2010 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2010
第 27 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 27 No. 6

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 06. 012

关于 Smarandach 平方根部分数列 $a_2(n)$ 和 $b_2(n)$ *

黄 炜[1],赵教练[2]

(1. 宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013;
2. 渭南师范学院 数学与信息科学系,陕西 渭南 714000)

摘要:文章讨论了一个数论函数-平方根函数的算术平均值及几何平均值的极限问题,它与平方根函数值的分布密切相关。设 n 是正整数,$a_2(n)$ 表示不小于 n 的最小平方根部分,$b_2(n)$ 表示不超过 n 的最大平方根部分,即 $a_2(n)=\min\left\{m \,\middle|\, m \geqslant n^{\frac{1}{2}}, m \in \mathbf{N}^+\right\}$,$b_2(n)=\max\left\{m \,\middle|\, m \leqslant n^{\frac{1}{2}}, m \in \mathbf{N}^+\right\}$。定义数列 $S_2(n)=[a_2(1)+a_2(2)+a_2(3)+\cdots+a_2(n)]/n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2(n)$,$I_2(n)=[b_2(1)+b_2(2)+b_2(3)+\cdots+b_2(n)]/n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_2(n)$。研究了整数 n 的最小平方根 $a_2(n)$ 和最大平方根 $b_2(n)$ 部分数列的均值,采用初等及解析的方法,给出了两个有趣的渐近公式。在所得的定理 1 的基础上,研究了数列 $\frac{S_2(n)}{I_2(n)}$,$\frac{K_2(n)}{L_2(n)}$,$(S_2(n)-I_2(n))$,$(K_2(n)-L_2(n))$ 的敛散性,给出了相关的极限式,推论 1、推论 2 和推论 3。

关键词:平方根部分数列;均值;渐近公式
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2010)06-0052-03

1 引言及结论

1993 年罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 教授提出了正整数 n 的平方根部分数列 $\{[n^{\frac{1}{2}}]\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 为

$$\underbrace{1,1,1}_{2^2-1^2},\underbrace{2,2,\cdots,2}_{3^2-2^2},\underbrace{3,3,\cdots,3}_{4^2-3^2},\underbrace{4,4,\cdots,4}_{5^2-4^2},\underbrace{5,5,\cdots,5}_{6^2-5^2}$$
$$\underbrace{6,6,\cdots,6}_{7^2-6^2},\underbrace{7,7,\cdots,7}_{8^2-7^2},\underbrace{8,8,\cdots,8}_{9^2-8^2},\cdots\cdots$$

定义 设对整数 n,n 的平方部分数列定义为

$$a_2(n)=\min\left\{m \,\middle|\, m \geqslant n^{\frac{1}{2}}, m \in \mathbf{N}^+\right\}$$

$$b_2(n)=\max\left\{m \,\middle|\, m \leqslant n^{\frac{1}{2}}, m \in \mathbf{N}^+\right\}$$

称 $a_2(n)$ 表示不小于 n 的最小平方根部分,亦称为上部立方部分数列;称 $b_2(n)$ 表示不超过 n 的最大平方根部分,亦成为下部平方根部分数列这个数列的前几项为

$$a_2(1)=1,a_2(2)=2,a_2(3)=2,a_2(4)=2,$$
$$a_2(5)=3,a_2(6)=3,a_2(7)=3,a_2(8)=3,$$
$$a_2(9)=3,\cdots,b_2(1)=1,b_2(2)=1,b_2(3)=1,$$
$$b_2(4)=2,b_2(5)=2,b_2(6)=2,b_2(7)=2,$$
$$b_2(8)=2,b_2(9)=3,\cdots$$

令

$$S_2(n)=[a_2(1)+a_2(2)+a_2(3)+\cdots+a_2(n)]/n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2(n)$$

$$I_2(n)=[b_2(1)+b_2(2)+b_2(3)+\cdots+b_2(n)]/n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_2(n)$$

$$K_2(n)=\sqrt[n]{a_2(1)+a_2(2)+a_2(3)+\cdots+a_2(n)}=\left(\sum_{i=1}^{n} a_2(n)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$L_2(n)=\sqrt[n]{b_2(1)+b_2(2)+b_2(3)+\cdots+b_2(n)}=\left(\sum_{i=1}^{n} b_2(n)\right)^{\frac{1}{n}}$$

在文献[1]的第 41 个问题中,罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 教授要求研究数列 $a_2(n)$ 和 $b_2(n)$ 的性质。有关平方部分数列的各种性质和有关背景参阅文献[2-6]。

