一类具有可变输入率的 M/M/1 排队模型*

台文志，高世泽
（重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047）

摘要：讨论了到达的顾客以概率 $\alpha_k = \dfrac{1}{\beta k + 1}$ 进入 M/M/1 排队系统的可变输入率模型，获得了该模型的平稳分布和顾客的平均输入率，系统的平均服务强度，平均等待队长，系统的平均队长，系统的损失概率，顾客进入系统并接受服务的概率，单位时间内平均进入系统的顾客数，单位时间内平均损失的顾客数等相关指标，从而推广了文献[1]中的结果。

关键词：排队系统；可变输入率；逗留时间；等待时间
中图分类号：O211.6　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2009)01-0069-04

具有可变输入率的排队模型是排队论的 M/M/1 一个重要内容[1-8]。在日常生活中，经常可以看到顾客到达某服务窗（台）前，发现顾客较多而犹豫，即要确定是否加入队列等候服务。一般而言，到达的顾客进入系统的概率随当时的队长而发生变化。令 α_k 表示当系统队长为 k 时，新来的顾客加入队列的概率，显然应有 $\alpha_0 = 1$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k = 0$。文献[1]讨论了到达的顾客以概率 $\alpha_k = \dfrac{1}{k+1}$ 加入队列排队等候服务的情况。本文引入 β 参数（$\beta > 0$），讨论了 $\alpha_k = \dfrac{1}{\beta k + 1}$ 的情形，使顾客进入系统的概率与顾客数 k 的关系更切合实际情况，并获得了该模型的平稳分布和相关指标，从而推广了文献[1]中的结果。

1 模型假设[1]

1）设系统中有一个服务窗口。

2）系统对每个顾客的服务时间 T 服从参数为 μ 的指数分布。

3）顾客到达系统的时间间隔服从参数为 λ 的指数分布。

4）顾客的到达时间与服务时间独立，且系统容量为 ∞。

5）到达的顾客加入队列排队等候服务的概率 $\alpha_k = \dfrac{1}{\beta k + 1}$（$k \in \mathbf{N}$，$\beta$ 为正常数）。

2 数学模型

令 $X(t)$ —— 时刻 t 系统中的顾客数（队长），则可以证明 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是状态空间 $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$，且

$$\begin{cases} \text{生率为 } \lambda_k = \dfrac{\lambda}{\beta k + 1}, k = 0, 1, 2, \cdots \\ \text{灭率为 } \mu_k = \mu, k = 1, 2, 3, 4, \cdots \end{cases} \tag{1}$$

的生灭过程。

状态转移如图 1 所示。

* 收稿日期：2008-04-15　　修回日期：2008-09-12
作者简介：台文志，男，硕士研究生，研究方向为随机系统分析；通讯作者：高世泽，E-mail：gaoshize@cqnu.edu.cn。

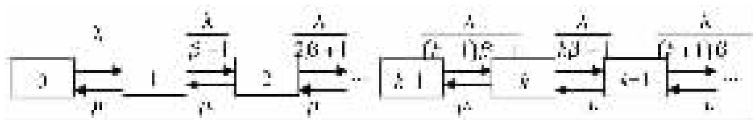

图1　状态转移图

3 平稳分布

定理1　设 $p_k(t)=P\{X(t)=k\},k\in E$,则 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 存在平稳分布

$$p_k=\lim_{t\to\infty}p_k(t)=\rho^k\frac{1}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]}p_0,k>1 \tag{2}$$

其中 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$,

$$p_0=\left\{1+\rho+\frac{\rho^2}{\beta+1}+\frac{\rho^3}{(\beta+1)(2\beta+1)}+\cdots+\frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]}+\cdots\right\} \tag{3}$$

证明　由状态转移图列出 K 氏方程[2]:

对0状态有　$\lambda p_0=\mu p_1\Rightarrow p_1=\dfrac{\lambda}{\mu}p_0=\rho p_0$;

对1状态有　$\dfrac{\lambda}{(\beta+1)}p_1=\mu p_2\Rightarrow p_2=\dfrac{\lambda}{\mu(\beta+1)}p_1=\dfrac{\rho^2}{(\beta+1)}p_0$;

