2011 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2011
第 28 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 28 No. 2

DOI:10.3969/J.ISSN.1672-6693.2011.02.011

自同构群阶为 $16p^3$(p 为奇素数)的有限幂零群*

杜亚慧,曹洪平
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘要:利用有限幂零群 G 的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的阶来刻画群 G 的构造。在刻画的过程中,本文先通过某些有限 p-群 Q 的自同构群 $\mathrm{Aut}(Q)$ 的阶来确定了群 Q 的结构,然后根据幂零群的性质:G 可分解为它的所有 $\mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ $(i=1,\cdots,n)$ 的直积,通过分类讨论的 $\mathrm{Aut}(P_i)$ 阶,从而给出了自同构群阶为 $16p^3$(p 为奇素数)的有限幂零群的完全分类,当群 G 没有 Sylow 2-子群时:G 有 21 种类型,当 S_2($S_2\in\mathrm{Syl}_2(G)$)的阶分别为 2,4,8,16 时,群 G 分别有 21,21,19,16 这 3 种类型,最终确定在满足上述条件下的群 G 共有 80 种类型。

关键词:有限群;自同构群;幂零群
中图分类号:O152.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2011)02-0052-04

1 预备知识

关于自同构群,陈贵云和李世荣[1-3] 等都做了很多研究;钟祥贵对自同构群阶为 $16p$(p 为奇素数)的有限幂零群做了研究[4];王秀花对自同构群阶为 $16p^2$(p 为奇素数)的有限交换群做了研究[5]。本文的目的是给出自同构群阶为 $16p^3$(p 为奇素数)的有限幂零群的完全分类,所讨论的群都是有限群,$\mathrm{Aut}(G)$ 表示 G 的自同构群,C_n 表示 n 阶循环群,其余所有的符号都是标准的。

引理 1[6] 设 P 为非循环 p-群,$|P|>p^2$,若 $|P/Z(P)|\leqslant p^4$,则 $|P|\mid|\mathrm{Aut}(P)|$。

引理 2[7] p^3 阶群及其自同构群阶如表 1。其中 $G_{s(p)}=\langle a,b\mid a^{p^2}=b^p=1,b^{-1}ab=a^{1+p}\rangle$,$G_{t(p)}=\langle a,b,c\mid a^p=b^p=c^p=1,b^{-1}ab=ac,ac=ca,bc=cb\rangle$。

表 1 p^3 阶群及其自同构群阶

G	$p=2$					$p\neq 2$				
	C_8	$C_2\times C_2\times C_2$	$C_4\times C_2$	Q_8	D_8	C_{p3}	$C_p\times C_p\times C_p$	$C_{p2}\times C_p$	$G_{s(p)}$	$G_{t(p)}$
$\lvert\mathrm{Aut}(G)\rvert$	2^2	$2^3\cdot 3\cdot 7$	2^3	$2^3\cdot 3$	2^3	$p^2(p-1)$	$p^3(p-1)^3(p^2+p+1)(p+1)$	$p^3(p-1)^2$	$p^3(p-1)$	$p^3(p-1)^2(p+1)$

引理 3 设 p 为奇素数,q 为素数,n 为正整数,Q 为 q^n 阶群,则:1)若 $|\mathrm{Aut}(Q)|=8$,则 $Q\cong C_{16}$,$C_4\times C_2$ 或 D_8;2)若 $|\mathrm{Aut}(Q)|=8p$,则 $Q\cong C_{8p+1}$,或 Q_8;3)若 $|\mathrm{Aut}(Q)|=8p^2$,则 $Q\cong C_{8p^2+1}$;4)若 $|\mathrm{Aut}(Q)|=2p^3$,则 $Q\cong C_{2p^3+1}$,C_{3^4} 或 $G_{s(3)}$;5)若 $|\mathrm{Aut}(Q)|=4p^3$,则 $Q\cong C_{4p^3+1}$,C_{5^4},$C_9\times C_3$,或 $G_{s(5)}$;6)若 $|\mathrm{Aut}(Q)|=8p^3$,则 $Q\cong C_{8p^3+1}$;7)若 $|\mathrm{Aut}(Q)|=16p^3$,则 $Q\cong C_{16p^3+1}$,C_{17^4},$C_{25}\times C_5$,$G_{s(17)}$,或 $G_{t(3)}$。

