运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2011. 01. 001

B-(p,r)-预不变凸规划的 Mond-Weir 对偶问题研究*

万 轩[1,2], 彭再云[2]

(1. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 401311; 2. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074)

摘要:B-(p,r)-预不变凸函数是一类新的广义凸函数,它是 B-(p,r)-不变凸函数的推广,本文对其性质及 B-(p,r)-预不变凸多目标规划问题的 Mond-Weir 型对偶进行了研究。首先,给出了 B-(p,r)-预不变凸函数的几个基本性质,表明 B-(p,r)-预不变凸函数仍然满足加法,数乘和复合函数运算性质,并举例说明了 B-(p,r)-预不变凸函数是 B-(p,r)-不变凸函数的真推广。然后,重点讨论了 B-(p,r)-预不变凸多目标规划问题及其 Mond-Weir 型对偶问题的解的情况。分别给出了关于目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题(VP)在 B-(p,r)-预不变凸型条件下的弱对偶、强对偶和严格逆对偶定理。其结论具有一般性,推广了涉及预不变凸函数、B-预不变凸函数和 (p,r)-预不变凸函数的文献的相关结论。

关键词:B-(p,r)-预不变凸函数;多目标规划;Mond-Weir 型对偶

中图分类号:O221.1 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2011)01-0001-06

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色;有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一。1991 年,C. R. Bector 和 C. Singh 提出一类广义凸函数——B-不变凸函数,它是不变凸函数的推广,利用这类函数讨论了规划问题[1]。此后,Bector、Singh 及 Lalitha 在可微情形下引入了 B-凸函数和 B-不变凸函数的概念,并讨论了其非线性规划最优解的充分性条件及对偶性[2]。而后,一些学者将广义凸性应用到对非光滑优化问题的讨论中[3-4]。1993 年,作为对预不变凸函数的推广,S. K. Suneja,C. Singh 和 C. R. Bector 引入了 B-预不变凸函数的定义[5]。

2001 年,Antczak 在文献[6-7]中提出了 (p,r)-不变凸函数的概念。然后,在文献[8]中又给出了关于向量 (p,r)-不变凸函数的定义,(p,r)-不变凸函数是不变凸函数的又一推广形式。2003 年,Antczak 提出的 B-(p,r)-不变凸函数的概念,它既是不变 B-凸函数的推广形式,又是 (p,r)-不变凸函数的推广形式,并建立了不同类型优化问题的最优性条件、鞍点问题及对偶问题的相关定理[9];同时,Antczak 给出了另一类新的广义凸函数—B-(p,r)-预不变凸函数。之后,许多学者进一步研究了 B-(p,r)-不变凸函数[10-13]。

本文在文献[1-16]的基础上继续对此类新的广义凸函数—B-(p,r)-预不变凸函数做研究,首先,给出了 B-(p,r)-预不变凸函数的几个性质,其次,利用 B-(p,r)-预不变凸函数建立了目标函数和约束函数均可微情形下的多目标规划问题的 Mond-Weir 型对偶,证明了目标函数和约束函数在 B-(p,r)-预不变凸函数条件下的弱对偶,强对偶和严格逆对偶定理。

1 预备知识

为了本文后面讨论的需要,首先对几个常用记号进行说明,设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,规定:①$x=y$ 是指 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x<y$ 是指 $x_i<y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x\leqq y$ 是指 $x_i\leq y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x\leq y$ 是指 $x\leqq y$,而 $x\neq y$。②$\mathbf{R}_+$ 表示全体非负实数集。③若无特别说明,假定非空开集 $X\subseteq\mathbf{R}^n$,$f:X\to\mathbf{R}$,$g:X\to\mathbf{R}$,$\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$,$\bar{b}:X\times X\to\mathbf{R}_+$,$b:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$。

* 收稿日期:2010-07-01; 修回日期:2010-07-11

资助项目:重庆市科委研究项目(No. CSTC2008BB0346);重庆市教委资助课题(No. KJ100405;No. KJ070404);重庆市高等教育教学改革资助项目(No. 0833141)

作者简介:万轩,男,硕士研究生,研究方向为最优化理论及其应用;通讯作者:彭再云,E-mail:pengzaiyun@126.com

定义1[5] 称 X 为不变凸集,若 $\exists\eta$ 满足 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,$y+\lambda\eta(x,y)\in X$。

