运筹学与控制论

一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩非自映象不动点的迭代逼近*

张　芳，向长合
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘要：Chidume 首次提出渐近非扩张非自映象、一致 L-Lipschitz 非自映象的定义，并证明了所引入的迭代序列强收敛于渐近非扩张非自映象的不动点。该文引入渐近伪压缩非自映象的概念，并对一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩非自映象 T 提出了具误差的修改的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$。设 K 是实 Banach 空间 E 的收缩核，P 是从 E 到 K 上的非扩张的收缩映象。若存在严格增加函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$\phi(0)=0$，$\exists j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)$ 使得 $\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1}-T(PT)^{n-1}x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)$，$\forall n\geqslant1$，$x^*$ 是 T 的不动点，在对参数的一些限制条件下，本文证明了迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于非自映象 T 的不动点 x^*，其目的是把对渐近伪压缩映象的迭代结果推广到渐近伪压缩非自映象上，从而推广了以前的结果。

关键词：一致 L-Lipschite 非自映象；渐近伪压缩非自映象；迭代序列；不动点
中图分类号：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2009)01-0007-04

1972 年，Goebel 和 Kirk 在文献[1]中引入了渐近非扩张映象。1991 年，Schu 在文献[2]中引入了渐近伪压缩映象。之后许多学者研究了这两类映象的不动点的迭代逼近问题[3-12]。2003 年，Chidume 在文献[7]中引入渐近非扩张非自映象，一致 L-Lipschitz 的非自映象。并证明了所引入的迭代序列强收敛于渐近非扩张非自映象的不动点。受这些文献中思想的启发，本文引入渐近伪压缩非自映象，并讨论了其不动点的逼近问题，所得结果是对文献[3,7]等相应结论的推广。

1 预备知识

设 E 是实 Banach 空间，其对偶空间为 E^*，映象 J 是从 E 到 E^* 的正规对偶映象，即

$$J(x)=\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2,\|f\|=\|x\|\},\forall x\in E$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 E 与 E^* 的广义对偶对，用 j 表示单值正规对偶映象。

定义 1[6]　设 K 是 Banach 空间 E 的非空子集，K 称为 E 的收缩核，若存在从 E 到 K 上的连续映象 Q，使得 $Qx=x$，$\forall x\in K$。这时，Q 称为 E 到 K 上的收缩映象。

定义 2[7]　设 K 是 Banach 空间 E 的收缩核，具有收缩映象 $P:E\to K$。T 是从 K 到 E 的映象。

1) 称 T 是渐近非扩张的非自映象，如果 $\exists\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$ 使得

$$\|T(PT)^{n-1}x-T(PT)^{n-1}y\|\leqslant k_n\|x-y\|,\forall x,y\in K,n\geqslant1$$

2) 称 T 是一致 L-Lipschitz 的非自映象，如果 $\exists L\geqslant0$，使得

$$\|T(PT)^{n-1}x-T(PT)^{n-1}y\|\leqslant L\|x-y\|,\forall x,y\in K,n\geqslant1$$

定义 3[8]　设 K 是 Banach 空间 E 的非空凸子集，T 是从 K 到 K 的自映象，则 T 的带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 定义为

---

* 收稿日期：2008-08-24　　修回日期：2008-10-10
资助项目：重庆市教委项目(No. KJ070806)
作者简介：张芳，满族，女，硕士研究生，研究方向为不动点理论及其应用；通讯作者：向长合，E-mail：xc-h@sohu.com。

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\alpha_n-\gamma_n)x_n+\alpha_n T^n y_n+\gamma_n u_n \\ y_n=(1-\beta_n-\delta_n)x_n+\beta_n T^n x_n+\delta_n v_n \end{cases},n\geqslant 0 \tag{1}$$

其中 x_0 是 K 中给定的一点,$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 K 中的有界点列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列,且 $\alpha_n+\gamma_n\leqslant 1$,$\beta_n+\delta_n\leqslant 1$,$\forall n\geqslant 0$。

定义4 设 K 是实 Banach 空间 E 的收缩核,具有收缩映象 $P:E\to K$。称 $T:K\to E$ 是渐近伪压缩非自映象,如果 $\exists\ \{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,$\forall x,y\in K$,$\exists j(x+y)\in J(x+y)$,使得

$$\langle T(PT)^{n-1}x-T(PT)^{n-1}y,j(x-y)\rangle\leqslant k_n\|x-y\|^2,\forall n\geqslant 1$$

