DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2011. 02. 009

一种初值修正的非等间距 GM(1,1)模型及其等价模型*

刘卫锋，刘 林，何 霞
(郑州航空工业管理学院 数理系，郑州 450015)

摘要 通过为白化微分方程是 $\begin{cases}\dfrac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=u\\ x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)\end{cases}$ 的非等间距 GM(1,1)模型选取修正初值 $x^{(0)}(k_1)+\beta$，建立了白化微分方程为 $\begin{cases}\dfrac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=u\\ x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)+\beta\end{cases}$ 的一种新的初值修正非等间距 GM(1,1)模型，从而拓广了非等间距 GM(1,1)模型的形式。然后证明了修正初值为 $x^{(0)}(k_1)+\beta$ 的新的非等间距 GM(1,1)模型与修正初值为 $\alpha x^{(0)}(k_1)$ 的非等间距 GM(1,1)模型等价。最后，通过实例验证了该模型的可行性与实用性。这些结论不仅揭示了两种基于初值修正的非等间距 GM(1,1)模型之间的本质联系，而且为进一步应用非等间距 GM(1,1)模型提供了更大的选择空间。

关键词 非等间距 GM(1,1)模型；灰色系统；修正初值；等价模型
中图分类号:O159；N94　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2011)02-0043-05

针对原始数据是非等间距序列的情况，邓聚龙教授在文献[1]中提出了非等间距 GM(1,1)模型，从而拓展了灰色模型的形式，使灰色模型得到了更加广泛的应用。在此基础上，针对非等间距 GM(1,1)模型存在的问题，许多学者进行了改进和优化，特别是，文献[2-3]在对原始数据进行一次累加生成时，将序列的间距作为乘子，给出了非等间距数据一次累加生成的一个新定义，从而使得建立非等间距 GM(1,1)模型的方法与建立等间距 GM(1,1)模型方法相同。在文献[2-3]的基础上，文献[4]对时间响应函数进行了优化，文献[5]采用模糊聚类方法，通过在原始序列中插入若干序列，从而在新序列上建立了优化的非等间距 GM(1,1)模型，文献[6]将累积法引入非等间距 GM(1,1)模型的参数求解当中，文献[7]针对原始数据递减时，通过对原始数据进行倒数运算，建立倒数累加非等间距 GM(1,1)模型，这些改进均得到了模拟和预测精度更高的非等间距 GM(1,1)模型。文献[8-13]对非等间距 GM(1,1)模型的背景值进行了优化，文献[14]通过定义非等间距数据的新的一次累加生成，在同时考虑背景值优化的情况下，得到了一种新的优化非等间距 GM(1,1)模型。文献[15-16]通过修正初值对非等间距 GM(1,1)模型进行了改进，文献[17-18]通过同时对初值和背景值的改进，优化了非等间距 GM(1,1)模型，进一步提高了模型的模拟和预测精度。

本文在上述研究基础上，首先，通过为文献[2]中的非等间距 GM(1,1)模型选取修正初值 $x^{(0)}(k_1)+\beta$，建立了一种初值修正的非等间距 GM(1,1)模型。然后证明了该初值修正非等间距 GM(1,1)模型与根据文献[15-16]中的修正方法 1 得到的初值修正非等间距 GM(1,1)模型是等价的，从而揭示了它们是形式不同但本质相同的两个初值修正非等间距 GM(1,1)模型。最后，通过实例验证了该模型的可行性与实用性。这些结论不仅拓展了非等间距 GM(1,1)模型的形式，而且为应用非等间距 GM(1,1)模型提供了更大的选择空间。

1 非等间距 GM(1,1)模型建模机理

定义 1[1]　设序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),\cdots,x^{(0)}(k_n))$，若间距 $\Delta k_i=k_i-k_{i-1}\neq \text{const}$，$i=2$，

* 收稿日期:2010-09-04　修回日期:2010-11-24
资助项目:航空科学基金(No. 2008ZG55008)
作者简介:刘卫锋，男，讲师，硕士，研究方向为数学建模、灰色系统理论。