证明 由于结论 1)~6)的证明方法与结论 7)类似,因此下面只证结论 7)。

① 若 Q 循环,则 $|\mathrm{Aut}(Q)|=q^{n-1}(q-1)$,于是 $q^{n-1}(q-1)=16p^3$,解得 $n=1$,$q=16p^3+1$ 或 $n=4$,$q=p=17$,故 $G\cong C_{16p^3+1}$ 或 C_{17^4}。

② 若 Q 非循环,则 $n\geqslant 2$,如果 $|Q|=q^2$,那么 $|\mathrm{Aut}(Q)|=q(q-1)^2(q+1)$,于是 $q(q-1)^2(q+1)=16p^3$,由对 p,q 的假定知这一方程无解。因此 $|Q|=q^n$,而 $n\geqslant 3$。由 $|Q/Z(Q)|_q=|\mathrm{Inn}(Q)|_q\mid|\mathrm{Aut}(Q)|_q$ 及引理 1 知 $|Q|\mid|\mathrm{Aut}(Q)|$,但 $|\mathrm{Aut}(Q)|=16p^3$,所以 $q=2$,或 $q=p$。当 $q=2$ 时,$|Q|=8$,或 16,由引理 2 及文献[1]

* 收稿日期:2010-05-05 修回日期:2010-08-05
作者简介:杜亚慧,女,硕士研究生,研究方向为有限群;通讯作者:曹洪平,E-mail:caohp@swu.edu.cn

的表一知，满足 $|\mathrm{Aut}(Q)| = 16p^3$ 的8阶或16阶群不存在。当 $q = p$ 时，$|Q| = q^3$。由 Q 非循环，$|\mathrm{Aut}(Q)| = 16p^3$ 及引理2分别有

$$16p^3 = p^3(p-1)^3(p^2+p+1)(p+1), 16p^3 = p^3(p-1)^2, 16p^3 = p^3(p-1), 16p^3 = p^3(p-1)^2(p+1)$$

上述第1个方程无解，第2，3，4个方程的解分别是 $p = 5$，$p = 17$，$p = 3$，因此 $Q \cong C_{25} \times C_5$，$G_{s(17)}$ 或 $G_{t(3)}$。

证毕

2 主要结果

定理 设 G 为有限幂零群，且 $|\mathrm{Aut}(G)| = 16p^3$（$p$ 为奇素数），则 G 同构于下列80种群之一：

1）$G_1 = C_{16p^3+1}$；$G_2 = C_{17^4}$；$G_3 = C_{25} \times C_5$；$G_4 = G_{s(17)}$；$G_5 = G_{t(3)}$；$G_6 = C_{8p^3+1} \times C_3$；$G_7 = C_{4p^3+1} \times C_5$；$G_8 = C_9 \times C_3 \times C_5$；$G_9 = C_{2p^2+1} \times C_{8p+1}$；$G_{10} = C_{4p^2+1} \times C_{4p+1}$；$G_{11} = C_{101} \times C_{25}$；$G_{12} = C_{8p^2+1} \times C_{2p+1}$；$G_{13} = C_{73} \times C_9$；$G_{14} = C_{2p^3+1} \times C_5 \times C_3$；$G_{15} = C_{4p^2+1} \times C_{2p+1} \times C_3$；$G_{16} = C_{125} \times C_{11} \times C_3$；$G_{17} = C_{2p^2+1} \times C_{4p+1} \times C_3$；$G_{18} = C_{2p^2+1} \times C_{2p+1} \times C_5$；$C_{19} = C_{19} \times C_9 \times C_5$；$G_{20} = C_{27} \times C_7 \times C_5$；$G_{21} = C_7 \times C_9 \times C_{13}$；

