

基于平滑核的广义变分去噪模型*

王益艳

(四川文理学院 物理与工程技术系,四川 达州 635000)

摘要: 基于偏微分方程的变分模型是目前图像处理中最好的方法之一,然而,在解决图像去噪中的反问题时,传统的全变分模型存在“阶梯”效应这一固有缺陷。针对该不足,本文提出了一种基于平滑核的广义变分去噪模型(即 $\hat{u} = \arg \min_u \left\{ \mathcal{K}(u) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u^0|^2 dx dy \right\}$)。该模型采用通用形式的平滑核函数作为图像的正则化项,选取一种鲁棒性好和边缘保持能力强的势函数,利用变分原理推导出与该模型相应的偏微分方程,最后给出了结合梯度加权最速下降法和半点格式的数值迭代算法 $u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \delta t \cdot \left[\left(\frac{\phi(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right) u_{\xi\xi} + \phi(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \right] + (\lambda(u^0 - u))_{i,j}$ 。大量实验仿真结果表明,该模型对高斯噪声图像具有良好的噪声滤除和细节保护能力,与传统全变分模型相比,无论是主观视觉效果,还是客观性能评价指标(PSNR)方面,都具有明显的优势。

关键词: 图像去噪;平滑核;偏微分方程;全变分模型;边缘保持势函数

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1672-6693(2010)06-0059-05

图像去噪是图像处理中一个重要环节,它对图像的后续处理,如边缘检测、图像分割、特征提取、模式识别等带来很大的影响。图像的噪声去除和细节保护是一对矛盾关系,图像的低通滤波在去除噪声的同时,产生图像边缘的模糊,而人对图像的高频成分是十分敏感的。基于偏微分方程的变分模型方法是目前国际上非常流行的热门课题^[1-3],近几年已开始大量应用于图像去噪等领域,其高质量的处理效果已引起国内外研究学者的广泛重视。全变分模型^[1-3]是其中的典型代表,它通过引入能量函数,将图像恢复问题转化成泛函求极值问题,即变分问题,其本质上是一种正则化方法。该方法在去除噪声的同时,可以使图像边缘得到保护。然而,该模型本身存在固有缺陷,即在处理平坦区域时,容易将噪声点当成边缘,从而导致最终处理结果产生“阶梯”效应。

本文针对全变分模型存在的不足,提出了一种基于平滑核的广义变分模型,该模型采用通用形式的平滑核函数作为图像的正则化项,选取一种鲁棒性好和边缘保持能力强的势函数,并推导了与之相应的欧拉-拉格朗日方程,最后结合梯度加权最速下降法和半点格式的数值迭代算法对方程进行求解。

实验结果表明,该模型对于高斯噪声污染的图像能取得良好的恢复效果,相比于全变分模型,该模型获得的去噪后的图像具有更好的客观评价指标和细节保护能力,同时还有效避免了“阶梯”效应。

1 全变分去噪模型

令 u 为原始清晰的图像, μ^0 为被噪声污染的图像,即 $u^0 = u + n$ 。式中 n 是均值为0,方差为 σ^2 的高斯噪声。即

$$E(n) = 0, E^2(n) = \sigma^2 \quad (1)$$

全变分(Total variation, TV)去噪模型是由 Rudin^[1]等人提出的,并且现在是图像恢复中最成功的方法之一。Rudin等人认为,有噪声图像的的全变分比无噪声图像的的全变分明显大,最小化全变分可以达到去除噪声的目的。全变分模型是一种变换,可用下式表示

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \quad (2)$$

其中 $\nabla u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right]$, $|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ 是图像的梯度场, Ω 为图像的定义域, $(x, y) \in \Omega$ 为像

* 收稿日期 2010-04-17

资助项目 四川省教育厅重点科研项目(No. 09ZA104) 四川省教育厅青年基金项目(No. 09ZB072) 2008年人工智能四川省重点实验室开放基金,四川文理学院2009年科研项目(No. 2009B08Z)

作者简介 王益艳,男,硕士,助教,研究方向为图像处理、模式识别。

素点的二维坐标。

并假设所有可观测的图像具有有界变分。有界变分空间定义为

$$BV(\Omega) = \{u : u \in L^1(\Omega), TV(u) < \infty\} \quad (3)$$

$BV(\Omega)$ 是在 BV 范数 $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + TV(u)$ 下的 Banach 空间。

由(1)式可知, TV 范数最小化应满足以下两个条件。

$$\int_{\Omega} u dx dy = \int_{\Omega} u^0 dx dy$$
$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx dy = \sigma^2 \quad (4)$$

