运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 06. 001

B-(p,r)-预不变凸规划的 Wolfe 对偶问题与极小化问题*

彭再云[1]，万　轩[1,2]

(1. 重庆交通大学 理学院，重庆 400074；2. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要：B-(p,r)-预不变凸函数是一类新的广义凸函数，它是 B-(p,r)-不变凸函数的推广。本文讨论了 B-(p,r)-预不变凸函数的一些性质；然后利用 B-(p,r)-预不变凸型函数建立了目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题的 Wolfe 型对偶，证明了目标函数和约束函数在 B-(p,r)-预不变凸型函数条件下的弱对偶，强对偶和严格逆对偶定理；最后给出了 B-(p,r)-预不变凸函数在关于目标函数的极小化问题中的两个重要应用，即建立目标函数在 B-(p,r)-预不变凸函数条件下的极小化问题(P)，证明了它的局部最优解是全局最优解，它的解集是 p-不变凸集，且得出如果问题(P)存在最优解，则最优解唯一。本文结论具有一般性，推广了涉及预不变凸函数、B-预不变凸函数和 (p,r)-预不变凸函数文献的一些结论。

关键词：B-(p,r)-预不变凸函数；多目标规划；Wolfe 型对偶；极小化问题

中图分类号：O221.1　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2010)06-0001-06

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色；有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一。1991 年，C. R. Bector 和 C. Singh 提出一类广义凸函数——B-不变凸函数，它是不变凸函数的推广，利用这类函数讨论了规划问题[1]；此后，C. R. Bector 等人在可微情形下引入了 B-凸函数和 B-不变凸函数的概念，并讨论了其非线性规划问题最优解的充分性条件及对偶性[2]；1993 年，作为对预不变凸函数的推广，S. K. Suneja，C. Singh 和 C. R. Bector 引入了 B-预不变凸函数的定义[3]；2001 年 Antczak 给出一类广义凸函数—(p,r)-不变凸函数，它是不变凸函数的推广形式[4-6]，之后又给出了关于向量的 (p,r)-不变凸函数[7] 和 B-(p,r)-不变凸函数，B-(p,r)-不变凸函数既是不变 B-凸函数的推广形式，又是 (p,r)-不变凸函数的推广形式，利用这类函数讨论了多目标规划问题[8]；同时，Antczak 在文献[8]中给出了另一类新的广义凸函数—B-(p,r)-预不变凸函数，但没有对其性质和应用进行深入研究。

本文在文献[1-12]的基础上将对此类新的广义凸函数—B-(p,r)-预不变凸函数做研究，利用 B-(p,r)-预不变凸函数建立了目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题的 Wolfe 型对偶，证明了目标函数和约束函数在 B-(p,r)-预不变凸函数条件下的弱对偶，强对偶和严格逆对偶定理，推广了相关文献；其次，讨论了 B-(p,r)-预不变凸函数在关于目标函数的极小化问题中的两个应用。

1 预备知识

为了方便起见引入以下几个符号，设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。$x=y$ 是指 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$；$x<y$ 是指 $x_i<y_i(i=1,2,\cdots,n)$；$x\leqq y$ 是指 $x_i\leqslant y_i(i=1,2,\cdots,n)$；$x\leqslant y$ 是指 $x\leqq y$，而 $x\neq y$。$\mathbf{R}_+$ 表示全体非负实数集。若无特别说明，假定非空开集 $X\subseteq\mathbf{R}^n$，$f:X\to\mathbf{R}$，$g:X\to\mathbf{R}$，$\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$，$\bar{b}:X\times X\to\mathbf{R}_+$，$b:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$。

定义 1[3]　称 X 为不变凸集，若 $\exists\eta$ 满足 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$，$y+\lambda\eta(x,y)\in X$。

定义 2[4]　称 X 为 p-不变凸集，若 $\exists\eta$ 满足 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$，有

$$\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}}\in X,p\neq 0;y+\lambda\eta(x,y)\in X,p=0$$

* 收稿日期：2010-07-01

资助项目：重庆市科委研究项目(No. CSTC2008BB0346)；重庆市教委资助课题(No. KJ100405，No. KJ070404)；重庆市高教研究项目(No. 0833141)