2）$G_{i+21} \cong G_i \times C_2$（$i = 1,2,\cdots,21$）；

3）$G_{43} \cong C_4 \times C_{8p^3+1}$；$G_{44} \cong C_4 \times C_{4p^3+1} \times C_3$；$G_{45} \cong C_4 \times C_{5^4} \times C_3$；$G_{46} \cong C_4 \times G_{s(5)} \times C_3$；$G_{47} \cong C_4 \times C_{4p^3+1} \times C_5$；$G_{48} \cong C_4 \times C_{3^4} \times C_5$；$G_{49} \cong C_4 \times G_{s(3)} \times C_5$；$G_{50} \cong C_4 \times C_{4p^2+1} \times C_{2p+1}$；$G_{51} \cong C_4 \times C_{125} \times C_{11}$；$G_{52} \cong C_4 \times C_{37} \times C_9$；$G_{53} = C_4 \times C_{2p^2+1} \times C_{4p+1}$；$G_{54} \cong C_4 \times C_{27} \times C_{13}$；$G_{55} \cong C_4 \times C_{2p^2+1} \times C_{2p+1} \times C_3$；$G_{56} \cong C_2 \times C_2 \times C_{73}$；$G_{57} \cong C_2 \times C_2 \times C_7 \times C_{13}$；$G_{58} \cong C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_{13}$；$G_{59} = C_2 \times C_2 \times C_{27} \times C_5$；$G_{60} \cong C_2 \times C_2 \times C_{19} \times C_5$；$G_{61} \cong C_2 \times C_2 \times C_{37} \times C_3$；

4）$G_{62} \cong C_8 \times C_{4p^3+1}$；$G_{63} \cong C_8 \times C_{5^4}$；$G_{64} \cong C_8 \times C_9 \times C_3$；$G_{65} \cong C_8 \times G_{s(5)}$；$G_{66} \cong C_8 \times C_{2p^3+1} \times C_3$；$G_{67} \cong C_8 \times C_{2p^2+1} \times C_{2p+1}$；$G_{68} \cong C_8 \times C_{27} \times C_2$；$G_{69} \cong C_8 \times C_{19} \times C_9$；$G_{70} \cong C_4 \times C_2 \times C_{2p^3+1}$；$G_{71} \cong C_4 \times C_2 \times C_{3^4}$；$G_{72} \cong C_4 \times C_2 \times G_{s(3)}$；$G_{73} \cong D_8 \times C_{2p^3+1}$；$G_{74} \cong D_8 \times C_{3^4}$；$G_{75} \cong D_8 \times G_{s(3)}$；$G_{76} \cong Q_8 \times C_{27}$；$G_{77} \cong Q_8 \times C_{19}$；

5）$G_{78} \cong C_{16} \times C_{2p^3+1}$；$G_{79} \cong C_{16} \times C_{3^4}$；$G_{80} \cong C_{16} \times G_{s(3)}$。

其中出现的 kp^3+1（$k = 2,4,8,16$），kp^2+1（$k = 2,4,8$），$kp+1$（$k = 2,4,8$）均为适当的素数。

证明 设 $|G| = 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$，$p_1, p_2, \cdots, p_t$ 是互异的奇素数，由 G 幂零和文献[8]知

$$|\mathrm{Aut}(G)| = |\mathrm{Aut}(S_2)| \times |\mathrm{Aut}(P_1)| \times \cdots \times |\mathrm{Aut}(P_t)| \quad (S_2 \in \mathrm{Syl}_2(G), P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G), i = 1,\cdots,t)$$

由文献[9]知对于每一个素数 p_i（$i = 1,2,\cdots,t$），$2 \mid |\mathrm{Aut}(P_i)| \mid |\mathrm{Aut}(G)| = 2^4p^3$ 及 $|\mathrm{Aut}(S_2)| \mid |\mathrm{Aut}(G)|$ 可知 $t \leqslant 4$ 且 $|\mathrm{Aut}(S_2)| \leqslant 2^3$，又可知当 S_2 循环时，$|\mathrm{Aut}(S_2)| = 2^{\alpha_0-1}(2-1)$，所以 $\alpha_0 \leqslant 4$，故 $\alpha_0 = 0,1,2,3,4$。下面对 α_0 分情况讨论。

1）$\alpha_0 = 0$，$|G| = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$，有以下4种情况。

①$G \cong P_1$。$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 16p^3$ 及引理3知 G 为 G_1 到 G_5 这5种群之一。