$3,\cdots,n$,则称 $X^{(0)}$ 是非等间距序列。

定义2[2] 设序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),\cdots,x^{(0)}(k_n))$,其中 $x^{(1)}(k_i)=\sum_{j=1}^{i}x^{(1)}(k_j)\Delta k_j,i=1,2,\cdots,n$,则称 $X^{(1)}$ 为非等间距序列 $X^{(0)}$ 的一次累加生成序列。

定理1[2] 设 $X^{(0)}$ 为非等间距序列,其一次累加生成序列为 $X^{(1)}$,则对 $X^{(1)}$ 的白化微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=u$$

若规定 $t=k_1$ 时,$x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)$,则其响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i)=\left(x^{(0)}(k_1)-\frac{u}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}+\frac{u}{a},i=1,2,\cdots$$

还原后模型表达式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})=\frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_{i+1}})\left(x^{(0)}(k_1)-\frac{u}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_{i+1}-k_i)},$$
$$i=1,2,\cdots$$

而参数 a 和 u 由 $(a,u)^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$ 得到,其中

$$B=\begin{pmatrix}-z^{(1)}(k_2) & 1\\ -z^{(1)}(k_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(k_n) & 1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}x^{(0)}(k_2)\\ x^{(0)}(k_3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(k_n)\end{pmatrix}$$

$$z^{(1)}(k_i)=0.5x^{(1)}(k_i)+0.5x^{(1)}(k_{i-1})$$

2 初值修正的非等间距GM(1,1)模型

由定理1可以看出,非等间距GM(1,1)模型的拟合与预测精度不仅取决于参数 a 和 u,而且受到初值的影响,而定理1中将初值取为 $x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)$ 并没有理论依据。为此,给初始值一个修正形式 $x^{(0)}(k_1)+\beta$,其中 β 为待定参数,将该修正初值代入定理1中的响应函数,得到初值修正的时间响应函数为 $\hat{x}^{(1)}(k_i)=\left(x^{(0)}(k_1)+\beta-\frac{u}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}+\frac{u}{a},i=1,2,\cdots$。

为求出待定参数 β,根据原始序列预测值的误差在最小二乘意义下最小化原则,设

$$f=\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}^{(0)}(k_i)-x^{(0)}(k_i))^2=$$
$$\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\left(x^{(0)}(k_1)+\beta-\frac{u}{a}\right)\cdot\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}-x^{(0)}(k_i)\right]^2$$

令 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\beta}=0$,有

$$2\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\left(x^{(0)}(k_1)+\beta-\frac{u}{a}\right)\cdot\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}-x^{(0)}(k_i)\right]\cdot$$
$$\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}=0$$

解之得

$$\beta=\frac{\sum_{i=2}^{n}x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}}{\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}\right]^2}-\left(x^{(0)}(k_1)-\frac{u}{a}\right)$$

于是,笔者得到如下定理。

定理2 设 $X^{(0)}$ 为非等间距序列,其一次累加生成序列为 $X^{(1)}$,背景值 $z^{(1)}(k_i)=0.5x^{(1)}(k_i)+0.5x^{(1)}(k_{i-1})$,参数 a 和 u 由 $(a,u)^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$ 得到,其中

$$B=\begin{pmatrix}-z^{(1)}(k_2) & 1\\ -z^{(1)}(k_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(k_n) & 1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}x^{(0)}(k_2)\\ x^{(0)}(k_3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(k_n)\end{pmatrix}$$

则对 $X^{(1)}$ 的白化微分方程 $\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=u$,若规定 $t=k_1$ 时,$x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)+\beta$,则其响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i)=\left(x^{(0)}(k_1)+\beta-\frac{u}{a}\right)\cdot\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}+\frac{u}{a},i=1,2,\cdots$$

还原后模型表达式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})=\frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_{i+1}})\left(x^{(0)}(k_1)+\beta-\frac{u}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_{i+1}-k_i)},i=1,2,\cdots$$

其中

$$\beta=\frac{\sum_{i=2}^{n}x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}}{\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}\right]^2}-\left(x^{(0)}(k_1)-\frac{u}{a}\right)$$