关于这一问题,至今似乎没有人进行过研究,至

* 收稿日期:2010-05-06 修回日期:2010-06-26
资助项目:国家自然科学基金项目(No. 10671155);陕西省自然科学基础研究计划项目(No. SJ08A28)
作者简介:黄炜,男,教授,研究方向为数论及数学应用。

少还没有看到任何有关它的论文。本文利用文献[7]的思想及初等方法研究了这两个数列的均值性质，并给出了两个有趣的渐近公式，同时研究了极限 $\frac{S_2(n)}{I_2(n)}$，$\frac{K_2(n)}{L_2(n)}$，$(S_2(n)-I_2(n))$，$(K_2(n)-L_2(n))$ 的敛散性，即就是证明了以下内容。

定理1 对任一实数 $x>2$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} a_2(n)=\frac{4}{5}x^5+O(x^3)$$

$$\sum_{n\leqslant x} b_2(n)=\frac{4}{5}x^5+O(x^3)$$

由以上定理立刻得到下面的推论。

推论1 对一任意正整数 n，有渐近公式及极限式

$$\frac{S_2(n)}{I_2(n)}=1+O(n^{-2})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_2(n)}{I_2(n)}=1$$

推论2 对一任意正整数 n，有渐近公式及极限式

$$\frac{K_2(n)}{L_2(n)}==1+O(n^{-\frac{2}{n}})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{K_3(n)}{L_3(n)}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}(K_2(n)-L_2(n))=0$$

推论3 对一任意正整数 n，有渐近公式及极限式

$$S_2(n)-I_2(n)=\frac{2}{3}n+O(n^{\frac{1}{2}})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_2(n)-I_2(n)}{n}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_2(n)-I_2(n))^{\frac{1}{n}}=1$$

2 定理的证明

这节用初等方法及 Euler 求和公式[5]给出定理的证明，对任意实数 $x\geqslant 1$，显然存唯一的正整数 M、满足 $M^{\frac{1}{2}}<x\leqslant(M+1)^{\frac{1}{2}}$。$M=O(x^2)=n^2+O(1)$，于是有

$$\sum_{n\leqslant x}a_2(n)=\sum_{0^{\frac{1}{2}}<n\leqslant 1^{\frac{1}{2}}}a_2(1)+\sum_{1^{\frac{1}{2}}<n\leqslant 2^{\frac{1}{2}}}a_2(2)+\sum_{2^{\frac{1}{2}}<n\leqslant 3^{\frac{1}{2}}}a_2(3)+\sum_{3^{\frac{1}{2}}<n\leqslant 4^{\frac{1}{2}}}a_2(4)+\cdots+\sum_{(M-1)^{\frac{1}{2}}<n\leqslant M^{\frac{1}{2}}}a_2(n)+\sum_{M^{\frac{1}{2}}<n\leqslant x}a_2(n)=$$

$$\sum_{k\leqslant M}\sum_{(k-1)^{\frac{1}{2}}<n\leqslant k^{\frac{1}{2}}}a_2(n)+\sum_{M^{\frac{1}{2}}<n\leqslant x}(M+1)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\sum_{k\leqslant M}(k^2-(k-1)^2)k^{\frac{1}{2}}+([x]-M^{\frac{1}{2}})(M+1)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\sum_{k\leqslant M}(2k^{\frac{3}{2}}-k^{\frac{1}{2}})+O(M^{\frac{1}{2}})=$$

$$\frac{4}{5}M^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}M^{\frac{3}{2}}+O(M^{\frac{1}{2}})$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。显然注意到 $M=O(x^2)$，所以

$$\frac{4}{5}M^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}M^{\frac{3}{2}}+O(M^{\frac{1}{2}})=\frac{4}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+O(x)$$

故有 $\sum_{n\leqslant x}a_2(n)=\frac{4}{5}x^5+O(x^3)$，同理，可证得 $\sum_{n\leqslant x}b_2(n)=\frac{4}{5}x^5+O(x^3)$，于是完成了定理中第二个渐近公式的证明。 证毕

在定理1中，取 $x=n$，则

$$S_2(n)=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_2(n)}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{4}{5}x^5+O(x^3)\right)=\frac{4}{5}n^4+O(n^2)$$

$$I_2(n)=\frac{\sum_{i=1}^{n}b_2(n)}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{4}{5}x^5+O(x^3)\right)=\frac{4}{5}n^4+O(n^2)$$

$$K_2(n)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_2(n)\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{4}{5}x^5+O(x^3)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$L_2(n)=\left(\sum_{i=1}^{n}b_2(n)\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{4}{5}x^5+O(x^3)\right)^{\frac{1}{n}}$$