此处, $|\Omega|$ 为图像区域 Ω 的面积。对于常数 c , 有 $TV[u + c] = TV[u]$ 。因此, 第一个条件通常总是成立的^[3]。于是, 从 u^0 中恢复 u 的问题就演变为在

条件 $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx dy = \sigma^2$ 下, 求 $TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy$ 的最小化问题。通过引入参数 λ , 可以定义一个新的能量泛函

$$\min_u \left\{ \mathcal{K}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u^0|^2 dx dy \right\} \quad (5)$$

其中, 参数 λ 为拉格朗日乘子, 对平衡图像去噪和平滑起重要作用。这样, 就建立了图像恢复的全变分模型。

2 广义变分模型及其 PDE 的推导

全变分去噪模型虽然在平滑高斯噪声的同时能有效保护图像细节, 然而研究结果表明, 该模型本身存在固有缺陷。即在处理平坦区域时, 有可能将噪声当成边缘, 从而容易产生阶梯效应。基于此, 本文提出如下广义变分模型

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ \mathcal{K}(u) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u^0|^2 dx dy \right\} \quad (6)$$

上式中, 第 1 项为图像的正则化项, 是对图像正则性的先验假设; 第 2 项为数据保真项。正则化项中 $\phi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ 为特定的光滑函数, 称为边缘保持势函数, 可以取指数函数、抛物线函数、对数函数等^[4]。边缘保持势函数均为稳健函数, 它必须满足以下 6 条基本性质^[5]。

- ① 非负性 $\phi(t) \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}$ 且 $\phi(0) = 0$;
- ② 可微性 $\phi(t)$ 几乎处处可微;

③ 单调性 $\phi'(t) \geq 0, \forall t \geq 0$;

$$\textcircled{4} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(t)}{t^2} = \gamma > 0, \rho < \gamma \leq +\infty;$$

$$\textcircled{5} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{t^2} = 0;$$

⑥ $\frac{\phi'(t)}{t}, t \in [0, +\infty)$ 单调下降且几乎处处连续;

注意 $\phi(t)$ 不可微时 $\phi'(t) = [\phi'(t+) + \phi'(t-)]/2$ 。其中, 性质④衡量的是图像噪声平滑的效果, 性质⑤衡量的是图像细节保护能力。边缘保持势函数的选取, 对滤波性能有一定的影响^[6-7]。在本文中, 选择 $\phi(t) = 2(1+t^2)^{1/2} - 2$, 该函数具有较强的噪声鲁棒性和边缘保持能力, 同时其形式简洁明了, 参数较少, 便于数值实现。

从(6)式可以看出, 该模型是 $\mathcal{K}(u) = \int_{\Omega} F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) dx dy$ 型泛函, 其中

$$F = \phi(|\nabla u|) + \frac{\lambda}{2} |u - u^0|^2 = \phi\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\right) + \frac{\lambda}{2} |u - u^0|^2 \quad (7)$$

文献[8]给出了该类泛函求极值的必要条件, 即欧拉-拉格朗日方程(PDE)

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0 \quad (8)$$

其中 $p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}$ 。所以对于(7)式, 有

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \lambda(u - u^0)$$
$$\frac{\partial F}{\partial p} = \phi'(|\nabla u|) \cdot \frac{\partial u / \partial x}{|\nabla u|}$$
$$\frac{\partial F}{\partial q} = \phi'(|\nabla u|) \cdot \frac{\partial u / \partial y}{|\nabla u|} \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式得

$$\lambda(u - u^0) - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\phi'(|\nabla u|) \cdot \frac{\partial u / \partial x}{|\nabla u|} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\phi'(|\nabla u|) \cdot \frac{\partial u / \partial y}{|\nabla u|} \right] \right\} = 0$$
$$\lambda(u - u^0) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left[\phi'(|\nabla u|) \cdot \frac{\partial u / \partial x}{|\nabla u|} \right] + \left[\phi'(|\nabla u|) \cdot \frac{\partial u / \partial y}{|\nabla u|} \right] = 0$$

$$\lambda(u - u^0) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \right] = 0$$

$$\lambda(u - u^0) - \nabla \cdot \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] = 0 \quad (10)$$

由上述推导可知广义变分模型的欧拉-拉格朗日方程为

$$-\nabla \cdot \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] + \lambda(u - u^0) = 0 \quad (11)$$

将(11)式两边同时乘以 $(u - u^0)$,然后在整个图像区域 Ω 上积分,可得

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2 |\Omega|} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] \cdot (u - u^0) \, dx dy \quad (12)$$