定义2[6] 称 X 为 p-不变凸集,若 $\exists\eta$ 满足 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,有

$$\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{1/p}\in X,p\neq 0,y+\lambda\eta(x,y)\in X,p=0$$

注1 当 $p=0$ 时,X 是不变凸集。

在以下定义中,记 $I=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^n$,$e^{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}=(e^{\alpha_1},e^{\alpha_2},\cdots,e^{\alpha_n})$。

定义3[6] 如果 f 是 X 上的可微函数,p,r 是任意实数,$y\in X$,若对任意 $x\in X$,$\exists\eta$ 和 $\bar b$ 有

$$\frac{1}{r}\bar b(x,y)(e^{r(f(x)-f(y))}-1)\geqq\frac{1}{p}\nabla f(y)(e^{p\eta(x,y)}-I),p\neq 0,r\neq 0$$

$$\frac{1}{r}\bar b(x,y)(e^{r(f(x)-f(y))}-1)\geqq\nabla f(y)\eta(x,y)),p=0,r\neq 0$$

$$\bar b(x,y)(f(x)-f(y))\geqq\frac{1}{p}\nabla f(y)(e^{p\eta(x,y)}-I),p\neq 0,r=0$$

$$\bar b(x,y)(f(x)-f(y))\geqq\nabla f(y)\eta(x,y),p=0,r=0$$

则称 f 是在 y 点处关于 η 和 $\bar b$ 的 B-(p,r)-不变凸函数。若上面不等式当 $x\neq y$ 时为严格不等式,则称 f 是在 y 点处关于 η 和 $\bar b$ 的严格 B-(p,r)-不变凸函数。

定义4[6] X 是 p-不变凸集,p,r 是任意实数,$y\in X$,如果对 $\forall x\in X,\lambda\in[0,1]$,$\exists\eta$ 有

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\log(\lambda e^{rf(x)}+(1-\lambda)e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p\neq 0,r\neq 0$$

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),p\neq 0,r=0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqq\log(\lambda e^{rf(x)}+(1-\lambda)e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p=0,r\neq 0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),p=0,r=0$$

则称 f 是 X 上 y 点处关于 η 的 (p,r)-预不变凸函数。若上面不等式当 $x\neq y$ 时为严格不等式,则称 f 是在 y 点处关于 η 的严格 (p,r)-预不变凸函数。

定义5[9] X 是 p-不变凸集,p,r 是任意实数,$y\in X$,若对 $\forall x\in X,\lambda\in[0,1]$,$\exists\eta$ 和 b 有 $1-\lambda b(x,y,\lambda)\geq 0$ 且

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p\neq 0,r\neq 0$$

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y),p\neq 0,r=0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqq\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p=0,r\neq 0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqq\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y),p=0,r=0$$

则称 f 是 X 上 y 点处关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数。若上面不等式当 $x\neq y$ 时为严格不等式,则称 f 是在 y 点处关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数。

定义6[13] 对问题(P):$\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$($x\in X$,$X$ 为满足问题(P)的约束条件的所有点的集合),x^* 是问题(P)的可行解。若不存在(P)的可行解 x,使 $f(x)\leqq f(x^*)$ 成立,则称 x^* 为该问题的有效解。若 min 改为 max,$f(x)\leqq f(x^*)$ 应改为 $f(x)\geqq f(x^*)$。

考虑下面的多目标规划问题

$$(\mathrm{VP})\begin{cases}\min\ f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))\\ \mathrm{s.t.}\ g_j(x)\leqq 0,j=1,2,\cdots,m\\ \quad x\in X\end{cases}$$

其中,$f_i:X\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,k)$ 和 $g_j:X\to\mathbf{R}(j=1,2,\cdots,m)$ 都是 X 上的可微函数。记(VP)的可行域为 $D=\{x\in X:g_j(x)\leqq 0,j=1,2,\cdots,m\}$。

(VP)的 Mond-Weir 型对偶模型

$$
(\mathrm{VD})\begin{cases}\max f(y)=(f_1(y),f_2(y),\cdots,f_k(y))\\ \text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0\\ \sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\geqq 0\\ \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\geqq 0,u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)\geqq 0\end{cases}
$$

记(VD)的可行域为

$$
W=\{(\lambda,u,y)\in \mathbf{R}_+^k\times\mathbf{R}_+^m\times X:\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0,\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)\geqq 0,\lambda\geqq 0\}
$$