立刻得到

$$\frac{S_2(n)}{I_2(n)}=\frac{\frac{4}{5}n^4+O(n^2)}{\frac{4}{5}n^4+O(n^2)}=1+O(n^{-2})$$

$$\frac{K_2(n)}{L_2(n)}=\frac{\left(\frac{4}{5}n^5+O(n^3)\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{4}{5}n^5+O(n^3)\right)^{\frac{1}{n}}}=$$

$$(1+O(n^{-2}))^{\frac{1}{n}}=1+O(n^{-\frac{2}{n}})$$

因此有 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_2(n)}{I_2(n)}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{K_2(n)}{L_2(n)}=1$。此外，注意到 $\lim_{n\to\infty}K_2(n)=1$，$\lim_{n\to\infty}L_2(n)=1$，则有

$$\lim_{n\to\infty}(K_2(n)-L_2(n))=0$$

即得推论1、2的结论。又由于

$$S_2(n)-I_2(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_2(n)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_2(n)=$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k\leqslant M}(k^2-(k-1)^2)k^{\frac{1}{2}}+\left([x]-M^{\frac{1}{2}}\right)(M+1)^{\frac{1}{2}}\right)-$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k\leqslant M}(k^2-(k-1)^2)(k-1)^{\frac{1}{2}}+\left([x]-M^{\frac{1}{2}}+1\right)M^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant M}(k^2-(k-1)^2)(k^{\frac{1}{2}}-(k-1)^{\frac{1}{2}})+O\left(\frac{1}{n}M^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant M}(2k-1)\left(\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}\right)+O\left(\frac{1}{n}M^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant M}\left(k^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}\right)+O\left(\frac{1}{n}M^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\frac{2}{3}M^{\frac{1}{2}}-2M^{-\frac{1}{2}}+O\left(M^{-\frac{1}{2}}\right)$$

注意到 $M=O(x^2)=n^2+O(1)$，有

$$S_2(n)-I_2(n)=\frac{2}{3}M^{\frac{1}{2}}-2M^{-\frac{1}{2}}+O(M^{-\frac{1}{2}})=$$

$\frac{2}{3}x-2x^{\frac{1}{2}}+O(x^{\frac{1}{2}})=\frac{2}{3}n+O(n^{\frac{1}{2}})$，立刻得到推论 3，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_2(n)-I_2(n)}{n}=\frac{2}{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(S_2(n)-I_2(n))^{\frac{1}{n}}=1$。　　证毕

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, Not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Perez M L. Florentin smarandache definitions, solved and unsolved problems, conjectures and theorems in number theory and geometry [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 2000.

[3] Smarandache F. Sequences of numbers involved in unsolved problems [M]. Phoenix: Hexis, 2006.

[4] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 S(n) 的一个猜想[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 205-208.

[5] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的值分布[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 235-238.

[6] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on smarandache notions and problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[7] 苟素. 关于 SSSP(n) 和 SISP(n) 的均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(3): 431-434.

Smarandach Square Parts Sequences $a_2(n)$ and $b_2(n)$

HUANG Wei[1], *ZHAO Jiao-lian*[2]

(1. Dept. of Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji Shanxi 721013;

2. Dept. of Mathematics and Informatics, Weinan Teacher's University, Weinan Shanxi 714000, China)

Abstract: This article discusses a number of functions - square root function of the arithmetic mean and the geometric mean of the limits of the problem, which is the distribution with the square root function value is closely related. Let n be a positive integer, $a_2(n)$ be the smallest square root greater than or equal to n, and $b_2(n)$ be the largest square root less than or equal to n. Namely: $a_2(n)=\min\left\{m \,\middle|\, m\geqslant n^{\frac{1}{2}}, m\in\mathbf{N}^+\right\}$, $b_2(n)=\max\left\{m \,\middle|\, m\leqslant n^{\frac{1}{2}}, m\in\mathbf{N}^+\right\}$. Then define the sequence: $S_2(n)=[a_2(1)+a_2(2)+a_2(3)+\cdots+a_2(n)]/n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_2(n)$, $I_2(n)=[b_2(1)+b_2(2)+b_2(3)+\cdots+b_2(n)]/n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_2(n)$, the smallest square root $a_2(n)$ and the largest square root $b_2(n)$ of integer n is studied. The elementary and analytic methods to study the mean value properties of these two sequences is used to, give two interesting mean value formulas for them. Based on theorem 1 obtained, then series $\frac{S_2(n)}{I_2(n)}$, $\frac{K_2(n)}{L_2(n)}$, $(S_2(n)-I_2(n))$, $(K_2(n)-L_2(n))$ are also studied: the convergence and divergence of lemma 1、lemma 2 and lemma 3.

Key words: square root part sequences; mean value; asymptotic formula

（责任编辑　欧红叶）