DOI :10. 3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 06. 009

一类含时滞的奇异微分积分方程的稳定性分析*

杨珊珊, 杨志春
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

摘要 :本文主要讨论一类具有时滞的奇异微分积分方程 $E\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t,x(t),x(t-r(t)))+\int_{t-\tau}^{t}g(t-s,x(s))\,\mathrm{d}s$, $t\geqslant t_0$,其中,$[f(t,x,y)]^{+}\leqslant B[x]^{+}+L[y]^{+}$,$[g(t-s,x(s))]^{+}\leqslant H(t-s)[x(s)]^{+}$。首先,阐述本文研究背景和意义,给出奇异微分积分方程指数稳定、Dini 导数和 M-矩阵的定义,以及一些必要的数学记号的含义。然后,利用分析技巧和方法并结合 M-矩阵的性质,建立一个广义时滞微分积分不等式。最后,借助于建立的广义微分积分不等式,获得了含时滞的奇异微分积分方程零解全局指数稳定的一个充分条件,即当 $D\in M$,$D=-\left(A^{*}+B+L+\int_{0}^{\tau}H(s)\,\mathrm{d}s\right)$,那么方程的零解是全局指数稳定的。

关键词 :时滞 ;全局指数稳定 ;奇异系统 ;微分积分方程 ;M-矩阵

中图分类号 :O175 **文献标识码** :A **文章编号** :1672-6693(2010)06-0040-03

奇异系统是由微分方程和代数方程构成的一类混合系统,它在电路系统,经济学,力学,化学,生物,航空航天及计算机辅助设计等方面有着广泛的应用,曾引起了众多国内外数学界、控制界等学者的广泛兴趣[1-7]。1974 年,Rosenbrock H H 在国际控制杂志 International Journal of Control 上发表的文章“一般动力系统的结构性质”首次提出奇异系统的概念[1]。随后,美国学者 Luenberger D G 分别在 IEEE Transaction on Automatic Control 和 Automation 上发表文章,对线性奇异系统解的存在性和唯一性等问题展开研究[2-3]。在奇异系统研究阶段的初期,研究进展较慢,但在 20 世纪 80、90 年代奇异系统理论取得了蓬勃发展。从 20 世纪 90 年代初至今,奇异系统的研究涉及到了从线性到非线性,从连续到离散,从确定到不确定,从无时滞到时滞,从线性二次型最优控制 H_2 到控制 H_∞ 等各个专题,取得了丰硕的成果。目前关于较少保守性的奇异时滞系统的时滞相关型稳定性判据的研究已经有所涉及了,但相关文章还很少。显然,进一步发展奇异时滞系统的稳定性的研究方法和工具是有必要的。对于常微分方程和时滞系统,利用一些微分(差分)不等式得到一些有益的结果解决[8-11]。但对时滞奇异系统,很少利用广义微分(差分)不等式的方法来讨论起稳定性。本文将展开这方面的工作,利用广义时滞微分积分不等式的技巧和方法,讨论了一类微分积分方程在奇异情形下的有限时滞的稳定性。

本文考虑如下的时滞奇异系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t,x(t),x(t-r(t)))+\int_{t-\tau}^{t}g(t-s,x(s))\,\mathrm{d}s,\quad t\geqslant t_0 \tag{1}$$

其中,$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$,$f\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$,$g\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$,$f(\cdot,0,0)=0$,$g(\cdot,0,0)=0$,$A=(a_{ij})_{n\times n}$,$E=diag\{\overbrace{1,1,\cdots,1}^{m},0,\cdots,0\}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,标量函数 $r(t)\geqslant 0$ 为有界时滞,$\tau>0$ 为常时滞,笔者设 $r(t)\leqslant\tau$。

