. Rocky Mountain J Math, 1977, 7:297-312.

[4] 姜礼尚,蒋本炎. 拟线性抛物型方程周期解[J]. 数学年刊,1986,7A(3):338-346.

[5] 李全国,赵怡. 一类具有无穷多个周期解的二阶偏微分方程[J]. 应用数学学报,2002,4:130-138.

[6] 查中伟. 一类拟线性抛物型方程初值问题的周期解[J]. 重庆三峡学院学报,2003,4:94-98.

[7] 查中伟. 一类线性抛物型方程解的爆破性质[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2004,29(2):172-176.

[8] 弗里德曼 A. 抛物型偏微分方程[M]. 夏宗伟译. 北京:科学出版社,1984.

[9] JACKSON L, SCHRADER K. Comparison Theorems for Nonlinear Differential Equations[J]. J Differential Equations, 1967, 3:248-255.

[10] FIFE P. Solutions of Parabolic Boundary Problems Existing for All Time[J]. Arch Rational Mech Anal, 1964, 16:155-186.

[11] BANGE D. Periodic Solutions of a Quasi-linear Parabolic Differential Equation[J]. J Differential Equations, 1975, 17:61-72.

[12] WESTPHAL H. Zur Abschatzung der Losung Nichtlinearer Parabolisher Differential Gleichungen[J]. Math Z, 1949, 51:690-695.

Time Periodic Solutions to Boundary Value Problem of Quasi-linear Parabolic Equations

ZHA Zhong-wei

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Three Gorges University, Chongqing Wanzhou 404000, China)

Abstract: The boundary value problem of a kind of quasi-linear parabolic equations is discussed. $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t,\frac{\partial u}{\partial x}),(x,t) \in \Omega \\ u(0,t) = \varphi_1(t),u(l,t) = \varphi_2(t)\end{cases}$, $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < l, -\infty < t < +\infty\}$. This paper firstly introduces Hölder space $C_{2+\sigma}^{T}(\Omega)$ of T-periodic continuous function, and following function: $F(x,t,w) = \begin{cases}f(x,t,w) - (u-i),u < i \\ f(x,t,w),i \leqslant u \leqslant j \\ f(x,t,w) - (u-j),u > j\end{cases}$. The time periodic solution $u(x,t)$ which satisfies $j(x) \leqslant u(x,t) \leqslant j(x)$ is obtained under some assumed conditions of known functions, by use of method upper and lower solution and Leray -Schauder fixed -point theorem to following boundary value problem $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t,\frac{\partial u}{\partial x}),(x,t) \in \Omega \\ u(0,t) = \varphi_1(t),u(l,t) = \varphi_2(t)\end{cases}$. The existence of time periodic solution to boundary value problem is proved by the definition of the function F.

Key words: quasilinear parabolic equation; boundary value problem; Hölder continuous function; T-periodic solution.

(责任编辑 黄 颖)