3 初值修正非等间距GM(1,1)模型的等价模型

现将文献[15-16]中根据修正方法1得到的改进非等间距GM(1,1)模型以定理形式给出,并求出

初值修正中的参数 α,于是得到

定理 3[15-16]　设 $X^{(0)}$ 为非等间距序列,其一次累加生成序列为 $X^{(1)}$,背景值 $z^{(1)}(k_i) = 0.5x^{(1)}(k_i) + 0.5x^{(1)}(k_{i-1})$,参数 a 和 u 由 $(a,u)^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$ 得到,其中

$$B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(k_2) & 1 \\ -z^{(1)}(k_3) & 1 \\ \square & \square \\ -z^{(1)}(k_n) & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(k_2) \\ x^{(0)}(k_3) \\ \square \\ x^{(0)}(k_n) \end{pmatrix}$$

则对 $X^{(1)}$ 的白化微分方程 $\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)}(t) = u$,若规定 $t = k_1$ 时,$x^{(1)}(k_1) = \alpha x^{(0)}(k_1)$,则其响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = \left(\alpha x^{(0)}(k_1) - \frac{u}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)} + \frac{u}{a},\quad i = 1,2,\cdots$$

还原后模型表达式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1}) = \frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_{i+1}})\left(\alpha x^{(0)}(k_1) - \frac{u}{a}\right)\cdot \mathrm{e}^{-a(k_{i+1}-k_i)}, i = 1,2,\cdots$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{x^{(0)}(k_1)}\left[\frac{\sum_{i=2}^{n} x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}}{\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}\right]^2} + \frac{u}{a}\right]$$

下面证明本文定理 2 中的初值修正非等间距 GM(1,1) 模型与由文献[15-16] 中的修正方法 1 得到的初值修正非等间距 GM(1,1) 模型,即本文中的定理 3 等价。

定理 4　设 $X^{(0)}$ 为非等间距序列,其一次累加生成序列为 $X^{(1)}$,背景值 $z^{(1)}(k_i) = 0.5x^{(1)}(k_i) + 0.5x^{(1)}(k_{i-1})$,参数 a 和 u 由 $(a,u)^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$ 得到,其中

$$B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(k_2) & 1 \\ -z^{(1)}(k_3) & 1 \\ \square & \square \\ -z^{(1)}(k_n) & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(k_2) \\ x^{(0)}(k_3) \\ \square \\ x^{(0)}(k_n) \end{pmatrix}$$

则对于白化微分方程 $\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)}(t) = u$,其修正初值分别为 $x^{(1)}(k_1) = x^{(0)}(k) + \beta$,$x^{(1)}(k_1) = \alpha x^{(0)}(k_1)$ 的两个改进模型等价。

证明　要证明两个修正初值非等间距模型等价,只需证明定理 2 和定理 3 中的还原后表达式相等即可。

定理 2 的还原后表达式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1}) = \frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_{i+1}})\left(x^{(0)}(k_1) + \beta - \frac{u}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_{i+1}-k_1)}$$

定理 3 的还原后表达式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1}) = \frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_{i+1}})\left(\alpha x^{(0)}(k_1) - \frac{u}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_{i+1}-k_1)}$$

考察两式发现,只需证明 $x^{(0)}(k_1) + \beta = \alpha x^{(0)}(k_1)$ 即可。

$$x^{(0)}(k_1) + \beta = x^{(0)}(k_1) + \frac{\sum_{i=2}^{n} x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}}{\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}\right]^2} - \left(x^{(0)}(k_1) - \frac{u}{a}\right) = \frac{\sum_{i=2}^{n} x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}}{\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}\right]^2} + \frac{u}{a}$$

$$\alpha x^{(0)}(k_1) = \frac{1}{x^{(0)}(k_1)}\left[\frac{\sum_{i=2}^{n} x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}}{\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}\right]^2} + \frac{u}{a}\right]\cdot x^{(0)}(k_1) = \frac{\sum_{i=2}^{n} x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}}{\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\Delta k_i}(1 - \mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}\right]^2} + \frac{u}{a}$$

