

基于 Curvelet 变换的图像去噪*

刘广东^{1,2}, 陈阿林^{2,3}

(1. 重庆师范大学地理科学学院; 2. 重庆高校市级GIS应用研究重点实验室;
3. 重庆师范大学网络中心, 重庆 400047)

摘要:小波变换在分析二维图像中曲线或者直线边缘特征方面存在明显不足,而由小波变换而来的 Curvelet 变换具有很强的方向性,能更好地逼近和稀疏表达平滑区域和边缘部分。本文首先介绍了一代和二代 Curvelet 变换的概念及二代 Curvelet 变换快速离散算法的实现,然后分别采用小波变换和二代 Curvelet 变换的快速离散算法进行图像去噪实验。实验采用 Wrap(Wrapping-based transform)算法实现有关 Curvelet 变换,即在 USFFT 方法上增加一个 Wrap 步骤,将任意区域通过周期化技术一一映射到原点的仿射区域。对比试验结果表明,在图像消噪中二代 Curvelet 变换的离散算法较小波变换有更好的视觉效果,而且 PSNR 也有一定的提高。

关键词:小波变换; Curvelet 变换; Ridgelet 变换; 图像去噪

中图分类号: TP31

文献标识码: A

文章编号: 1672-6693(2009)04-0086-04

小波变换是一种图像多尺度几何分析工具,在图像消噪领域有广泛应用^[1-3]。小波变换的优势在反映一维连续信号的奇异性,而对二维图像中的边缘,如各种直线或者曲线等更高维的平面奇异性则难以表达其特征^[4]。针对小波变换的不足, E. J. Candès 等人提出了一种更适合分析具有曲线或者超平面奇异性高维信号的 Curvelet 变换^[4]。Curvelet 变换不但和小波变换一样具有局部时频分析的能力,还具有比小波变换能力更强的方向选择和辨识能力,因此,对图像边缘的表达能力更强。

Curvelet 变换诞生的时间并不长久,虽然还难以预测其在图像处理领域中的发展,但它在图像消噪方面的应用已经凸显出其强大的优势^[5-7]。本文采用 Starck 等人提出的快速离散 Curvelet 算法^[5],较好地图像进行了去噪处理,特别是有纹理的区域。

1 Curvelet 变换

为了克服小波变换沿边缘信息表达能力的不足, Candès 首先在 1998 年提出了 Ridgelet 变换^[8]。Ridgelet 变换能有效地表示直线的奇异性特征,但是对于图像曲线边缘的描述,其逼近性能有限,并不能稀疏表示曲线的奇异性。同时,多尺度 Ridgelet 分析冗余度很大。为了寻求更好的表示方法,1999 年

Candès 和 Donoho 在 Ridgelet 变换的基础上提出了 Curvelet 变换,并且构造了 Curvelet 变换的紧框架。这就是第 1 代的 Curvelet 变换,其很强的方向性能够高效地表示图像的边缘。但是,其算法的实现存在很大困难,而且冗余度仍然很大。Candès 等人在 2002 年提出了第 2 代 Curvelet 变换,同时给出了新的 Curvelet 变换的框架体系,并在 2005 年提出了两种基于第 2 代 Curvelet 变换理论快速离散实现方法,克服了第 1 代 Curvelet 变换实现方法复杂、冗余度大的不足。

1.1 第 1 代 Curvelet 变换^[9]

Curvelet 变换(Curvelet transform)由 Candès 和 Donoho 在 1999 年提出的^[4],它是由 Candès 在 1998 年提出的 Ridgelet 变换理论衍生而来。单尺度 Ridgelet 变换的基本尺度是固定的^[10],而 Curvelet 变换则可在所有可能的尺度 $s \geq 0$ 上进行分解。对于曲波变换有如下定义。

定义 1 Curvelet 变换是将任意均方可积函数 f 映射为系数序列 $\alpha_\mu(\mu \in M)$ 的变换。其中 M 表示 α_μ 的参数集,称元素 $\sigma_\mu := \Delta_s \Phi_{Q,\alpha}$, $s \geq 0$, $Q \in \Omega_s$, $\alpha \in \Gamma$ 为 Curvelet 变换。