其中 σ^2 是噪声的方差。因此,由(12)式可以看出,参数 λ 依赖与噪声水平。

3 数值算法

通过前面的分析知道,变分问题(6)式可以转化为欧拉-拉格朗日方程(12)式的解。因此,本文采用结合梯度加权最速下降法和半点格式的数值迭代算法对(12)式进行求解。

由梯度下降法,引入人工时间变量 t ,则根据(11)式可得如下发展方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] - \lambda(u - u^0) \\ \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial \Omega} = 0 \quad \mu(x, y, \rho) = u^0(x, y) \end{cases} \quad (13)$$

令 η 为图像的梯度方向, ξ 为与 η 垂直的切线方向,分别表示为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \frac{(u_x, \mu_y)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \\ \xi &= \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla u|} = \frac{(-u_y, \mu_x)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \end{aligned} \quad (14)$$

用 $u_{\eta\eta}$ 和 $u_{\xi\xi}$ 分别表示 u 在 η 和 ξ 方向上的二阶导数,则

$$u_{\eta\eta} = \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial u_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial u_{\eta}}{\partial y} \right) \cdot \frac{(u_x, \mu_y)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \quad (15)$$

$$\text{其中 } u_{\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = (u_x, \mu_y) \cdot \frac{(u_x, \mu_y)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

则

$$\frac{\partial u_{\eta}}{\partial x} = \frac{u_x u_{xx} + u_y u_{xy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_{\eta}}{\partial y} = \frac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \quad (17)$$

将(16)、(17)式代入(15)式得

$$u_{\eta\eta} = \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (18)$$

同理可得

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (19)$$

将(13)式中的 $\nabla \cdot \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right]$ 展开成

$\eta - \xi$ 方向的形式为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \cdot u_x, \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \cdot u_y \right] = \\ &= \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \cdot u_x \right]_x + \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \cdot u_y \right]_y = \\ &= \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right]_{|\nabla u|} \cdot |\nabla u|_x \cdot u_x + \\ &+ \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right]_{|\nabla u|} \cdot u_{xx} + \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right]_{|\nabla u|} \cdot \\ &+ |\nabla u|_y \cdot u_y + \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right] \cdot u_{yy} = \\ &= \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right]_{|\nabla u|} \cdot [|\nabla u|_x \cdot u_x + |\nabla u|_y \cdot u_y] + \\ &+ \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right] \cdot (u_{xx} + u_{yy}) = \\ &= \frac{\phi''(|\nabla u|) \cdot |\nabla u| - \phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|^2} \cdot \\ &\cdot [|\nabla u|_x \cdot u_x + |\nabla u|_y \cdot u_y] + \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right] \cdot (u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} + \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right] \cdot (u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}) = \\ &= \frac{\phi''(|\nabla u|) \cdot |\nabla u| - \phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \cdot u_{\eta\eta} + \\ &+ \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right] \cdot (u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}) = \\ &= \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\xi\xi} + \phi''(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (20)$$

将(20)式代入(13)式,可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\xi\xi} + \phi''(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \right] + \lambda(u^0 - u) \quad (21)$$

采用半点格式的中心差分来离散化(21)式中的PDE,为了利用像素周围更多的信息,本文选择8邻域系统,如图1所示。

$(i-1, j-1)$	$(i-1, j)$	$(i-1, j+1)$
$(i, j-1)$	(i, j)	$(i, j+1)$
$(i+1, j-1)$	$(i+1, j)$	$(i+1, j+1)$

图1 图像的8邻域系统

设 h 为 x, y 方向上两像素间的网格步长, δt 为时间步长, 记 $u_{i,j}^n$ 为采样值 $u(ih, jh, n\delta t)$, 则中心像素点的一阶导数和二阶导数对应的有限差分格式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t}$$

$$(u_x)_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h}$$

$$(u_y)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h}$$

$$(u_{xx})_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2}$$

$$(u_{yy})_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2}$$

$$(u_{xy})_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n}{4h^2} \quad (22)$$

由一阶和二阶导数的差分格式可以得到 $|\nabla u|$, $\mu_{\xi\xi}$ 和 $u_{\eta\eta}$ 的离散形式, 进一步对(21)式利用时间步进法求解, 其迭代形式为

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \delta t \cdot \left[\left(\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right) u_{\xi\xi} + \phi'(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \right] + (\lambda(u^0 - u))_{i,j}^n \quad (23)$$

设图像大小为 $M \times N$, 每个像素位置点 $(i, j) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$, 采取对称边界条件为 $u_{0,j} = u_{1,j}$, $u_{M+1,j} = u_{M,j}$, $u_{i,0} = u_{i,1}$, $u_{i,N+1} = u_{i,N}$. 并且为了避免上述方程中分母处的梯度为零, 将梯度提升为 $|\nabla u|_{\varepsilon} = \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon}$, 其中 $\varepsilon > 0$.