②$G \cong P_1 \times P_2$，则又分以下5种情况。

i）$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 8p^3$，$|\mathrm{Aut}(P_2)| = 2$。由引理3知 $P_1 \cong C_{8p^3+1}$，$P_2 \cong C_3$，从而 $G \cong G_6$。

ii）$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 4p^3$，$|\mathrm{Aut}(P_2)| = 4$。由引理3知 $P_1 \cong C_{4p^3+1}$，C_{5^4}，$C_9 \times C_3$，或 $G_{s(5)}$；$P_2 \cong C_5$，所以 G 同构于 G_7，G_8 这2种群之一。

iii）$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 2p^2$，$|\mathrm{Aut}(P_2)| = 8p$。由引理3知 $P_1 \cong C_{2p^2+1}$，或 C_{27}（$p = 3$）；$P_2 \cong C_{8p+1}$，所以 $G \cong G_9$。

iv）$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 4p^2$，$|\mathrm{Aut}(P_2)| = 4p$。由引理3知 $P_1 \cong C_{4p^2+1}$，或 C_{125}（$p = 5$）；易证 $P_2 \cong C_{4p+1}$ 或 C_{25}（$p = 5$），所以 G 同构于 G_{10}，G_{11} 这2种群之一。

v）$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 8p^2$，$|\mathrm{Aut}(P_2)| = 2p$。由引理3知 $P_1 \cong C_{8p^2+1}$；易证 $P_2 \cong C_{2p+1}$，C_9（$p = 3$），从而 G 同构于 G_{12}，G_{13} 这2种群之一。

③$G \cong P_1 \times P_2 \times P_3$，分以下5种情况。

i）$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 2p^3$，$|\mathrm{Aut}(P_2)| = 4$，$|\mathrm{Aut}(P_3)| = 2$。由引理3知 $P_1 \cong C_{2p^3+1}$，C_{3^4} 或 $G_{s(3)}$；$P_2 \cong C_5$；$P_3 \cong C_3$，故 $G \cong G_{14}$。

ii)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=4p^2$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2p$,$|\mathrm{Aut}(P_3)|=2$。由引理3知$P_1\cong C_{4p^2+1}$,或$C_{125}(p=5)$;易证$P_2\cong C_{2p+1}$;$C_9(p=3)$;$P_3\cong C_3$,于是G同构于G_{15},G_{16}这2种群之一。

iii)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2p^2$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=4p$,$|\mathrm{Aut}(P_3)|=2$。由引理3知$P_1\cong C_{2p^2+1}$,或$C_{27}(p=3)$;易证$P_2\cong C_{4p+1}$,或$C_{25}(p=5)$;$P_3\cong C_3$,所以$G\cong G_{17}$。

iv)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2p^2$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2p$,$|\mathrm{Aut}(P_3)|=4$。由引理3知$P_1\cong C_{2p^2+1}$,或$C_{27}(p=3)$;易证$P_2\cong C_{2p+1}$,或$C_9(p=3)$;$P_3\cong C_5$,于是G同构于G_{18},G_{19},G_{20}这3种群之一。

v)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2p$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2p$,$|\mathrm{Aut}(P_3)|=4p$。由引理3知$P_1\cong C_{2p+1}$,或$C_9(p=3)$;易证$P_2\cong C_{2p+1}$,或$C_9(p=3)$;$P_3\cong C_{4p+1}$,或$C_{25}(p=5)$,从而$G\cong G_{21}$。

④$G\cong P_1\times P_2\times P_3\times P_4$。易证这种情况矛盾。

2)$\alpha_0=1$,$|G|=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$。易知$|\mathrm{Aut}(C_2)|=1$,可得$G\cong G_i$,$i=22,23,\cdots,42$。

3)$\alpha_0=2$,$|G|=2^2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$。以下分2种情况讨论。