在 Curvelet 变换的支撑区间上有

$$width = length^2 \quad (1)$$

* 收稿日期 2009-04-16 修回日期 2009-05-02

作者简介: 刘广东,男,硕士研究生,研究方向为资源遥感与地理信息系统、数字图像处理,通讯作者: 陈阿林, E-mail: zal@cqnu.edu.cn

称这一关系为各向异性尺度关系(Anisotropy scaling relation),曲波变换的这一核心关系表明曲波变换是一种具有方向性的基原子,这正是曲波变换具有良好的非线性逼近能力的一个根本原因。

这就是通常称为第1代 Curvelet 变换的 Curvelet 变换,其数字实现的主要步骤^[11]如图1所示。

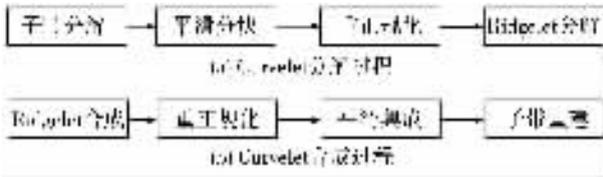


图1 Curvelet 变换的分解和合成过程

分解过程首先是对函数进行子带分解,即将 f 用滤波器 P_0 分解为 $(P_0 f \Delta_1 f \Delta_2 f \dots)$ 然后定义方形区域 $Q = [K_1/2^S (K_1 + 1)/2^S] \times [K_2/2^S (K_2 + 1)/2^S]$ 中的平滑窗口函数 W_Q ,将其和子带函数相乘,实现对不同尺度子带函数的平滑。然后对每个二进方块 Q 定义 $(T_Q f)(x_1, x_2) = f(2^S x_1 - k_1, 2^S x_2 - k_2)$,用该算子将位于方形区域 Q 中的函数正规化到尺度 2^S 。此时得到 $g_Q = (T_Q)^{-1}(W_Q \Delta_S f)$,接着进行基函数为 ρ_λ 的正交 Ridgelet 分解,得到 $\alpha_\mu = g_Q, \rho_\lambda$ 其中 $\mu = (Q, \lambda), \rho_\lambda$ 是构成 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 空间上正交基的函数。

Curvelet 变换中合成过程是分解过程的逆过程。首先进行 Ridgelet 合成,再进行重正规化,然后是平滑集成,最后进行子带重建完成合成过程。

1.2 第2代 Curvelet 变换

第2代 Curvelet 变换与第1代 Curvelet 变换的相同点只是紧支撑、框架等的抽象数学含义,在构造上却发生了根本变化。第1代 Curvelet 变换的构造思想是对曲线进行分块,将每个分块中的曲线近似为直线来做 Ridgelet 分析,而第2代 Curvelet 变换已完全与 Ridgelet 变换无关。这里仅仅介绍实验中使用到的离散 Curvelet 变换。

1.2.1 离散 Curvelet 变换^[12] 以笛卡尔坐标系下的 $f[t_1, t_2] (0 \leq t_1, t_2 < n)$ 为输入, Curvelet 变换的离散型是为

$$c^D(j, l, k) := \sum_{0 \leq t_1, t_2 < n} f[t_1, t_2] \rho_{j,l,k}^D[t_1, t_2] \quad (2)$$

采用一带通函数 $\mathcal{W}(w_1) = \sqrt{\phi(w_1/2)^2 - \phi(w_1)^2}$, 定义

$$\Psi_j(w_1) = \mathcal{W}(2^{-j}w_1) \quad (3)$$

用此函数实现多尺度分割,对于每一个 $w = (w_1, w_2), w_1 > 0$, 有

$$V_j(S_{\theta_l} w) = \mathcal{W}(2^{j/2} w_2/w_1 - l) \quad (4)$$

其中 S_{θ_l} 是一个剪切矩阵 (Shear matrix) $S_{\theta_l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\tan\theta_l & 1 \end{bmatrix}$ 。 θ_l 并非等间距,但是斜率是等间距的。