4 实验仿真及结果分析

为了验证本文广义变分去噪模型的有效性, 我们进行了大量的仿真实验, 将本文提出的模型与 TV 模型^[3]进行了比较. 采用峰值信噪比(PSNR)作为去噪性能的客观评价尺度.

$$PSNR = 10 \lg \left(\frac{M \times N \max(x_{i,j})^2}{\sum_{i,j} (x_{i,j} - y_{i,j})^2} \right) \quad (24)$$

式中 x 是大小为 $M \times N$ 的原始图像, y 是去噪后的图像. PSNR 值越大, 图像去噪效果越好.

实验1 分别采用大小均为 512×512 的标准 Lena 图像和 House 图像作测试对象, 去噪前后的视觉效果见图2和图3, 表1是其对应的 PSNR(dB)值比较. 图4和图5还给出两种模型去噪后图像的 PSNR 值随高斯噪声方差变化的曲线.



图2 Lena 图像的恢复效果

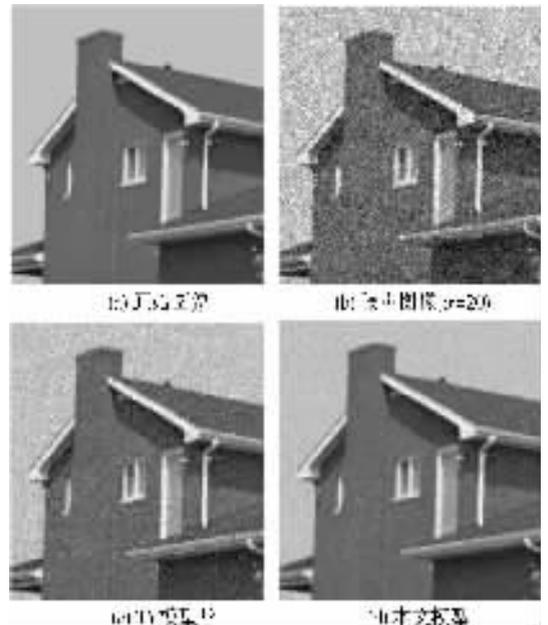


图3 House 图像的恢复效果

表1 两种模型去噪后对应的 PSNR 值比较 dB

噪声方差	Lena 噪声图	TV 模型 ^[3]	本文模型
$\sigma = 20$	22.121 8	27.677 3	30.105 6
噪声方差	House 噪声图	TV 模型 ^[3]	本文模型
$\sigma = 25$	20.196 1	25.590 5	30.990 6

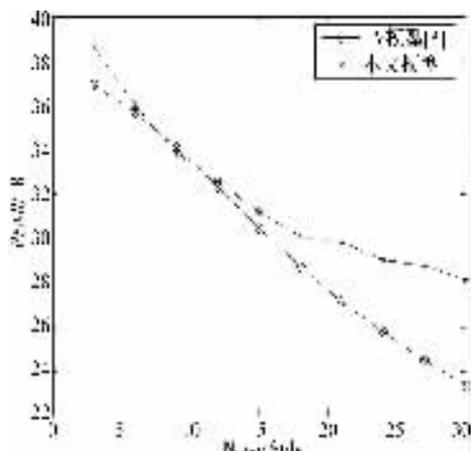


图4 Lena图实验结果

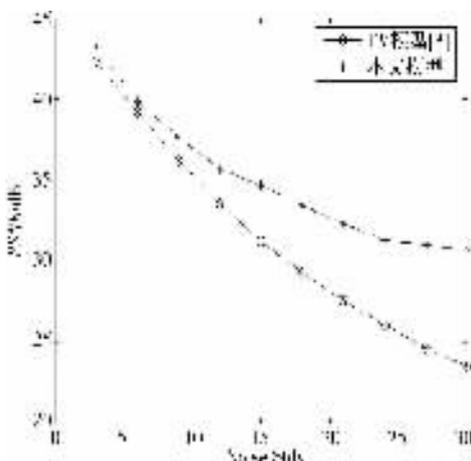


图5 House图实验结果

实验2 采用标准 Cameraman 图像的局部作测试对象,图6是 Gaussian 噪声方差 $\sigma = 15$ 的情形下,图像去噪前后的视觉效果。表2是不同噪声条件下,两种模型去噪后对应的 $PSNR$ (dB) 值比较。