作者简介：彭再云，男，讲师，硕士，研究方向为最优化理论与算法。

当 $p=0$ 时,显然 X 是不变凸集。

定义3[8] 称 f 在 X 上 y 点处关于 η 和 $\bar{b}$ 的 B-(p,r)-不变凸函数。若 f 是 X 上的可微函数,p,r 是任意实数,$y\in X$,若对任意 $x\in X$,$\exists\eta$ 和 $\bar{b}$ 有

$$\frac{1}{r}\bar{b}(x,y)(e^{r(f(x)-f(y))}-1)\geqq\frac{1}{p}\nabla f(y)(e^{p\eta(x,y)}-I),p\neq 0,r\neq 0$$

$$\frac{1}{r}\bar{b}(x,y)(e^{r(f(x)-f(y))}-1)\geqq\nabla f(y)\eta(x,y),p=0,r\neq 0$$

$$\bar{b}(x,y)(f(x)-f(y))\geqq\frac{1}{p}\nabla f(y)(e^{p\eta(x,y)}-I),p\neq 0,r=0$$

$$\bar{b}(x,y)(f(x)-f(y))\geqq\nabla f(y)\eta(x,y),p=0,r=0$$

若上面不等式当 $x\neq y$ 时为严格不等式,则称 f 在 X 上 y 点处关于 η 和 $\bar{b}$ 的严格 B-(p,r)-不变凸函数。其中,记 $I=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^n$,$e^{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}=(e^{\alpha_1},e^{\alpha_2},\cdots,e^{\alpha_n})$。

定义4[8] 称 f 在 X 上 y 点处关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数。若 X 是 p-不变凸集,p,r 是任意实数,$y\in X$,若对 $\forall x\in X,\lambda\in[0,1]$,$\exists\eta$ 和 b 有 $1-\lambda b(x,y,\lambda)\geqslant 0$ 且

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p\neq 0,r\neq 0$$

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y),p\neq 0,r=0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqq\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p=0,r\neq 0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqq\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y),p=0,r=0$$

若上面不等式当 $x\neq y$ 时为严格不等式,则称 f 在 X 上 y 点处关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数。其中,记 $I=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^n$,$e^{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}=(e^{\alpha_1},e^{\alpha_2},\cdots,e^{\alpha_n})$。

定义5[9] 对问题(P):$\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$($x\in X$,$X$ 为满足问题(P)的约束条件的所有点的集合),x^* 是问题(P)的可行解。若不存在(P)的可行解 x,使 $f(x)\leqq f(x^*)$ 成立,则称 x^* 为该问题的有效解。若 min 改为 max,$f(x)\leqq f(x^*)$ 应改为 $f(x)\geqq f(x^*)$。

考虑下面的多目标规划问题

$$(\mathrm{VP})\begin{cases}\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))\\ \text{s.t.}\quad g_j(x)\leqq 0,j=1,2,\cdots,m\\ \qquad\quad x\in X\end{cases}$$

其中 $f_i:X\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,k)$ 和 $g_j:X\to\mathbf{R}(j=1,2,\cdots,m)$ 都是 X 上的可微函数。记(VP)的可行域为 $D=\{x\in X:g_j(x)\leqq 0,j=1,2,\cdots,m\}$。

(VP)的 Wolfe 型对偶模型

$$(\mathrm{VD})\begin{cases}\max f(y)+ug(y)=(f_1(y)+u_1g_1(y),f_2(y)+u_2g_2(y),\cdots,f_k(y)+u_kg_k(y))\\ \text{s.t.}\quad\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0\\ \qquad\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\geqq 0\\ \qquad\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\geqq 0,u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)\geqq 0\end{cases}$$

记(VD)的可行域为

$$W=\{(\lambda,u,y)\in\mathbf{R}_+^k\times\mathbf{R}_+^m\times X:\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0,\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)\geqq 0,\lambda\geqq 0\}$$

2 B-(p,r)-预不变凸函数的性质

在本文中的性质只证明当 $p\neq 0,r\neq 0$ 时的情况,当 $p=0,r\neq 0$,$p\neq 0,r=0$ 和 $p=0,r=0$ 时,同样可以得出相应的结果。