定义

$$\tilde{U}_j(w) := \Psi_j(w_1) V_j(w) \quad (5)$$

对于每一个 $\theta_l \in [-\pi/4, \pi/4]$, 有

$$\tilde{U}_{j,l}(w) := \Psi_j(w_1) V_j(S_{\theta_l} w) = \tilde{U}_j(S_{\theta_l} w) \quad (6)$$

1.2.2 离散 Curvelet 变换的实现方法 2005年, Candès 和 Donoho 提出了两种快速离散 Curvelet 变换的实现方法,分别是 USFFT (Unequally-spaced fast fourier transforms) 算法和 Wrap 算法。这里仅仅介绍所使用的 Wrapping 方法。

1.2.3 基于 Wrapping 的快速离散 Curvelet 变换实现方法^[11] 这个方法的核心思想是围绕原点 Wrap,意思是在具体实现时对任意区域,通过周期化技术意义映射到原点的仿射区域。该方法是在基于 USFFT 方法上增加 Wrap 步骤,具体过程如下。

1) 对于给定的一个笛卡尔坐标小的二维函数进行 2D FFT 变换,得到二维频域表示

$$\hat{f}[n_1, n_2], -n/2 \leq n_1, n_2 \leq n/2 \quad (7)$$

2) 在频域,对于每一对 (j, l) (尺度,角度),重采样 $\hat{f}[n_1, n_2]$ 得到采样值

$$\hat{f}[n_1, n_2 - n_1 \tan\theta_l] (n_1, n_2) \in P_j \quad (8)$$

3) 将内插后的 \hat{f} 与窗函数 \tilde{U}_j 相乘可得

$$\hat{f}[n_1, n_2] = \hat{f}[n_1, n_2 - n_1 \tan\theta_l] \tilde{U}_j[n_1, n_2] \quad (9)$$

4) 围绕原点 Wrapping 局部化 $\hat{f}[n_1, n_2]$ 。

5) 对 $\hat{f}_{j,l}$ 进行 2D FFT 逆变换,由此可得到离散的曲波系数集合 $c^D(j, l, k)$ 。

2 Curvelet 变换在图像消噪中的应用

频域滤波方法和空域平滑方法,常常被用来抑制或者消除常见图像中的随机噪声,但是,这两种方法都有很大不足,就是以损失大量的图像信息为代价。目前,比较有效的去噪方法是小波域滤波。但是,恰如引言中论及的小波变换局限性,对二维图像进行小波变换后,重要边缘上的系数往往很大,这就导致在重建图像的时候需要保留大量的小波系数。而由统计原理,数据的精简与其精确性之间的矛盾,即便取其二者之间最好的折中,仍将产生较高的均方

误差^[13]。Curvelet 变换对图像边缘的“稀疏”表示,则在保证较低均方误差的同时,实现了图像数据的精简性和精确性的理想平衡,体现出 Curvelet 变换在消噪方面优于小波的图像表达能力。

基于 Curvelet 变换的消噪算法主要有如下步骤:

- 1) 对含噪声图像进行 Curvelet 变换,得到每个子带的 Curvelet 变换系数;
- 2) 对得到的 Curvelet 变换系数进行阈值处理。由于 Curvelet 变换中,较大的系数对应于较强的边缘,较小的系数则对应于噪声^[12],故保留较大的系数;
- 3) 对处理之后的 Curvelet 变换系数进行 Curvelet 逆变换,得到消噪图像。