图6 Cameraman 局部图像的恢复效果

表2 两种模型去噪后对应的 $PSNR$ 值比较 dB

噪声方差	噪声图	TV 模型 ^[3]	本文模型
$\sigma = 5$	34.229	36.296	36.64
$\sigma = 10$	28.228	34.881	35.68
$\sigma = 15$	24.639	30.925	32.651
$\sigma = 20$	22.154	28.066	29.034

由上图2和图3可看出,本文模型去噪后的视觉效果明显优于TV模型;而由图6可看出,TV模型对去噪图像中“手臂”和“头发”等边缘处细节保持较好,但在背景等平坦区域产生了一些“阶梯”效应引起的虚假条纹,而本文模型的处理结果避免了阶梯效应,既较好的保护了图像的边缘细节同时又去除了大量噪声。此外,从图4、图5、表1和表2中 $PSNR$ 值的比较结果可以看出,在不同噪声条件下,本文模型对应的 $PSNR$ 值均高于TV模型,这也从客观评价角度说明了本文模型的有效性和优越性。

5 结论

基于偏微分方程的变分模型方法是图像去噪领域近年来研究的热点课题,本文针对经典全变分模型存在“阶梯”效应的不足,提出了一种基于平滑核的广义变分去噪模型,并推导出其数值离散化算法。仿真实验结果表明,该模型对于高斯噪声污染的图像具有良好的降噪性能,在去除噪声的同时保留了图像的边缘细节。与全变分模型相比,该模型对应的峰值信噪比 ($PSNR$) 在高噪声条件下至少提高了1 dB左右,同时还有效避免了“阶梯”效应。

参考文献:

- [1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [2] Cobson D, Vogel C. Convergence of an iterative method for total variation denoising[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1997, 34(5): 1779-1791.
- [3] Chan T F, Osher S, Shen J. The digital TV filter and nonlinear denoising[J]. IEEE trans on Image Processing, 2001, 10(2): 231-241.
- [4] Teboul S, Laure B F, Aubert G, et al. Variational approach for edge-preserving regularization using coupled PDE's[J]. IEEE Trans Image Proc, 1998, 7(3): 387-397.
- [5] Charbonnier P, Feraud L B, Aubert G, et al. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging[J]. IEEE Trans Image Proc, 1997, 6(2): 298-311.

- [6] Black M J ,Rangarajan A. On the unification of line processes ,outlier rejection ,and robust statistics with applications in early vision[J]. International Journal of Computer Vision ,1996 ,19(1) 57-92.
- [7] 邵文泽 ,韦志辉. 一种非线性数字滤波器的统一设计框架及其性能分析[J]. 计算机学报 2007 30(1) 91-102.
- [8] 杨新. 图像偏微分方程的原理与应用[M]. 上海 :上海交通大学出版社 2003 11-12.

Generalized Variational Denoising Model Based on Smooth Kernel

WANG Yi-yan

(School of Physics and Engineering Technology , Sichuan University of Arts and Science , Dazhou Sichuan 635000 , China)

Abstract : Variational model based on PDE is one of the best schemes for image processing. To improve the “ staircase ” effect of conventional total variational model in solving the inverse problem of image denoising , a generalized variational denoising model based on smooth kernel ($\hat{u} = \arg \min_u \left\{ \mathcal{K}(u) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u^0|^2 dx dy \right\}$) is proposed. This model uses a smooth kernel function of general form as the regularized term of image , an edge preserving potential function was adopted , which had good robustness to noises. Then the partial differential equation of the proposed model is deduced by variation approach. Finally a weighted gradient descent flow is developed for image denoising with an iterative algorithm based on semi-point scheme , that is $u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \delta t \cdot \left[\left(\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \right)_{u_{\xi\xi}} + \phi'(|\nabla u|)_{u_{\eta\eta}} \right]_{i,j} + (\lambda(u^0 - u))_{i,j}$. Experimental results show that the proposed model has good performance in image denoising. It can suppress Gaussian noise very effectively and preserve image details very well , meanwhile , the restored images that are obtained by the proposed model have better objective quality(*PSNR*) and subjective vision effect than that by the conventional total variational model.

Key words : image denoising ; smooth kernel ; partial differential equation ; total variational model ; edge preserving potential function

(责任编辑 游中胜)