对2状态有　$\dfrac{\lambda}{(2\beta+1)}p_2=\mu p_3\Rightarrow p_3=\dfrac{\lambda}{\mu(2\beta+1)}p_2=\dfrac{\rho^3}{(2\beta+1)(\beta+1)}p_0$;

……

对 $k-1$ 状态有　$\dfrac{\lambda}{(k-1)\beta+1}p_{k-1}=\mu p_k\Rightarrow p_k=\dfrac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]}p_0$

由正则条件 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=1$ 知

$$p_0=\left\{1+\rho+\frac{\rho^2}{\beta+1}+\frac{\rho^3}{(\beta+1)(2\beta+1)}+\cdots+\frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]}+\cdots\right\}^{-1}$$　证毕

值得注意的是,当 $\beta=1$ 时,由(3)式有 $p_0=\left[1+\rho+\dfrac{\rho^2}{2!}+\dfrac{\rho^3}{3!}+\cdots\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-\rho}$,即有 $p_k=\dfrac{\rho^k}{k!}\mathrm{e}^{-\rho}$,$(k=0,1,2,\cdots)$,即平稳分布为参数是 ρ 的泊松分布,与文献[2]的结论一致。

4 系统的主要指标

1)顾客的平均输入率。由(1)、(2)式可得顾客的平均输入率

$$\bar{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k p_k=\lambda p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\beta k+1}\cdot\frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]}p_0=$$

$$\lambda p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1](k\beta+1)}p_0 \tag{4}$$

2)系统的平均服务强度。由(4)式知系统的平均服务强度为

$$\bar{\rho}=\frac{\bar{\lambda}}{\mu}=\frac{\lambda p_0}{\mu}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda\rho^k}{\mu(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1](k\beta+1)}p_0=$$

$$\rho p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{\lambda}{\mu}\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1](k\beta+1)}p_0=$$

$$\rho p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1](k\beta+1)}p_0=$$

$$p_0\left[\rho+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1](k\beta+1)}\right] \tag{5}$$

3）平均等待队长 l_q。注意到等待队长 L_q 有分布列

L_q	0	1	2	$\cdots$
p_k	p_0+p_1	p_2	p_3	$\cdots$

故平均等待队长

$$l_q=E(L_q)=0\times(p_0+p_1)+1\times p_2+2\times p_3+\cdots+k\times p_{k+1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}kp_{k+1}=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1](k\beta+1)}p_0$$

4）系统的平均队长 l_s。首先，队长 $X(\infty)$ 有分布列

$X(\infty)$	0	1	2	$\cdots$
p_k	p_0	p_1	p_2	$\cdots$

故平均等待队长 $l_s=E(X(\infty))=0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2+\cdots+k\times p_k+\cdots=$

$$\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]}p_0$$

5）系统的损失概率 $P_{损}$。由于部分顾客到达系统后没有加入队列排队等候服务，从而会给系统带来损失，下面给出损失概率 $P_{损}$。由于第 $k+1$ 个顾客到达时发现已有 k 个顾客，他加入队列等候服务的概率为 α_k，不加入队列而离去的概率为 $1-\alpha_k$，注意到 $\alpha_0=1$，故由全概率公式有

$$P_{损}=\sum_{k=0}^{\infty}P(L_s=k)\cdot(1-\alpha_k)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k p_k=1-\left(p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{\beta k+1}\right)=$$

$$1-p_0\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1](k\beta+1)}\right]=1-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$$

6）顾客进入系统并接受服务的概率 $P_{益}=1-P_{损}=\dfrac{\bar{\lambda}}{\lambda}$

7）单位时间内平均进入系统的顾客数 $H=\lambda P_{益}=\lambda\dfrac{\bar{\lambda}}{\lambda}=\bar{\lambda}$

8）单位时间内平均损失的顾客数 $H_{损}=\lambda P_{损}=\lambda\left(1-\dfrac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)=\lambda-\bar{\lambda}$

5 实例分析

设某自选商场只有一个收款窗口，当按泊松流到达的顾客发现等待的人较多时，会产生犹豫，究竟是否加入队列等待服务，要考虑当时的队长，若队列较短，他下决心加入队列的可能性就较大，反之，加入队列的可能性较小。现假定顾客到达后加入队列的概率为 $\alpha_k=\dfrac{1}{\beta k+1}$（其中 $0<\alpha_k<1$，$0<\beta$），即 α_k 是依赖于队长 k 的，当 $k\to\infty$ 时，$\alpha_k\to 0$。这样顾客到达后不加入队列而离去的概率为 $1-\alpha_k$。本模型中假定 $\beta=2$（在实际问题中 β 的值可以通过抽样调查进行估计），$\lambda=0.4$，$\mu=0.5$，试求相应的近似目标参量。

