DOI :10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 06. 019

产品消费的更新回报模型及应用*

邓春华，邹慧鹏，彭丽莉
(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要 本文将更新回报理论应用到产品消费中。产品价格的确定不仅仅取决于生产的成本,还应包含服务成本。本文运用更新回报理论,建立了产品消费的更新回报模型。该模型表明:只有降低成本,提高产品的质量,延长产品的寿命,制定合适的更新策略,才能保障厂商获得合理的利润。通过计算获得了一定条件下消费者的长期平均费用:$C(\omega,T)=\dfrac{E(C_1)}{E(Y_1)}=\dfrac{C(1-\mathrm{e}^{-\mu T})}{T\mu^2(1+\mu\omega)}$和厂商的期望利润:$P=C(\omega,T)-\dfrac{C_0(1+m(\omega))}{\mu(1+m(\omega))}=C(\omega,T)-\dfrac{C_0}{\mu}$,并举例进行了实证分析。

关键词 :更新回报 ;更新策略 ;厂商利润 ;平均费用
中图分类号 :O228　　**文献标识码** :A　　**文章编号** :1672-6693(2010)06-0083-03

我国社会正在实现从生产必需品的消费时代向耐用消费品生产的时代转化,过度竞争只能在短时间内给消费者带来实惠,长期则会给厂商和消费者带来损害。因此,生产和消费必须相互支持,厂商在加强管理,改进技术的同时,应重视制定完善的产品售后服务策略。笔者基于更新过程的基本知识[1-4],通过分析研究,运用更新回报理论,建立产品更新策略模型,并进行了实证研究。

1 更新回报定理

设 $X_1,X_2,X_3,\cdots$ 为相互独立非负的随机变量,且 $X_2,X_3,X_4,\cdots$ 同分布,X_1 的分布函数记为 $F_1(t)$,X_2 的分布函数记为 $F_2(t)$。令

$$T_0=0,\ T_n=\sum_{i=1}^{n}x_i,n=1,2,3,\cdots$$

定义 1[5]　记 $N(t)=\max\{n:T_n<t\}$,$N(0)=0$,$t\geqslant 0$ 则称 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为一般更新过程;如果 $F_1(t)=F(t)$,则称 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为更新过程。称 $F(t)$ 为更新分布。

在实际中,$N(t)$ 一般表示在时间区间 $[0,t]$ 中更换某设备中相同元件的次数,X_n 为第 n 个元件的寿命(称为更新间隔),T_n 为第 n 个元件的更换时刻。

定义 2　记 R_n 为第 n 次更新时得到的报酬,且 $R_n,n=1,2,\cdots$ 是独立同分布的 R. V,设 $R(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}R_n$,则称 $\{R(t),t\geqslant 0\}$ 是一个更新回报过程。

引理 1[7]　(更新回报定理)若更新间隔 $X_1,X_2,\cdots$ 满足 $E(X)<\infty$,每次得到的回报 $E(R)<\infty$,则有 1) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{R(t)}{t}=\dfrac{E(R)}{E(X)}$;2) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{E(R(t))}{t}=\dfrac{E(R)}{E(X)}$。

说明 如果每当发生一次更新,就认为完成一个循环,因此本命题说明了单位时间的平均报酬,等于在一个循环赚到的期望报酬除以一个循环的长度。

2 产品消费的更新回报模型

产品的消费更新策略有很多种,本文讨论的是长期执行一种更换策略,需要具体分析单位时间内消费者的长期平均费用和厂商的期望利润。

2.1 模型假设

某厂商对售出的商品采取如下更换策略。

1) 若商品售出后,在期限 ω 内损坏,则免费更换同样的新产品,若在$(\omega,\omega+T]$ 内损坏,则按使用时间折旧更换,收费为:$C(y-\omega)/T$,(y 为使用时间,$y>\omega$,C 为售价,T 为具体时间段) 若在$(\omega+T,\infty)$ 内损坏,则全价购买新产品。

2) 对在$(0,\omega]$ 内更换的新产品执行最初购买的日期,在$(\omega,\omega+T]$ 内折旧更换的新产品,从更换时刻重新计算更换期。

3) 假定一旦产品损坏,消费者立刻更换或者购买新产品。

* **收稿日期**:2010-01-25　　**修回日期**:2010-09-03
作者简介:邓春华,女,硕士,研究方向为随机系统分析。

2.2 模型的建立

设$t=0$时,用户购买一件新产品,售价为C,成本为$C_0<C$(C为常数),产品的寿命X服从参数为$1/\mu$的指数分布,则有$E(X)=\mu<\infty$,设用户相邻两次购买(包括全价购买和折旧更换,不包括免费更换)的时间间隔$Y_i(i=1,2,\cdots)$的分布函数为$G(x)$,且Y_i相互独立,C_i为$(0,Y_i]$内的费用,且相互独立。设$N(t)$表示$(0,t)$时间内产品更换的次数,T_n表示第n次更换产品的时刻,$F(t)$为更新分布,其更新函数为$m(t)=E(N(t))$。对于该问题笔者可以考虑为更新回报过程,每一次产品更新(不包括免费更换)就开始一个新的循环。由更新回报理论,可以推导出在一个循环中消费者的平均费用和厂商的最大利润。