定理1 若 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,则函数 $F=\sup\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$

在 X 上关于同一函数 η 和函数 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数。

证明　现根据 B-(p,r)-预不变凸函数的定义,对每一个 $i=1,2,\cdots,n,\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 都有

$$f_i\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf_i(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf_i(y)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

根据对数函数和指数函数的性质,所以对每一个 $i=1,2,\cdots,n,\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$f_i\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rF(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rF(y)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

取上式左边的上确界,$\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,有

$$F\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rF(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rF(y)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

即函数 $F=\sup\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 在 X 上关于同一函数 η 和函数 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数。　证毕

定理 2　对 $\forall r>0$,f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数的充分必要条件是 $g=\exp\{rf\}$ 在 X 上关于 η 和 b 的 B-$(p,0)$-预不变凸函数。

证明　必要性。因为对 $\forall r>0$ 时,f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,则对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$f\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

则 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$g\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)=\exp\left\{rf\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right\}\leqq$$
$$\exp\left\{r\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}=\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)}$$

所以 $g=\exp\{rf\}$ 在 X 上关于 η 和 b 的 B-$(p,0)$-预不变凸函数。

充分性。因为 $\forall r>0$,$g=\exp\{rf\}$ 在 X 上关于 η 和 b 的 B-$(p,0)$-预不变凸函数,则对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$g\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)}$$

则对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$\exp\left\{rf\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right\}=g\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq$$
$$\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)}=\exp\left\{r\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}$$

所以对 $\forall r>0$ 时,利用指数函数的单调性可知

$$f\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

所以 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数。　证毕

3 B-(p,r)-预不变凸规划的 Wolfe 对偶

为证明本文的主要结论,先给出下面的引理。

引理 1[8]　若 f 在 X 上是一个可微的关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,则 $\exists\bar{b}(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)\geqslant0$,使得 f 在 X 上关于同一函数 η 和函数 $\bar{b}$ 的 B-(p,r)-不变凸函数。

注 1　引理 1 说明 B-(p,r)-预不变凸函数与 B-(p,r)-不变凸函数有着非常重要的联系。若上述条件不满足,则引理 1 结论不成立。

例 1　这个例子说明 B-$(1,1)$-预不变凸函数不一定是 B-$(1,1)$-不变凸函数。

$$f(x)=\log(|x|+1),\eta(x,y)=-x^2-y^2,b(x,y,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda+x^2+y^2}, & |x|\geqslant|y|\\ 0, & |x|<|y|\end{cases}$$

则 $X=\mathbf{R}$ 是关于 η 的 p-不变凸集,$1-\lambda b(x,y,\lambda)\geqslant0$,且 f 在 $X=\mathbf{R}$ 上关于 η 和 b 是 B-$(1,1)$-预不变凸函数。但容易证明 f 在 $x=0$ 处不可微,于是可得 f 在 $X=\mathbf{R}$ 上关于 η 和 $\bar{b}(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)\geqslant0$ 不是 B-$(1,1)$-不变凸函数。

本节假设 X 为关于 η 的 p-不变凸集,f 和 g 在 X 上是可微函数。下面考虑(VP)的 Wolfe 型对偶问题。

定理3 (弱对偶) 假设 x 和 (λ,u,y) 分别是(VP) 和(VD) 的可行解,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$ 在 X 上 y 点处关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数,且 $\bar{b}(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)>0$,则 $f(x)\nleqq f(y)+ug(y)$。

证明 用反证法。假设 $f(x)\leqq f(y)+ug(y)$,由 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$,有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)\leqq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)$,因为 x 是(VP) 的可行解,则有

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x)\leqq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\tag{1}$$

于是由严格 B-(p,r)-预不变凸函数定义及引理1 可知,对(VP) 的可行解 $x(x\neq y)$ 有

$$\frac{1}{r}\bar{b}(x,y)(e^{r(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)-\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y))}-1)>\frac{1}{p}(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y))(e^{p\eta(x,y)}-I)$$

又因为 (λ,u,y) 是(VD) 的可行解,有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0$,所以

$$\frac{1}{r}\bar{b}(x,y)(e^{r(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)-\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y))}-1)>0$$