显然,若映象 $T:K\to E$ 是渐近非扩张的,那么 T 一定是一致 L-Lipschitz 的,$1\leqslant L=\sup\limits_{n\geqslant 1}\{k_n\}$。而且每个渐近非扩张非自映象是渐近伪压缩的,但其逆一般不真[4]。

设 K 是 Banach 空间 E 的收缩核,具有非扩张的收缩映象 $P:E\to K$。设 $T:K\to E$ 是一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩映象。为了逼近映象 T 的不动点,把迭代序列(1)推广为

$$\begin{cases} x_{x+1}=P[(1-\alpha_n-\gamma_n)x_n+\alpha_n T(PT)^{n-1}y_n+\gamma_n u_n] \\ y_n=P[(1-\beta_n-\delta_n)x_n+\beta_n T(PT)^{n-1}x_n+\delta_n v_n] \end{cases},n\geqslant 1 \tag{2}$$

其中 x_1 是 K 中给定的一点,$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 E 中的有界点列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列,且 $\alpha_n+\gamma_n\leqslant 1$,$\beta_n+\delta_n\leqslant 1$,$\forall n\geqslant 1$。

若 K 是 E 的非空凸子集,T 是 K 上的自映象,那么这时 $P=I$(恒等映象),且 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 K 中的有界点列,则迭代序列(2)就退化为(1)式。

引理1[9] 设 E 是实 Banach 空间,$J:E\to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象,则对 $\forall j(x+y)\in J(x+y)$ 有

$$\|x-y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\forall x,y\in E$$

引理2[3] 设 $\varphi(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的严格增加函数,且 $\varphi(0)=0$,n_0 为某非负整数,若当 $n\geqslant n_0$ 时,a_n,b_n,c_n,α_n 都是非负数并满足 1) $a_{n+1}\leqslant(1+b_n)a_n-a_n\varphi(a_{n+1})+c_n$;2) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}b_n<+\infty$,$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}c_n<+\infty$;3) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\alpha_n=+\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

2 主要结论

定理1 设 E 是一实 Banach 空间,K 是 E 的收缩核,具有非扩张的收缩映象 $P:E\to K$。$T:K\to E$ 是一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩映象,其渐近系数为 $k_n\geqslant 1$,且 T 的不动点集 $F(T)$ 非空。任给 $x_1\in K$,$\{x_n\}$ 是由(2)式定义的序列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\delta_n\}\subset[0,1]$,满足

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n<\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(k_n-1)<\infty$;3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\delta_n<\infty$

设 $x^*\in F(T)$,$\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是严格增加函数,且 $\phi(0)=0$。若 $\exists j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)$,$\forall n\geqslant 0$,使得

$$\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1}-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-\phi(\|x_{n+1}-x^*\|) \tag{3}$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*。

证明 设 $M=\sup\limits_{n\geqslant 0}\{\|u_n-x^*\|,\|v_n-x^*\|\}$,由 $\{u_n\}$,$\{v_n\}$ 是 E 中的有界点列,有 $M<+\infty$。由(2)式及引理1,有

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2=\|P[1-\alpha_n-\gamma_n)x_n+\alpha_n T(PT)^{n-1}y_n+\gamma_n u_n]-Px^*\|^2\leqslant \\
\|(1-\alpha_n-\gamma_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(T(PT)^{n-1}y_n-x^*)+\gamma_n(u_n-x^*)\|^2\leqslant \\
(1-\alpha_n-\gamma_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle T(PT)^{n-1}y_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle+2\gamma_n\langle u_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant \\
(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1}-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle+ \\
2\alpha_n\langle T(PT)^{n-1}y_n-T(PT)^{n-1}x_{n+1},j(x_{n+1}-x^*)\rangle+2M\gamma_n\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant \\
(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n(k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-\phi(\|x_{n+1}-x^*\|))+ \\
2\alpha_n\|T(PT)^{n-1}y_n-T(PT)^{n-1}x_{n+1}\|\ \|x_{n+1}-x^*\|+2M\gamma_n\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant
\end{aligned}$$

$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_nk_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-2\alpha_n\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)+$$
$$2\alpha_nL\|y_n-x_{n+1}\|\|x_{n+1}-x^*\|+2M\gamma_n\|x_{n+1}-x^*\| \tag{4}$$