2.3 模型的求解

由更新回报理论,关键需要计算在第一个循环$(0,Y_1]$中的期望费用$E(C_1)$与$E(Y_1)$。因此,引入下面一个引理。

引理2[8] 更新方程$\overline{G}(t)=P\{Y_1>t\}=$

$$\begin{cases}1,0\leqslant t\leqslant\omega\\ P(\omega+R_\omega>t)=\overline{F}(t)+\int_0^\omega\overline{F}(t-x)\mathrm{d}m(x),0<\omega<t\end{cases}\tag{1}$$

证明 由Y的定义知,$Y_1=\omega+R_\omega$(R_ω表示在ω时刻的剩余寿命),设在$(0,\omega)$内更换$N(\omega)$次,Y_1表示在ω后的第一次更换的时刻,也即是第$N(\omega)+1$次更换的时刻,所以$Y_1=T_{N(\omega)+1}$,从而有

$$\overline{G}(t)=P(R_\omega+\omega>t),t\geqslant\omega\tag{2}$$

又因为

$$P(R_\omega>t-\omega\mid X_1=x)=\begin{cases}1,x>t\\0,\omega<x\leqslant t\\P(R_{\omega-x}>t-\omega),0\leqslant x\leqslant\omega\end{cases}$$

所以(2)式即为

$$\overline{G}(t)=P(R_\omega>t-\omega)=\int_0^\infty P(R_\omega>t-\omega\mid X_1=x)\mathrm{d}F(x)=$$

$$\int_t^\infty\mathrm{d}F(x)+\int_0^\omega P(R_{\omega-x}>(t-x)-(\omega-x))\mathrm{d}F(x)=$$

$$\overline{F}(t)+\int_0^\omega\overline{F}(t-x)\mathrm{d}F(x)\tag{3}$$

根据剩余寿命的定义,将(3)式中的F换成m,可得证

$$\overline{G}(t)=\overline{F}(t)+\int_0^\omega\overline{F}(t-x)\mathrm{d}m(x)\tag{4}$$

从而有 $\overline{G}(t)=P\{Y_1>t\}=$

$$\begin{cases}1,0\leqslant t\leqslant\omega\\ P(\omega+R_\omega>t)=\overline{F}(t)+\int_0^\omega\overline{F}(t-x)\mathrm{d}m(x),0<\omega<t\end{cases}$$

证毕

定理1 消费者的长期平均费用

$$C(\omega,T)=\frac{E(C_1)}{E(Y_1)}=\frac{C(1-\mathrm{e}^{-\mu T})}{T\mu^2(1+\mu\omega)}\tag{5}$$

证明 期望费用$E(Y_1)=E(T_{N(\omega)+1})=E((1+m(\omega))X)=\mu(1+m(\omega))$

$\because$ 寿命X服从指数分布,$\therefore m(\omega)=E(N(\omega))=\mu\omega$

$$\therefore E(Y_1)=\mu(1+\mu\omega)\tag{6}$$

设$(0,Y_1)$内用户花费为C_1,则$C_1=\begin{cases}C,Y_1>\omega+T\\ \frac{C(Y_1-\omega)}{T},\omega<Y_1\leqslant\omega+T\end{cases}$,显然$C_1$是$Y_1$的函数。从而有 $E(C_1)=CP(Y_1>\omega+T)+$

$$\int_\omega^{\omega+T}\frac{C}{T}(t-\omega)\mathrm{d}G(t)=C\overline{G}(\omega+T)+$$

$$\frac{C}{T}\int_\omega^{\omega+T}(t-\omega)\mathrm{d}G(t)\tag{7}$$

在(6)式中,令$x=t-\omega$得

$$\int_\omega^{\omega+T}(t-\omega)\mathrm{d}G(t)=\int_0^T(-x)\mathrm{d}\overline{G}(x+\omega)=$$

$$-T\overline{G}(T+\omega)+\int_0^T\overline{G}(x+\omega)\mathrm{d}x$$

所以(6)式即为

$$E(C_1)=C\overline{G}(T+\omega)+\frac{C}{T}(-T\overline{G}(T+\omega)+$$

$$\int_0^T\overline{G}(x+\omega)\mathrm{d}x)=\frac{C}{T}\int_0^T\overline{G}(x+\omega)\mathrm{d}x\tag{8}$$

又因为 $\overline{G}(x+\omega)=P(Y_1>x+\omega)=P(\omega+R_\omega>x+\omega)=P(R_\omega>x)$