①$S_2\cong C_4$,这时$|\mathrm{Aut}(S_2)|=2$,再分3种情况讨论。

i)$G\cong S_2\times P_1$,$|\mathrm{Aut}(P_1)|=8p^3$。由引理3知$P_1\cong C_{8p^3+1}$,于是$G\cong G_{43}$。

ii)$G\cong S_2\times P_1\times P_2$。又分以下4种情况。

a)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=4p^3$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2$。由引理3知$P_1\cong C_{4p^3+1}$,C_{5^4},$C_9\times C_3$,或$G_{s(5)}$;$P_2\cong C_3$,所以G同构于G_{44},G_{45},G_{46}这3种群之一。

b)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2p^3$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=4$。由引理3知$P_1\cong C_{2p^3+1}$,C_{3^4}或$G_{s(3)}$;$P_2\cong C_5$,所以G同构于G_{47},G_{48},G_{49}这3种群之一。

c)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=4p^2$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2p$。由引理3知$P_1\cong C_{4p^2+1}$,或$C_{125}(p=5)$;易证$P_2\cong C_{2p+1}$,或$C_9(p=3)$,于是G为G_{50},G_{51},G_{52}这3种群之一。

d)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2p^2$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=4p$。由引理3知$P_1\cong C_{2p^2+1}$,或$C_{27}(p=3)$;易证$P_2\cong C_{4p+1}$或$C_{25}(p=5)$,所以G同构于G_{53},G_{54}这2种群之一。

iii)$G\cong S_2\times P_1\times P_2\times P_3$,$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2p^2$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2p$,$|\mathrm{Aut}(P_3)|=2$。由引理3知$P_1\cong C_{2p^2+1}$,或$C_{27}(p=3)$;易证$P_2\cong C_{2p+1}$,或$C_9(p=3)$;$P_3\cong C_3$,所以$G\cong G_{55}$。

②$S_2\cong C_2\times C_2$,这时$|\mathrm{Aut}(S_2)|=2\cdot 3$。再分以下3种情况。

i)$G\cong S_2\times P_1$。$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2^3\cdot 3^2$,则$P_1\cong C_{73}$,从而$G\cong G_{56}$。

ii)$G\cong S_2\times P_1\times P_2$。又有以下3种情况。

a)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2\cdot 3$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2^2\cdot 3$。由引理3知$P_1\cong C_7$,或$C_9$;$P_2\cong C_{13}$,所以$G$同构于$G_{57}$,$G_{58}$这2种群之一。

b)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2\cdot 3^2$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2^2$。由引理3知$P_1\cong C_{27}$,或$C_{19}$;$P_2\cong C_5$,从而$G$同构于$G_{59}$,$G_{60}$这2种群之一。

c)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2^2\cdot 3^2$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2$。由引理3知$P_1\cong C_{37}$;$P_2\cong C_3$,所以$G\cong G_{61}$。

iii)$G\cong S_2\times P_1\times P_2\times P_3$。$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2\cdot 3$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2\cdot 3$,$|\mathrm{Aut}(P_3)|=2$。很显然这种情况不可能。

4)$\alpha_0=3$,$|G|=2^3p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$。由引理2的表1知$S_2\cong C_8$,$C_2\times C_2\times C_2$,$C_4\times C_2$,$D_8$,或$Q_8$,显然$S_2\cong C_2\times C_2\times C_2$不可能。以下分3种情况讨论。

①$S_2\cong C_8$,这时$|\mathrm{Aut}(S_2)|=4$。

i)$G\cong S_2\times P_1$。$|\mathrm{Aut}(P_1)|=4p^3$。由引理3知$P_1\cong C_{4p^3+1}$,C_{5^4},$C_9\times C_3$,或$G_{s(5)}$,从而G同构于G_{62},G_{63},G_{64},G_{65}这4种群之一。

ii)$G\cong S_2\times P_1\times P_2$,则有以下2种情况。

a)$|\mathrm{Aut}(P_1)|=2p^3$,$|\mathrm{Aut}(P_2)|=2$。由引理3知$P_1\cong C_{2p^3+1}$,C_{3^4},或$G_{s(3)}$;$P_2\cong C_3$,于是$G\cong G_{66}$。

b) $|\mathrm{Aut}(P_1)| = 2p^2$，$|\mathrm{Aut}(P_2)| = 2p$。由引理3知 $P_1 \cong C_{2p^2+1}$，或 C_{27} ($p=3$)；$P_2 \cong C_{2p+1}$，或 C_9 ($p=3$)，于是 G 同构于 G_{67}，G_{68}，G_{69} 这3种群之一。