对于(1)式,记 $x(t,t_0,\varphi)$(或简记为 $x(t)$)为具有如下初始条件的解

---

* 收稿日期 :2010-06-11 修回日期 :2010-09-03
资助项目 :国家自然科学基金项目(No. 10971240);重庆市自然科学基金科研项目(No. CSTC2008BB2364, No. CSTC2008BB2366);重庆市教委科研项目(No. KJ080806)
作者简介 :杨珊珊,女,硕士研究生,研究方向为系统分析与控制 ;通讯作者 :杨志春,E-mail :yangzhch@126. com

$$x(t_0+s)=\varphi(s),\varphi\in C,-\tau\leqslant s\leqslant 0$$

笔者总是假设所讨论的(1)式的解是整体存在的,显然,$x(t)=0$ 为(1)式的平凡解。本文将讨论其零解的指数稳定性问题,首先给出一些必要的定义和记号。

定义1　如果对(1)式的任意解 $x(t,t_0,\varphi)$,$\varphi\in C$,存在常量 $\lambda>0$ 和 $\kappa\geqslant 1$ 使得

$$\|(x(t,t_0,\varphi)\|\leqslant\kappa\|\varphi\|e^{-\lambda(t-t_0)},t\geqslant t_0$$

则称(1)式的零解为全局指数稳定的。

定义2　$V(t)\in C[\mathbf{R},\mathbf{R}_+^n]$,称 $D^+V(t)=\overline{\lim\limits_{i\to 0^+}}\dfrac{V(t+i)-V(t)}{i}$ 为 $V(t)$ 的右上 Dini 导数。

定义3　如果矩阵 $D=(d_{ij})_{n\times n}$,$d_{ij}\leqslant 0$(当 $i\neq j$ 时),且存在正向量 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$,使得 $Dz>0$ 或 $D^{\mathrm{T}}z>0$,则称矩阵 D 为非奇异 M-矩阵(记作 $D\in M$)。

现对本文用到的一些数学符号予以说明:记 $\mathbf{R}_+^n\triangleq[0,\infty)\times[0,\infty)\times\cdots\times[0,\infty)$,$I$ 为适当维数的单位矩阵,$C[X,Y]$ 表示从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射,记 $C\triangleq C[(-\tau,0],\mathbf{R}^n]$。对于

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,\varphi(t)=$$

$(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))^{\mathrm{T}}\in C,A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和常数 $\tau>0$,笔者采用下列记号

$$[x(t)]^+=(|x_1(t)|,|x_2(t)|,\cdots,|x_n(t)|)^{\mathrm{T}}$$

$$[\varphi(t)]_\tau^+=(\|\varphi_1(t)\|_\tau,\|\varphi_2(t)\|_\tau,\cdots,\|\varphi_n(t)\|_\tau)^{\mathrm{T}}$$

$$\|\varphi_i(t)\|_\tau=\sup_{-\tau<s\leqslant 0}|\varphi_i(t+s)|,(i=1,2,\cdots,n)$$

$$[A]^+=(|a_{ij}|)_{n\times n},A^*=(a_{ij}^*)_{n\times n}$$

$$a_{ij}^*=\begin{cases}a_{ij},i=j\\|a_{ij}|,i\neq j\end{cases}$$

$$E_m=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{m},0,\cdots,0),E_m^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$$

$$\mathrm{sgn}(x)=diag\{\mathrm{sgn}(x_1),\mathrm{sgn}(x_2),\cdots,\mathrm{sgn}(x_n)\}$$

$$\mathrm{sgn}(x_i)=\begin{cases}-1,x_i<0\\0,x_i=0\\1,x_i>0\end{cases}$$

1 广义时滞微分积分不等式

不等式技巧在微分方程定性分析方面有着重要的作用,笔者首先考虑一个奇异时滞微分积分不等式。

定理1　假设 $V(t)\in C[\mathbf{R},\mathbf{R}_+^n]$ 满足下列微分积分不等式

$$KD^+V(t)\leqslant PV(t)+R[V(t)]_\tau+\int_0^\tau Q(s)V(t-s)\,\mathrm{d}s,\ t\geqslant t_0\tag{2}$$

这里 $K=diag\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$,$k_i\geqslant 0$,$P=(p_{ij})_{n\times n}$,$p_{ij}\geqslant 0(i\neq j)$,$R=(r_{ij})_{n\times n}$,$r_{ij}\geqslant 0$,$Q(s)=(q_{ij}(s))_{n\times n}$,$q_{ij}(s)\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+]$,$\int_0^\tau q_{ij}(s)\mathrm{d}s<+\infty$,$i,j=1,2,\cdots,n$。如果存在一个正向量 $z>0$ 使得

$$\left(P+R+\int_0^\tau Q(s)\mathrm{d}s\right)z<0\tag{3}$$

那么当 $V(s)\leqslant z$,$t_0-\tau<s\leqslant t_0$ 时,有 $V(t)\leqslant z$,$t\geqslant t_0$。