$\because$ 寿命X服从指数分布,根据年龄与剩余寿命的分布有 $P(R_\omega\leqslant x)=\begin{cases}0,x\leqslant 0\\1-\mathrm{e}^{-\mu x},x>0\end{cases}$

$$\therefore P(R_\omega>x)=1-P(R_\omega\leqslant x)=\begin{cases}1,x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-\mu x},x>0\end{cases}$$

$$\therefore\int_0^T P(R_\omega>x)\mathrm{d}x=\int_0^T\mathrm{e}^{-\mu x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-\mu x}\Big|_0^T=\frac{1}{\mu}(1-\mathrm{e}^{-\mu T})$$

$$\therefore E(C_1)=\frac{C(1-\mathrm{e}^{-\mu T})}{T\mu}\tag{9}$$

根据更新回报理论,消费者的长期平均费用为

$$C(\omega,T)=\frac{E(C_1)}{E(Y_1)}=\frac{C(1-\mathrm{e}^{-\mu T})}{T\mu^2(1+\mu\omega)}$$ 证毕

定理2 设 P 为厂商的利润，则

$$P = C(\omega,T) - \frac{C_0(1+m(\omega))}{\mu(1+m(\omega))} = C(\omega,T) - \frac{C_0}{\mu} \quad (10)$$

证明 对于厂商的利润等于由消费者所得的收入与成本的差。在 $(0,\omega)$ 内免费更换的个数的期望为 $E(N(\omega)) = m(\omega)$。

$\therefore$ 在 $(0,Y_1)$ 内，厂商所要支付的成本为 $C_0(1+m(\omega))$，因此厂商的期望利润为

$$P = C(\omega,T) - \frac{C_0(1+m(\omega))}{\mu(1+m(\omega))} = C(\omega,T) - \frac{C_0}{\mu} \quad (11)$$

基于产品更新策略模型，厂商的利润与产品的成本 C_0，售价 C，反映产品寿命的 μ 以及更新策略有关，要实现厂商最大利润，就要降低成本，增大 μ 值，采取合理的更新策略。 证毕

3 实证分析

假设某元件的售价 C 为1000元，成本 C_0 为400元，在 $[0,1/2]$（半年）内免费更换，在 $[1/2,1]$ 内折旧更换，一年后全价更换，元件的寿命服从参数为1的指数分布（即 $\mu=1$），求消费者的长期平均费用和厂商的期望利润。

1）由定理1知，消费者的长期平均费用为

$$C(\omega,T) = \frac{C(1-e^{-\mu T})}{T\mu^2(1+\mu\omega)} = \frac{1000(1-e^{-\frac{1}{2}})}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})} = 533(\text{元})$$

2）由定理2知，厂商期望的利润为

$$C(\omega,T) - \frac{C_0}{\mu} = 533 - 400 = 133(\text{元})$$

本例说明产品更新策略不仅是厂商售后服务的主要内容，而且是厂商价格决定需要考虑的重要因素，恰当的更新策略，能使厂商利润和消费者利益互动，能有效地满足和刺激需求，使厂商获利最大。

4 结束语

本文虽然运用更新回报模型求得了消费者的长期平均费用和厂商的期望利润的计算公式，但是本文还存在着一些不足和一些需要进一步研究的问题，主要是：对于模型假设1）中，期限 ω 如何确定才为最佳；当产品的寿命不是服从指数分布，而服从其他分布时，模型又如何。

参考文献：

[1] 胡迪鹤. 随机过程论[M]. 武汉：武汉大学出版社，2005.

[2] 谢君，王红卫. 基于更新过程的多阶段备件需求模型[J]. 海军工程大学学报，2009，21(1)：1-5.

[3] 黄德春，许长新. 更新理论的产品保修策略中的应用与研究[J]. 预测，2004，23(3)：54-57.

[4] 邓永录，梁之舜. 随机点过程[M]. 北京：科学出版社，1998.

[5] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

[6] 张波，张景肖. 应用随机过程[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

[7] Ross S M. 应用随机过程概率模型导论[M]. 龚光鲁译. 北京：人民邮电大学出版社，2007.

[8] 赵达纲，朱迎善. 应用随机过程[M]. 北京：机械工业出版社，1993.

Return Product Consumption Updating Model and Its Application

DENG Chun-hua, ZOU Hui-peng, PENG Li-li

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This renewal process model is applied into the product consumption in this paper. The price of product is determined not only by production costs but also by sevice costs. A renew of product consumption in return model based on renewal reward process is established in this paper. The model states clearly that it is the only way to ensure firm's, rationalization profit by reducing production costs, improving the quality of products, prolonging production life and working out suitable renew tactics. And getting the customer has the long-term average costs: $C(\omega,T) = \frac{E(C_1)}{E(Y_1)} = \frac{C(1-e^{-\mu T})}{T\mu^2(1+\mu\omega)}$, and the company has desire profit under the some conditions: $P = C(\omega,T) - \frac{C_0(1+m(\omega))}{\mu(1+m(\omega))} = C(\omega,T) - \frac{C_0}{\mu}$. At last, an empirical analysis is conducted.

Key words: renewal process; renew tactics; company' s profit; average cost

（责任编辑 游中胜）