又 $\bar{b}(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)>0$,可得 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x)>\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)$,与(1) 式矛盾,则 $f(x)\nleqq f(y)+ug(y)$。 证毕

注2 定理3 推广了文献[9] 的结论,将 B-(p,r)-不变凸情形推广到 B-(p,r)-预不变凸情形。

定理4 (弱对偶) 假设 x 和 (λ,u,y) 分别是(VP) 和(VD) 的可行解,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$ 在 X 上 y 点处关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,且 $\bar{b}(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)\geqslant0$,当 $x\neq y$ 时,$\bar{b}(x,y)>0$,则 $f(x)\nless f(y)+ug(y)$。

证明方法类似于定理1。

引理2[9] 假设 x^* 是(VP) 的有效解,则 $\exists\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_k^*)\geqq0$,$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_m^*)\geqq0$,使得下列结论成立:1) $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^*\nabla f_i(x^*)+\sum_{j=1}^{m}u_j^*\nabla g_j(x^*)=0$;2) $\sum_{j=1}^{m}u_j^*g_j(x^*)=0$。

定理5 (强对偶) 假设 x^* 是(VP) 的有效解,(λ,u,y) 是(VD) 的可行解,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$ 在 X 上 y 点处关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数,且 $\bar{b}(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)>0$,则 $\exists\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_k^*)\geqq0$,$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_m^*)\geqq0$,使 (λ^*,u^*,x^*) 是(VD) 的有效解。

证明 因为 x^* 是(VP) 的有效解,则根据引理2 可知,$\exists\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_k^*)\geqq0$,$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_k^*)\geqq0$,使得引理2 的结论1)、2) 成立,从而可知 (λ^*,u^*,x^*) 是(VD) 的可行解。又由定理3 可知,对(VD) 的可行解 (λ,u,y) 有 $f(x^*)\nleqq f(y)$,所以由定义5 可知,(λ^*,u^*,x^*) 是(VD) 的有效解。 证毕

定理6 (严格逆对偶) 假设 x 和 (λ,u,y) 分别是(VP) 和(VD) 的可行解,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$ 在 X 上 y 点处关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数,且 $\lambda f(x)\leqq\lambda f(y)+ug(y)$,$\bar{b}(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)>0$,则 $x=y$,y 是(VP) 的有效解。

证明 1) 先用反证法证明 $x=y$。假设 $x\neq y$,又由严格 B-(p,r)-预不变凸函数定义及引理1 可知,对(VP) 的可行解 $x(x\neq y)$

$$\frac{1}{r}\bar{b}(x,y)(e^{r(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)-\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y))}-1)>\frac{1}{p}(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y))(e^{p\eta(x,y)}-I)$$

由 (λ,u,y) 是(VD) 的可行解,有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0$,于是有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x)>$

$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)$,又因为 x 是(VP)的可行解,所以有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)>\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)$。这与已知矛盾,所以 $x=y$。

2)再用反证法证明 x 是(VP)的有效解。假设 x 不是(VP)的有效解,由定义 5 知存在(VP)的可行解 $\bar{x}$,使 $f(\bar{x})\leqq f(x)$,即有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(\bar{x})\leqq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)$。又 $\bar{x}$ 是(VP)的可行解及 $\lambda f(x)\leqq\lambda f(y)+ug(y)$ 得

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(\bar{x})\leqq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\tag{2}$$

再由严格 B-(p,r)-预不变凸函数定义及引理 1 可知,对(VP)的可行解 $\bar{x}(\bar{x}\neq y)$ 有

$$\frac{1}{r}\bar{b}(\bar{x},y)\left(e^{r\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(\bar{x})-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)-\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\right)}-1\right)>\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)\right)\left(e^{p\eta(\bar{x},y)}-I\right)$$

由 (λ,u,y) 是(VD)的可行解,有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0$,所以 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(\bar{x})>\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)$。这与(2)式矛盾。所以 x(即 y)是(VP)的有效解。　证毕