由(2)式有

$$\|y_n-x_{n+1}\|=\|P[(1-\beta_n-\delta_n)x_n+\beta_nT(PT)^{n-1}x_n+\delta_nv_n]-P[1-\alpha_n-\gamma_n)x_n+\alpha_nT(PT)^{n-1}y_n+\gamma_nu_n]\|\leqslant$$
$$\|(1-\beta_n-\delta_n)x_n+\beta_nT(PT)^{n-1}x_n+\delta_nv_n-[1-\alpha_n-\gamma_n)x_n+\alpha_nT(PT)^{n-1}y_n+\gamma_nu_n]\|=$$
$$\|(\alpha_n-\beta_n)(x_n-T(PT)^{n-1}x_n)+\alpha_n[T(PT)^{n-1}x_n-T(PT)^{n-1}y_n]+\gamma_n(x_n-u_n)-\delta_n(x_n-v_n)\|\leqslant$$
$$|\alpha_n-\beta_n|(1+L)\|x_n-x^*\|+\alpha_nL\|x_n-x^*\|+\alpha_nL\|y_n-x^*\|+(\gamma_n+\delta_n)\|x_n-x^*\|+M(\gamma_n+\delta_n)=$$
$$[(1+L)|\alpha_n-\beta_n|+\alpha_nL+\gamma_n+\delta_n]\|x_n-x^*\|+\alpha_nL\|y_n-x^*\|+M(\gamma_n+\delta_n) \tag{5}$$

$$\|y_n-x^*\|=\|P[(1-\beta_n-\delta_n)x_n+\beta_nT(PT)^{n-1}x_n+\delta_nv_n]-Px^*\|\leqslant$$
$$\|(1-\beta_n-\delta_n)(x_n-x^*)+\beta_n(T(PT)^{n-1}x_n-x^*)+\delta_n(v_n-x^*)\|\leqslant$$
$$(1-\beta_n-\delta_n)\|x_n-x^*\|+\beta_n\|T(PT)^{n-1}x_n-x^*\|+\delta_n\|v_n-x^*\|\leqslant$$
$$(1-\beta_n-\delta_n)\|x_n-x^*\|+\beta_nL\|x_n-x^*\|+\delta_nM\leqslant(1+\beta_nL)\|x_n-x^*\|+\delta_nM \tag{6}$$

把(6)式代入(5)式得

$$\|y_n-x_{n+1}\|\leqslant[(1+L)|\alpha_n-\beta_n|+2\alpha_nL+\alpha_n\beta_nL^2+\gamma_n+\delta_n]\|x_n-x^*\|+(\alpha_n\delta_nL+\gamma_n+\delta_n)M \tag{7}$$

令 $d_n=[(1+L)|\alpha_n-\beta_n|+2\alpha_nL+\alpha_n\beta_nL^2+\gamma_n+\delta_n]\alpha_n$,$e_n=(\alpha_n\delta_nL+\gamma_n+\delta_n)\alpha_n$,把(7)式代入(4)式有

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_nk_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-2\alpha_n\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)+2(d_n\|x_n-x^*\|+$$
$$e_nM)\|x_{n+1}-x^*\|+2M\gamma_n\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_nk_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-2\alpha_n\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)+$$
$$d_n\|x_n-x^*\|^2+d_n\|x_{n+1}-x^*\|^2+e_nM(1+\|x_{n+1}-x^*\|^2+M\gamma_n(1+\|x_{n+1}-x^*\|^2)\leqslant$$
$$(1+\alpha_n^2-2\alpha_n+d_n)\|x_n-x^*\|^2-2\alpha_n\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)+$$
$$(2\alpha_nk_n+d_n+Me_n+M\gamma_n)\|x_{n+1}-x^*\|^2+(e_n+\gamma_n)M \tag{8}$$

由假设条件 2),3),有　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_n<+\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}e_n<+\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<+\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n<+\infty$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,故有 $2\alpha_nk_n+d_n+e_nM+\gamma_nM\to0$,$n\to\infty$。因此存在自然数 n_0,当 $n\geqslant n_0$ 时有 $2\alpha_nk_n+d_n+e_nM+\gamma_nM<\frac{1}{2}$。令 $b_n=\frac{1-2\alpha_n+\alpha_n^2+d_n}{1-(2\alpha_nk_n+d_n+e_nM+\gamma_nM)}-1=\frac{\alpha_n^2+2\alpha_n(k_n-1)+2d_n+e_nM+\gamma_nM}{1-(2\alpha_nk_n+d_n+e_nM+\gamma_nM)}$,$c_n=\frac{e_nM+\gamma_nM}{1-(2\alpha_nk_n+d_n+e_nM+\gamma_nM)}$,当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$0\leqslant b_n\leqslant2(\alpha_n^2+2\alpha_n(k_n-1)+2d_n+e_nM+\gamma_nM),0\leqslant c_n\leqslant2(e_nM+\gamma_nM)$$