证明　对(1)式两边积分

$$KV(t)\leqslant KV(t_0)+\int_{t_0}^t\{PV(\xi)+R[V(\xi)]_\tau+\int_0^\tau Q(s)V(\xi-s)\mathrm{d}s\}\mathrm{d}\xi,t\geqslant t_0\tag{4}$$

首先证明对任意 $\alpha>1$,当 $V(s)<\alpha z$,$t_0-\tau<s\leqslant t_0$ 时有

$$V(t)<\alpha z,\ t\geqslant t_0\tag{5}$$

否则,必存在某正整数 m 和某时刻 $t^*>t_0$ 使得

$$V_m(t^*)=\alpha z_m,V_m(t)\leqslant\alpha z_m,t<t^*\tag{6}$$

$$V(t)\leqslant\alpha z,t\leqslant t^*\tag{7}$$

下面分两种情形来获得矛盾。

情形1:$k_m>0$,利用(4),(5),(7)式得

$$k_mV_m(t^*)\leqslant k_mV(t_0)+E_m\int_{t_0}^{t^*}[PV(\xi)+R[V(\xi)]_\tau+\int_0^\tau Q(s)V(\xi-s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}\xi\leqslant$$

$$k_m\alpha z+E_m\int_{t_0}^{t^*}[P+R+\int_0^\tau Q(s)\mathrm{d}s]\alpha z\mathrm{d}\tau<k_m\alpha z$$

这与(6)式中的第一个等式矛盾。

情形2:$k_m=0$,$k_mV_m(t^*)=0\leqslant k_mV(t_0)+$

$$E_m\int_{t_0}^{t^*}[PV(\xi)+R[V(\xi)]_\tau+\int_0^\tau Q(s)V(\xi-s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}\xi\leqslant$$

$$E_m\int_{t_0}^{t^*}[P+R+\int_0^\tau Q(s)\,\mathrm{d}s]\alpha z\mathrm{d}s<E_m\{0\}=0$$

这显然是矛盾的。

因此,(5)式恒成立,让 $\alpha\to 1^+$,那么获得定理1中结论。　证毕

2 时滞奇异系统的稳定性

下面，在奇异时滞微分积分不等式的基础上，笔者将讨论奇异系统(1)式的稳定性。

定理 2　假设对任意 $t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n$

$$[f(t,x,y)]^+ \leqslant B[x]^+ + L[y]^+,$$

$$[g(t-s,x(s))]^+ \leqslant H(t-s)[x(s)]^+ \qquad (9)$$

这里 $B=(b_{ij})_{n\times n}, L=(l_{ij})_{n\times n}$ 为非负矩阵，$H(s)=(h_{ij}(s))_{n\times n}, h_{ij}(s) \in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+]$，且存在某正数 r 使得 $\int_0^\tau h_{ij}(s)\,\mathrm{e}^{rs}\mathrm{d}s < +\infty$，$i,j=1,2,\cdots,n$。如果

$$D \in M, D = -\left(A^* + B + L + \int_0^\tau H(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

那么(1)式的零解是全局指数稳定的。

证明　由定理中的假设，沿(1)式求 Dini 导数

$$ED^+[x(t)]^+ = \operatorname{sgn}(x)Ex'(t) \leqslant$$

$$\operatorname{sgn}(x)Ax(t) + [f(t,x(t),x(t-r(t)))]^+ +$$

$$\int_{t-\tau}^{t}[g(t-s,x(s))]^+\mathrm{d}s \leqslant$$

$$A^*[x(t)]^+ + B[x(t)]^+ + L[x(t)]_\tau^+ +$$

$$\int_0^\tau H(s)[x(t-s)]^+\mathrm{d}s, t \geqslant t_0 \qquad (8)$$

由于 $D \in M$，则存在 $z > 0$ 满足

$$Dz > 0, \left(A^* + B + L + \int_0^\tau H(s)\,\mathrm{d}s\right)z < 0 \qquad (9)$$

利用连续性和 $\int h_{ij}(s)\,\mathrm{e}^{rs}\mathrm{d}s < +\infty$，存在常量 $\lambda > 0$ 满足

$$\left(\lambda E + A^* + B + L\mathrm{e}^{\lambda\tau} + \int_0^\tau H(s)\,\mathrm{e}^{\lambda s}\,\mathrm{d}s\right)z < 0 \qquad (10)$$