②$S_2 \cong C_4 \times C_2$ 或 D_8，这时 $|\mathrm{Aut}(S_2)| = 8$，而 $G \cong S_2 \times P_1$。$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 2p^3$，由引理3知 $P_1 \cong C_{2p^3+1}$，C_{34}，或 $G_{s(3)}$，于是 G 同构于 G_{70} 到 G_{75} 这6种群之一。

③$S_2 \cong Q_8$，这时 $|\mathrm{Aut}(S_2)| = 2^3 \cdot 3$，而 $G \cong S_2 \times P_1$。$|\mathrm{Aut}(P_1)| = 2 \cdot 3^2$，易证 $P_1 \cong C_{27}$，或 C_{19}，所以 G 同构于 G_{76}，G_{77} 这2种群之一。

5) $\alpha_0 = 4$，$|G| = 2^4 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$。由文献[1]的表一知 $S_2 \cong C_{16}$，$|\mathrm{Aut}(S_2)| = 8$，所以 $|\mathrm{Aut}(P_1)| = 2p^3$，由引理3知 $P_1 \cong C_{2p^3+1}$，C_{34} 或 $G_{s(3)}$，从而 G 同构于 G_{78}，G_{79}，G_{80} 这3种群之一。

通过假设 $|G| = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$，$p_1, p_2, \cdots, p_t$ 是互异的奇素数，知道当 $\alpha_0 = 0,1,2,3,4$，$|G|$ 显然不等，所以 G 在这4种情况下是互相不同构的，又 G 在这4种情况的每种情况下，根据 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ 的个数分类，并且在每一类当中 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ 都是互异的，所以由定理的证明很容易知道它们都是互相不同构的。又由幂零群的性质知

$$|\mathrm{Aut}(G)| = |\mathrm{Aut}(S_2)| \times |\mathrm{Aut}(P_1)| \times \cdots \times |\mathrm{Aut}(P_t)| \ (S_2 \in \mathrm{Syl}_2(G), P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G), i = 1, \cdots, t)$$

定理证明过程中的每一个分类都是遵循着 $|\mathrm{Aut}(G)| = 16p^3$，所以这80类群的自同构群的阶都是 $16p^3$。

综上可知，自同构群阶为 $16p^3$ (p 为奇素数) 的有限幂零群 G 的结构有 G_1 到 G_{80}，共80种类型。 证毕

参考文献：

[1] Li S R. On solving the equation $|\mathrm{Aut}(G)| = p^2q^2$ [J]. Chinese Science Bulletin, 1995, 40 (23): 2124-2127.

[2] Li S R. Finite groups with automorphism group of order p^3q (p odd) [J]. Proc Royal Irish Acad, 1994, 94A(2): 207-218.

[3] 李世荣. 具有阶 p^2q^2 自同构群的有限群[J]. 广西大学学报:自然科学版, 1996, 21(2): 95-97.

[4] 钟祥贵. 自同构群阶为 $16p$ (p 为奇素数) 的有限幂零群[J]. 广西师范大学学报:自然科学版, 2009, 27(3): 21-23.

[5] 王秀花. $|A(G)| = 2^4p^2$ (p 为奇素数) 的有限 Abel 群[J]. 湖北民族学院学报:自然科学版, 2007, 25(4): 125-128.

[6] Davitt R M. On the automorphism group of a finite p-group with a small central quotient[J]. Canadian Jorunal of Mathematics, 1988, 38(2): 299-305.

[7] 黄平安. 关于一类自同构群[J]. 数学杂志, 2000, 20(5): 345-349.

[8] 张远达. 有限群的构造(上册)[M]. 北京:科学出版社, 1982: 80-86.

[9] Curran M J. Automorphism of certain p-group (p odd) [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1988, 38(2): 299-305.

Finite Nilpotent Groups with Automorphism Groups of Order $16p^3$ (p prime)

DU Ya-hui, CAO Hong-ping

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: This paper discusses the structures of nilpotent group G by using the oder of automorphism group G. In the process, first, We use the orders of automorphism group Q of some finite p-group Q to determine the structure of the Q group. We know nilpotent group G can decompose into the direct product of all its Sylow p-subgroups, then, by discussing the orders of automorphism group P_i, We can found out all the finite nilpotent groups when the order of automorphism group G equals $16p^3$ with p being odd primes.

Key words: finite group; automorphism groups; nilpotent groups

(责任编辑 黄 颖)