由假设有　$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}b_n<+\infty$,$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}c_n<+\infty$,$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\alpha_n=+\infty$

令 $\|x_{n+1}-x^*\|^2=a_{n=1}$,$\varphi(s)=4\phi(\sqrt{s})$,$\forall s\geqslant0$,由(8)式便有

$$a_{n+1}\leqslant(1+b_n)a_n-\alpha_n\phi(a_{n+1})+c_n,\forall n\geqslant n_0$$

由引理 2 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|^2=0$。从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=0$,即 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*。　证毕

注　若 $T:K\to K$ 是自映象,$\{u_n\}$,$\{v_n\}$ 是 K 中的有界点列,这时本文定理 1 就变为文献[3]中的定理 1。因此,本文是对文献[3]的推广。

参考文献:

[1] Goebel K, Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings [J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 35(1): 171-174.

[2] Schu J. Iterative construction of fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings [J]. J Math Anal Appl, 1991, 158:407-413.

[3] 向长合. 渐近伪压缩映象不动点的迭代逼近[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 32(5):6-9.

[4] 张石生. Banach 空间中渐近非扩张映象不动点的迭代逼近问题[J]. 应用数学学报, 2001, 24(2):236-241.

[5] 曾六川. Banach 空间中带误差的修改的 Ishikawa 迭代程序[J]. 数学学报, 2004, 47(2): 219-228.
[6] 曾六川. 一致光滑 Banach 空间中渐近伪压缩映象不动点的迭代逼近[J]. 数学学报, 2005, 26(A): 283-290.
[7] Chidume C E, Ofoedu E U, Zegeye H. Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings [J]. J Math Anal Appl, 2003, 280: 364-374.
[8] Xu Y G. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive operator equations [J]. J Math Anal Appl, 1998, 224(1): 91-101.
[9] Chang S S. On Chidume's open question and approximation solutions of multi-valued strongly accretive mapping equation in Banach space [J]. J Math Anal Appl, 1997, 216: 94-111.
[10] 向长合. 有限个渐近非扩张映象公共不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24(1): 7-10.
[11] 向长合. 有限个广义渐近拟非扩张型映象公共不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2006, 23(1): 6-9.
[12] 唐玉华. 序 Banach 空间中二元算子的不动点的迭代逼近[J]. 西华师范大学学报(自然科学版), 2006, 27(3): 293-295.

Itrative Approximation of Fixed Points of Uniformly *L*-Lipschitzian Asymptotically Pseudocontractive Nonself-mappings

ZHANG Fang, XIANG Chang-he

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In 2003, Chidume first introduced the definition of asymptotically nonexpansive nonself-mappings and uniformly L-Lipschitzian nonself-mappings. Furthermore, he proved that the iterative sequence he introduced converged strongly to fixed point of asymptotically nonexpansive nonself-mappings. The definition of asymptotically pseudocontractive nonself-mapping is introduced and the modified Ishikawa iterative sequence $\{x_n\}$ for uniformly L-Lipschitzian asymptotically pseudocontractive nonself-mapping T is presented in this paper. Let K be a retract of a real Banach space E, P be a nonexpansive retraction from E to K. Suppose there exist a strictly increasing function $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\phi(0)=0$, $\exists j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)$ such that $\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1}-T(PT)^{n-1}x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle \leqslant k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)$, $\forall n\geqslant 1$, x^* is a fixed point of T. This paper proves that the iterative sequence $\{x_n\}$ converges strongly to fixed points x^* under some restrictive conditions on parameters. The objective of this article is to extend the asymptotically pseudocontractive mappings to asymptotically pseudocontractive nonself-mappings. Therefore, the results presented in this paper extended the previous work.

Key words: uniformly L-Lipschizian nonself-mappings; asymptotically pseudo-contractive nonself-mappings; iterative sequence; fixed points

(责任编辑　黄　颖)