注 3　本文利用 B-(p,r)-预不变凸函数建立了目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题的 Wolfe 型对偶,定理 3 ~ 6 分别给出了目标函数和约束函数在 B-(p,r)-预不变凸函数条件下的弱对偶,强对偶和严格逆对偶定理,推广了文献[7-9,11]中关于 B-预不变凸规划、(p,r)-不变凸规划、B-(p,r)-不变凸规划问题的相应结论。

3 极小化问题中的应用

考虑极小化问题(P)

$$\min_{x\in X}\ f(x)$$
$$\text{s. t.}\quad x\in X$$

定理 7　设 X 为关于 η 的 p-不变凸集,若 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数。若 x^* 是问题(P)的局部最优解,则 x^* 也是问题(P)的全局最优解。

证明　若 x^* 是问题(P)的局部最优解,则存在 x^* 的邻域 $U\subset\mathbf{R}^n$ 满足

$$f(x^*)\leqslant f(x),\ \forall x\in X\cap U\tag{3}$$

假设 x^* 不是问题(P)的全局最优解,则 $\exists\bar{x}\in X$ 使得 $f(\bar{x})<f(x^*)$。又因为 X 为关于 η 的 p-不变凸集且 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,则对 $\forall\lambda\in[0,1]$ 有 $\log\left(\lambda e^{p(\eta(\bar{x},x^*)+x^*)}+(1-\lambda)e^{px^*}\right)^{\frac{1}{p}}\in X$ 且

$$f\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(\bar{x},x^*)+x^*)}+(1-\lambda)e^{px^*}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq\log\left(\lambda b(\bar{x},x^*,\lambda)e^{rf(\bar{x})}+(1-\lambda b(\bar{x},x^*,\lambda))e^{rf(x^*)}\right)^{\frac{1}{r}}<$$
$$\log\left(\lambda b(\bar{x},x^*,\lambda)e^{rf(x^*)}+(1-\lambda b(\bar{x},x^*,\lambda))e^{rf(x^*)}\right)^{\frac{1}{r}}=f(x^*)$$

即对 $\lambda\in[0,1]$,有

$$f\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(\bar{x},x^*)+x^*)}+(1-\lambda)e^{px^*}\right)^{\frac{1}{p}}\right)<f(x^*)\tag{4}$$

因为 $\lim_{\lambda\to0}\log\left(\lambda e^{p(\eta(\bar{x},x^*)+x^*)}+(1-\lambda)e^{px^*}\right)^{\frac{1}{p}}=x^*$,所以 $\exists\delta$ 使 $0<\delta<1$ 和所有 $\lambda\in(0,\delta)$ 有 $\log\left(\lambda e^{p(\eta(\bar{x},x^*)+x^*)}+(1-\lambda)e^{px^*}\right)^{\frac{1}{p}}\in X\cap U$。则(4)式与(3)式矛盾。所以 x^* 也是问题(P)的全局最优解。　证毕

定理 8　设 X 为关于 η 的 p-不变凸集,1)若 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,则问题(P)的解集是关于 η 的 p-不变凸集;2)若 x^* 是问题(P)的最优解且 f 在 X 上关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数,则 x^* 是问题(P)的唯一最优解。

证明　1)设 x 与 y 是极小化问题(P)的解。因为 X 为关于 η 的 p-不变凸集,对 $\lambda\in[0,1]$,有 $z=\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\in X$。由 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,有

$$f(z)=f\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqq\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)}\right)^{\frac{1}{r}}<$$

$$\log(\lambda b(x,y,\lambda)\mathrm{e}^{r\max(f(x),f(y))}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))\mathrm{e}^{r\max(f(x),f(y))})^{\frac{1}{r}}=\max(f(x),f(y))$$

所以$z=\log(\lambda\mathrm{e}^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)\mathrm{e}^{py})^{\frac{1}{p}}$是问题(P)的解,因而问题(P)的解集是关于$\eta$的$p$-不变凸集。