3 实验结果

首先,选取 Matlab7.01 中自带的一张图片 (lena.jpg) 加入随机噪声,进行 Curvelet 变换实现消噪。实验的结果如图 2 所示。



图 2 基于 Curvelet 变换的图像消噪

从实验结果中不难看出,消噪图像很好地实现了图像的复原,特别是有纹理的区域,复原效果较为理想。

下面,笔者选取 Matlab7.01 中自带的图像 bababar.jpg,加入设定的随机噪声 ($noise = randn(N) * sigma$,其中 N 为图像大小, $sigma$ 为标准偏差),得到加噪图像 ($noisy_img = img + noise$),再分别进行基于小波变换的消噪和基于 Curvelet 变换的消噪,并选择峰值信噪比进行比较。

图像的峰值信噪比由以下公式计算得到:

$$PSNR = 20 * \log_{10}(255 / \sqrt{MSE})$$

其中均方差:

$$MSE = \text{sum}(\text{sum}((img - restored_img)^2)) / N^2$$

实验中,笔者加入的噪声强度 σ 分别为 0.078 和 0.1,经对加噪图像进行典型小波变换消噪处理和 Curvelet 变换消噪处理之后,计算得到的图像峰值信噪比结果如表 1 所示。

表 1 不同消噪方法的 PSNR 值对比

方法	$\sigma = 0.078$ 的 PSNR	$\sigma = 0.1$ 的 PSNR
含噪图像	21.96	20.07
典型小波消噪算法	27.006 8	25.572 3
Curvelet 消噪算法	29.785 8	28.575 3

同时,分别对不同强度噪声的噪声图像,小波消噪图像和 Curvelet 消噪图像进行对比,不难看出小波消噪与 Curvelet 消噪的效果差异。特别是在纹理区域,Curvelet 变换消噪有更为优越的消噪表现。