所以,$x^{(0)}(k_1) + \beta = \alpha x^{(0)}(k_1)$。　　证毕

4 应用实例

现选择文献[7] 中的应用实例来说明本文建立的初值修正非等间距 GM(1,1) 模型的算法。在热处理试验中,渗碳浓度随着表面的深度变化而变化,下面是通过实验测得不同深度的碳浓度变化数据(见表 1)。

表 1　渗碳过程中的含碳量与深度关系

渗碳深度/mm	0.449	0.466	0.479	0.491
浓度/%	560.00	557.54	536.10	516.10

具体步骤如下。

首先,原始序列为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),x^{(0)}(k_3),x^{(0)}(k_4))=(1.42,1.32,1.20,1.09)$$

非等间距序列的间隔为

$$\Delta k=(\Delta k_2,\Delta k_3,\Delta k_4)=(0.017,0.013,0.012)$$

一次累加生成为

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(k_1),x^{(1)}(k_2),x^{(1)}(k_3),x^{(1)}(k_4))=(1.42,1.442\,4,1.458\,0,1.471\,1)$$

背景值为

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(k_2),z^{(1)}(k_3),z^{(1)}(k_4))=(1.431\,2,1.450\,2,1.464\,6)$$

其次,由$(a,u)^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$,求出参数$a=6.856\,6$,$u=11.136\,3$。其中$B=\begin{pmatrix}-1.431\,2 & 1\\ -1.450\,2 & 1\\ -1.464\,6 & 1\end{pmatrix}$,$Y=\begin{pmatrix}1.32\\ 1.20\\ 1.09\end{pmatrix}$。

第三,求出修正初值中的待定参数$\beta=-0.000\,15$

第四,还原后模型表达式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})=\frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_{i+1}})(x^{(0)}(k_1)+\beta-\frac{u}{a})\mathrm{e}^{-a(k_{i+1}-k_1)}=-0.204\,3\times\frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_{i+1}})\mathrm{e}^{-a(k_{i+1}-k_1)}$$

于是原始数据模拟值为

$$\hat{X}^{(0)}=(\hat{x}^{(0)}(k_1),\hat{x}^{(0)}(k_2),\hat{x}^{(0)}(k_3),\hat{x}^{(0)}(k_4))=(1.420\,0,1.322\,2,1.192\,7,1.094\,7)$$

现将本文所得原始数据模拟值与文献[7]中得到的原始数据模拟值一起列入表2,并对它们的模拟误差进行比对。

表2 模型的模拟误差对比表

序号	原始数据	模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k_i)$		残差 $\vert\varepsilon(k)\vert=\vert x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)\vert$		相对误差/% $\Delta k=\frac{\vert\varepsilon(k)\vert}{x^{(0)}(k)}$	
		文[7]模型	本文模型	文[7]模型	本文模型	文[7]模型	本文模型
1	1.42	1.420 0	1.420 0	0	0	0	0
2	1.32	1.340 4	1.322 2	0.020 4	0.002 2	1.55	0.17
3	1.20	1.197 0	1.192 7	0.003 0	0.007 3	0.25	0.61
	1.09	1.089 1	1.094 7	0.000 9	0.004 7	0.08	0.43

显然,由表2可知,本文中的初值修正非等间距GM(1,1)模型具有极高的模拟精度,其平均相对误差为0.30%,高于文献[7]的平均相对误差0.47%。

5 结论

1)本文通过为非等间距GM(1,1)模型选取修正初值$x^{(0)}(k_1)+\beta$,建立了一种初值修正的非等间距GM(1,1)模型,从而拓展了非等间距GM(1,1)模型的形式。

2)证明了本文建立的初值修正非等间距GM(1,1)模型与文献[15-16]中建立的一个初值修正非等间距GM(1,1)模型是等价的。由于文献[15-16]中初值修正模型的预测和模拟精度较高,故与之等价的本文中的初值修正模型也同样具有较高预测和模拟精度。

3)最后,通过实例验证了该模型的可行性与实用性。

4)本文揭示了形式不同的两个初值修正非等间距GM(1,1)模型之间的本质联系,其结果对继续研究非等间距GM(1,1)模型具有一定的理论和现实意义。

参考文献:

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002.