对于任意初始条件

$$x(t_0+s) = \phi(s), -\infty < s \leqslant 0, \phi \in C,\text{有}$$

$$[x(t)]^+ \leqslant z^*\|\phi\|\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, -\infty < t \leqslant t_0 \qquad (11)$$

其中 $z^* = \dfrac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{z_i\}}z \geqslant (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。设 $V(t) = [x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}$，则

$$V(t) = [x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \leqslant z^*\|\phi\|, t \leqslant t_0 \qquad (12)$$

利用(8)式，可推得

$$ED^+V(t) = E\{\lambda[x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} + D^+[x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}\} \leqslant$$

$$\lambda E[x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} + \{A^*[x(t)]^+ + B[x(t)]^+ +$$

$$L[x(t)]_\tau^+ + \int_0^\tau H(s)[x(t-s)]^+\mathrm{d}s\}\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \leqslant$$

$$[\lambda E + A^* + B]V(t) + L\mathrm{e}^{\lambda\tau}[V(t)]_\tau +$$

$$\int_0^\tau \mathrm{e}^{\lambda s}H(s)[V(t-s)]\,\mathrm{d}s \qquad (13)$$

利用定理 1 和(10)，(12)，(13)式，有

$$V(t) = k[x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \leqslant z^*\|\phi\|, t \geqslant t_0$$

由全局稳定性定义可知，(1)式是全局稳定的。

证毕

至此，笔者分析了(1)式描述的奇异系统的全局指数稳定性，并得到了判定时滞奇异系统的全局指数稳定的一个充分条件。

参考文献：

[1] Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamical Systems [J]. International Journal of Control, 1974, 20 (2): 191-202.

[2] Luenberger D G. Dynamic equations in descriptor form [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1977, 22 (3): 312-322.

[3] Luenberger D G. Time-invariant descriptor systems [J]. Automation, 1978, 14: 473-480.

[4] 杨冬梅，张庆灵，姚波. 广义系统[M]. 北京：科学出版社，2004.

[5] 张秀华，张庆灵. 非线性微分代数系统的控制理论与应用[M]. 北京：科学出版社，2007.

[6] 高志伟，王先来，李光泉. 前馈广义分散控制系统的镇定[J]. 自动化学报，1998，24(6)：754-760.

[7] 闫鹏，沈艳军，王建凤. 一类广义中立型系统的稳定性分析[J]. 山东大学学报：理学版，2009，44(4)：66-71.

[8] Xu D Y, Yang Z C. Impulsive delay differential inequality and stability of neural networks [J]. J Math Anal Appl, 2005, 305: 107-120.

[9] Xu D Y, Wang X H. A new nonlinear integro-differential inequality and its application [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22: 1721-1726.

[10] 谢新怀. 一类时滞积分微分方程的稳定性分析[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2009，26(1)：61-64.

[11] 廖晓晰. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京：国防工业出版社，2000.

Analysis of Global Exponential Stability for a Class of Singular Integro-differential Equations with Time Delays

YANG Shan-shan, *YANG Zhi-chun*

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, a class of nonlinear *sin*gular integro-differential Equations with time delays is considered. $Ex(t) = Ax(t) + f(t,x(t),x(t-r(t))) + \int_{t-\tau}^{t} g(t-s,x(s))\,ds,\ t \geqslant t_0$, where, $[f(t,x,y)]^{+} \leqslant B[x]^{+} + L[y]^{+}$, $[g(t-s,x(s))]^{+} \leqslant H(t-s)[x(s)]^{+}$. Firstly, the background and significance are disussed in this paper, singular differential integral equation exponential stability, Dini derivative and M-matrix, and some necessary mathematics mark are given. Then, using the analysis techniques and methods and properties of M-matrix and to establish a generalized delay differential inequality. Finally, the establishment by generalized differential inequality, a sufficient condition of singular delay differential integral equations global exponential stability is obtained. This is $D \in M, D = -(A^{*} + B + L + \int_{0}^{\tau} H(s)\,ds)$. So the zero solution of this equation is global exponential stability.

Key words: time delay; global exponential stability; singular system; integro-differential equations; M-matrix

(责任编辑 游中胜)