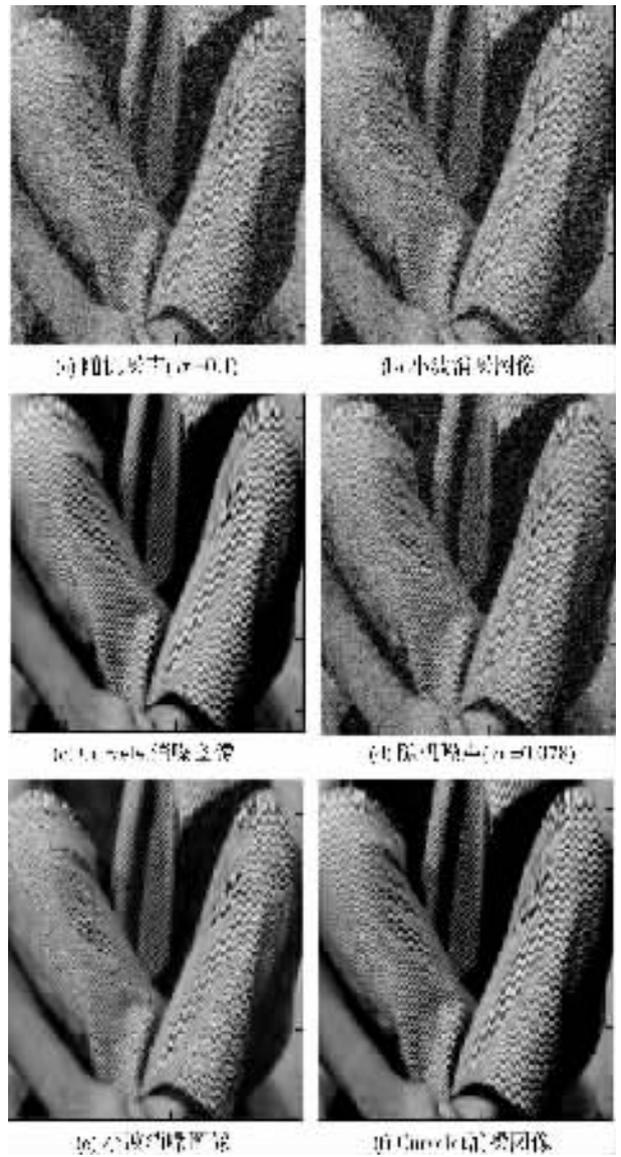


图 3 两种图像消噪方法结果对比

4 结束语

Curvelet 变换在图像消噪方面,较之小波变换硬阈值消噪有更好的效果。特别是纹理区域的复原, Curvelet 变换更表现出强大的一面,比较图 3 中衣服

的纹理图案即可发现这一点。另外,基于 Curvelet 变换消噪后的图像都较小波变换消噪后图像的 PSNR 有相当程度的提高(见表 1)。但是,笔者在实验过程中发现,基于 Curvelet 变换的算法消耗的时间与相应小波算法相比长出很多,这与文献[9]中论及的,在 Curvelet 变换中存在突出的计算冗余度问题一致。因此,基于 Curvelet 变换的消噪算法还有待于进一步研究。

参考文献:

[1] Shark L K, Yu C. Denoising by optimal fuzzy thresholding in wavelet domain[J]. IEEE Electron Lett 2000 36(6): 581-582.

[2] You Y L, Kaveh D. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Trans Image Processing, 2000 9(10): 172-1730.

[3] Walker J S, Chen Y. Image denoising tree-based wavelet subband correlations and shrinkage[J]. Optical Engineering 2000 39(11): 2900-2908.

[4] Candès E J, Donoho D L. Curvelet [R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1999.

[5] Stack J L, Candès E J, Donoho D L. The curvelet transform for image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing 2002 11(6): 670-684.

[6] Saevarsson B B, Sveinsson J R, Benediktsson J A. Time invariant curvelet denoising[C]//Anon. Proceedings of the 6th North Signal Proceeding Symposium. Finland: Espoo, 2004.

[7] 冯鹏,米德伶,潘英俊,等.改进的 Curvelet 变换图像降噪方法[J].光电工程 2005 32(9): 67-70.

[8] Candès E J. Ridgelets: theory and application[D]. Ph. D. Thesis, Department of Statistics, Stanford University, 1998.

[9] 焦季成,谭山,刘芳.脊波理论:从脊波变换到 Curvelet 变换[J].工程数学学报 2005 22(5): 761-773.

[10] 龙兴明,郭世刚.三维测量中基于脊波变换的图像预处理及拐点检测[J].重庆师范大学学报(自然科学版), 2007 24(2): 46-49.

[11] 倪林, Miao Y. 一种更适合图像处理的多尺度变换——Curvelet 变换[J].计算机工程与应用 2004 28: 21-26.

[12] 阎敬文,屈小波.超小波分析及应用[M].北京:国防工业出版社 2001.

[13] 何劲,李宏伟,张帆.基于 Curvelet 变换的图像消噪[J].现代电子技术 2008(2): 140-141, 144.

Image Denoising Based on Curvelet Transform

LIU Guang-dong^{1,2}, CHEN A-lin^{2,3}

(1. College of Geographical Science, Chongqing Normal University;

2. Key Laboratory of Municipal GIS Applied Research in Higher Education Institutes;

3. Network Center, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Wavelet transform is in a visible lack of analyzing the image edge characteristics of curve and line, while the Curvelet transform which is developed from the wavelet transform contains more directional information has better approximation and sparsity description of the smooth and edge parts. This paper first introduces the concepts of the first and second generation curvelet transforms, and the fast discrete implementation algorithm of the second generation curvelet transform, Then it makes image denoising experiments by using wavelet transform and fast discrete algorithm of the second generation curvelet transform. In the experiments, we use the Wrap(Wrapping-based transform) algorithms to realize curvelet transform, which adds a wrap step to the USFFT(unequally-spaced fast fourier transforms) method. This method maps the random region to the affined region of the origin through one-to-one periodicity technique. Comparing the results of the wavelet transform denosing with curvelet transform denosing experiments shows that the second generation discrete curvelet transform has better visual effects than wavelet transform in the image denoising. In addition, PSNR is improved in a certain extent, too.

Key words: wavelet transform; Curvelet transform; Ridgelet transform; image denoising

(责任编辑 游中胜)