可见 $\rho=\dfrac{0.4}{0.5}=0.8$，由于当顾客数 $k=50$ 时，顾客留下等待服务的概率仅为 0.0083，不到 1%。对于这

种小概率事件发生的可能性极低,因此可将顾客数 $k = 50$ 近似为该窗口接待顾客的上限。

$$p_0 = \left\{1 + \rho + \frac{\rho^2}{\beta+1} + \frac{\rho^3}{(\beta+1)(2\beta+1)} + \cdots + \frac{\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1]} + \cdots\right\}^{-1} \approx$$

$$\left\{1 + \rho + \frac{\rho^2}{\beta+1} + \frac{\rho^3}{(\beta+1)(2\beta+1)} + \cdots + \frac{\rho^{50}}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(50-1)\beta+1]}\right\} =$$

$$\left\{1 + 0.8 + \frac{0.8^2}{2+1} + \frac{0.8^3}{(2+1)(2\times2+1)} + \cdots + \frac{0.8^{50}}{(2+1)(2\times2+1)\cdots[(50-1)\times2+1]}\right\}^{-1} \approx 0.488$$

$$\bar{\lambda} \approx \lambda p_0 + \sum_{k=1}^{50} \frac{\lambda\rho^k}{(\beta+1)(2\beta+1)\cdots[(k-1)\beta+1](k\beta+1)} p_0 =$$

$$0.4 \times 0.488 + \sum_{k=1}^{50} \frac{0.4 \times 0.488 \times 0.5^k}{(2+1)(2\times2+1)\cdots[(k-1)\times2+1](k\times2+1)} =$$

$$0.1952 + \sum_{k=1}^{50} \frac{0.1952 \times 0.5^k}{(2+1)(2\times2+1)\cdots[(k-1)\times2+1](k\times2+1)} \approx 0.066$$

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = 0.132$$

$$l_q = \sum_{k=1}^{\infty} k p_{k+1} \approx 0 \times (p_0 + p_1) + 1 \times p_2 + 2 \times p_3 + \cdots + 50 \times p_{50+1} \approx 0.180$$

$$l_s = E(X(\infty)) \approx 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + \cdots + 50 \times p_{50} \approx 0.430$$

$$P_{损} = 1 - \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = 0.165, P_{益} = 1 - P_{损} = 0.835, H = \lambda P_{益} = \lambda\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \bar{\lambda} \approx 0.066$$

$$H_{损} = \lambda P_{损} = \lambda\left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right) = \lambda - \bar{\lambda} = 0.334$$

6 结论

本文研究了 $\alpha_k = \frac{1}{\beta k + 1}$ 的情形,并获得了该模型的平稳分布和相关指标,从而推广了文献[1]中的结论。因此本文将其推广到更为一般的情形,更具普遍性,为实际运用提供了坚实的理论基础。

参考文献:

[1] 李才良. 修理工单重休假的单部件系统的可靠性分析[J]. 西华师范大学学报(自然科学版),2003,19(3):6-23.
[2] 陆传赉. 排队论[M]. 北京:北京邮电学院出版社,1993.
[3] 高世泽. 相关随机游动的平均停止时间[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),2002,22(5):15-23.
[4] 孙永恒,李建平. 排队论基础[M]. 北京:科学出版社,2002.
[5] 王聚丰,朱翼隽,孙凤欣. 有门限 N 且服务速度可变的可修 M/G(M/M)/1 排队系统[J]. 江苏大学学报(自然科学版),2002,23(5):13-18.
[6] Miller W. An introduction to probability theory and its application[M]. 2rd ed. New York:John Wiley & Sons, 1957.
[7] Levy H, Kleinrock L. A queue with starter and queue with vacation:delay Analysis by decomposi-tion[J]. Opns Res, 1986, 34(3):426-436.
[8] 钱锡红,徐万里. M/M/1 服务系统的动态控制[J]. 现代管理科学, 2008(6):46-47, 50.

(下转第 77 页)