[2] 王钟羡,吴春笃,史雪荣. 非等间距序列的灰色模型[J]. 数学的实践与认识,2003,33(10):16-20.

[3] Dai W Z,Li J F. Modeling research on non-equidistance GM(1,1) model[J]. Systems Engineering Theory and Practice,2005(9):89-93.

[4] 崔立志,刘思峰,吴正朋. 非等间距GM(1,1)模型时间响应函数的优化[J]. 统计与决策,2009(13):9-10.

[5] 郑艳琳,刘保东. 非等间距GM(1,1)模型的模糊优化[J]. 山东科技大学学报:自然科学版,2004,23(4):75-77.

[6] 刘婧. 基于非等间距序列的累积法及其应用[J]. 统计与决策,2010(19):11-13.

[7] 曾斌,罗佑新. 倒数累加非等间距GM(1,1)模型及其在农业机械中的应用[J]. 安徽农业科学,2010,38(18):9389-9390,9414.

[8] 王丰效. 基于归一化的非等间距灰色预测模型[J]. 安庆师范学院学报:自然科学版,2005,11(3):24-26.

[9] Wang F X. Improvement on unequal interval grey forecast model[J]. Fuzzy Information and Engineering,2006,6(1):

118-123.

[10] 李翠凤,戴文战. 非等间距 GM(1,1)模型背景值构造方法及应用[J]. 清华大学学报:自然科学版,2007,47(S2):1729-1732.

[11] 王叶梅,党耀国,王正新. 非等间距 GM(1,1)模型背景值的优化[J]. 中国管理科学. 2008,16(4):159-162.

[12] 童新安,郭石磊,茹强喜. 改进背景值的非等间距 GM(1,1)模型[J]. 大庆师范学院学报,2010,30(3):77-79.

[13] 戴文战,李俊峰. 非等间距 GM(1,1)模型建模研究[J]. 系统工程理论与实践,2005,25(9):89-93.

[14] Kang X Q,Wei Y. A new optimized method of non-equigap GM(1,1) model[J]. The Journal of Grey System,2008(4):375-382.

[15] 王丰效. 基于初值修正的非等距灰色预测模型[J]. 重庆师范大学:自然科学版,2006,23(3):42-44.

[16] 王丰效. 非等距灰色预测模型的应用[J]. 统计与决策,2006(10):20-21.

[17] 梅红,孙泽信. 非等间距 GM(1,1)模型的改进及预测分析[J]. 河海大学学报:自然科学版,2010,38(5):569-574.

[18] 孙泽信,庞逸群,黄腾. 改进的灰色模型在建筑物沉降预测中的应用[J]. 测绘工程,2010,19(3):59-62.

An Unequal Interval GM(1,1) Model Based on the Modified Initial Value and Its Equivalence Model

LIU Wei-feng, LIU Lin, HE Xia

(Dept. of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: In this paper, by letting initial value of unequal interval GM(1,1) model which whitenization differential equation was $\begin{cases}\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=u\\x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)\end{cases}$ have modified initial value $x^{(0)}(k_1)+\beta$, the new unequal interval GM(1,1) model which whitenization differential equation was $\begin{cases}\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=u\\x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)+\beta\end{cases}$ is put forward, and naturally, the form of unequal interval GM(1,1) model is extended. Then, we proved the equivalence of the new unequal interval GM(1,1) model and an unequal interval GM(1,1) model based on the initial value $\alpha x^{(0)}(k_1)$. Lastly, a applied example shows that this model in this paper has effectiveness and practicability. These results not only revealed an essential connection existed between the two unequal interval GM(1,1) models, but also provided the greater choosing space with application of unequal interval GM(1,1) model.

Key words: unequal interval GM(1,1) model; grey system; modified initial value; equivalence model

(责任编辑 游中胜)