2)设$\bar{x}$是问题(P)的另一个最优解且$\bar{x}\neq x^*$,则$f(\bar{x})=f(x^*)$。由于X是关于η的p-不变凸集,且f在X上关于η和b的严格B-(p,r)-预不变凸函数,则对$\forall\lambda\in[0,1]$,有$\log(\lambda\mathrm{e}^{p(\eta(\bar{x},x^*)+x^*)}+(1-\lambda)\mathrm{e}^{px^*})^{\frac{1}{p}}\in X$且

$$f(\log(\lambda\mathrm{e}^{p(\eta(x^*,\bar{x})+\bar{x})}+(1-\lambda)\mathrm{e}^{p\bar{x}})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda b(x^*,\bar{x},\lambda)\mathrm{e}^{rf(x^*)}+(1-\lambda b(x^*,\bar{x},\lambda))\mathrm{e}^{rf(\bar{x})})^{\frac{1}{r}}=$$

$$\log(\lambda b(x^*,\bar{x},\lambda)\mathrm{e}^{rf(\bar{x})}+(1-\lambda b(x^*,\bar{x},\lambda))\mathrm{e}^{rf(\bar{x})})^{\frac{1}{r}}=f(\bar{x})$$

这与$\bar{x}$是问题(P)的最优解矛盾。所以x^*是问题(P)的唯一最优解。 证毕

注4 定理7、定理8既可以看作是B-(p,r)-预不变凸函数的两个重要的性质,同时它也充分表明了B-(p,r)-预不变凸函数在数学规划中有着非常重要的意义和地位。

参考文献:

[1] Bector C R,Singh C. B-vex functions[J]. JOTA,1991,71:237-253.

[2] Bector C R,Suneja S K,Lalitha C S. Generalized B-vex functions and generalized B-vex programming[J]. JOTA,1993,76(3):561-576.

[3] Suneja S K,Singh C,Bector C R. Generalization of preinvex and B-vex functions[J]. JOTA,1993,76(3):577-587.

[4] Antczak T. (p,r)-invex sets and functions[J]. Jonmal of Mathematical Analysis and Applications,2001,263:355-379.

[5] Hanson M A. On sufficiency ofthe Kuhn-Tucker conditions[J]. J Math Anal Appl,1981,80:545-550.

[6] Antczak T. On (p,r)-invexity-type nonlinear pmgramming problems[J]. J Math Anal Appl,2001,264:297-382.

[7] Antczak T. (p,r)-invexity in muhiobjective programming[J]. E J O R,2004,152:72-78.

[8] Antczak T. A class of B-(p,r)-invex functions and mathematical programming[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2003,286:187-206.

[9] 孙玉华,谢铁军. B-(p,r)-不变凸规划问题的 Wolfe 型对偶[J]. 北京工业大学学报:自然科学版,2005,31(6):666-669.

[10] 李婷,彭再云. 严格B-预不变凸分式规划的最优性条件[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2008,25(2):123-126.

[11] 赵克全,陈哲. B-预不变凸函数在多目标规划的对偶问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2008,25(2):1-3.

[12] Long X J, Peng Z Y, Zeng B. Characterization and applications of semistrictly prequasi-invex functions [J]. Optimization Letters,2009,3(3):337-345.

Operations Research and Cybernetics

Wolfe Duality and Minimize Problem with B-(p,r)-pre-invex Programming

PENG Zai-yun[1], *WAN Xuan*[1,2]

(1. School of Mathematics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;

2. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: B-(p,r)-pre-invex functions is a generalized convex functions. It's a generalization of the B-(p,r)-invex functions. In this paper, firstly, some properties of the B-(p,r)-pre-invex functions are discussed. Secondly, by using the B-(p,r)-pre- invex functions, Wolfe duality of the multi-objective programming problems is considered, in which the objective and the constraint functions are differentiable. The weak, strong and strict converse duality results are established. Finally, we give two important applications about minimize problem which objective function is B-(p,r)-pre-invex functions. The minimize problem is established under B-(p,r)-pre-invexity assumption on objective function. We obtain that a local optimum of this minimize problem is also a global optimum, and the optimal set is p-invex set. If optimum solution exists on minimize problem (P), it must be unique. The work generalizes some results on programming problems with pre-invex functions, B-pre-invex functions and (p,r)-pre-invex functions.

Key words: B-(p,r)-pre-invex functions; multiobjective programming, Wolfe duality; minimize problem

(责任编辑 黄 颖)