2 B-(p,r)-预不变凸函数的性质

这一部分给出 B-(p,r)-预不变凸函数的几个基本性质定理。文中的性质只证明当 $p\neq 0,r\neq 0$ 时的情况,当 $p=0,r\neq 0,p\neq 0,r=0$ 和 $p=0,r=0$ 时,同样可以得出相应的结果。

定理 1　若 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,对 $\forall c\in\mathbf{R}$,使得 $f+c$ 在 X 上关于同一函数 η 和函数 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数。

证明　现根据 B-(p,r)-预不变凸函数的定义,$\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$
f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}
$$

则对 $\forall c\in\mathbf{R},\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$
f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})+a\leqq\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}+a=
$$
$$
\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{r(f(x)+a)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{r(f(y)+a)})^{\frac{1}{r}}
$$

所以 $f+c$ 在 X 上关于同一函数 η 和函数 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数。　　证毕

定理 2　若 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,对 $\forall k>0$,使得 kf 在 X 上关于同一函数 η 和函数 b 的 B-$(p,r/k)$-预不变凸函数。

证明　现根据 B-(p,r)-预不变凸函数的定义,$\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$
f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}
$$

则对 $\forall k>0,\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有

$$
kf(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq k\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}=
$$
$$
\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{\frac{r}{k}kf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{\frac{r}{k}kf(y)})^{\frac{k}{r}}
$$

所以 kf 在 X 上关于同一函数 η 和函数 b 的 B-$(p,r/k)$-预不变凸函数。　　证毕

注 2　由定理 1 ~ 2 知道 B-(p,r)-预不变凸函数是满足线性性质的。

下面的定理说明,在一定条件下 B-(p,r)-预不变凸函数也满足函数复合性质。

定理 3　假设 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,单调不减函数 $g:I\to\mathbf{R}$ 是关于 $\bar{\eta}(f(x),f(y))=f(x)-f(y)$ 的 (r,s)-预不变凸函数,其中 $range(f)\subseteq I$,则复合函数 $g\circ f$ 在 X 上关于同一函数 η 和函数 b 的 B-(p,s)-预不变凸函数。

证明　对 $\forall x,y\in X,x\neq y,\lambda\in[0,1]$。因为 f 在 X 上关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,所以

$$
f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqq\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}
$$

又由 $g:I\to\mathbf{R}$ 是单调不减的关于 $\bar{\eta}(f(x),f(y))=f(x)-f(y)$ 的 (r,s)-预不变凸函数,于是有 $1-\lambda b(x,y,\lambda)\in[0,1]$ 且

$$
g[f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})]\leqq g[\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}]=
$$
$$
g[\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{r(\bar{\eta}(f(x),f(y))+f(y))}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}]\leqq
$$

$$\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)\mathrm{e}^{sg\circ f(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))\mathrm{e}^{sg\circ f(y)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

所以 $g\circ f$ 在 X 上关于同一函数 η 和函数 b 的 B-(p,s)-预不变凸函数。 证毕

注3 定理1~3给出了 B-(p,r)-预不变凸函数的几个重要的性质,其结论推广了文献[7]中关于 (p,r)-不变凸函数与 (p,r)-预不变凸函数相应的结果。

3 B-(p,r)-预不变凸规划的 Mond-Weir 对偶

本节主要考虑文中给出的多目标规划问题(VP)的Mond-Weir型对偶问题(VD)。假设 X 为关于 η 的 p-不变凸集,f 和 g 在 X 上是可微函数。为证明本论的主要结论,先给出下面的引理。

引理1[9] 若 f 是一个可微的关于 η 和 b 的 B-(p,r)-预不变凸函数,则 $\exists\,\bar{b}(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b(x,y,\lambda)\geqslant 0$,使得 f 是关于同一函数 η 和函数 $\bar{b}$ 的 B-(p,r)-不变凸函数。

注4 引理1说明 B-(p,r)-预不变凸函数与 B-(p,r)-不变凸函数有着非常重要的联系。

若上述条件不满足,则引理1结论不成立。

例1 这个例子说明 B-$(1,1)$-预不变凸函数不一定是 B-$(1,1)$-不变凸函数。

设 $f(x)=\log(|x|+1)$,$\eta(x,y)=\begin{cases}\log(|x|-|y|+1), & |x|>|y|\\ 0, & |x|\le|y|\end{cases}$,$b(x,y,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1+|x|-|y|}{\lambda+|x|-|y|}, & |x|>|y|\\ 0, & |x|\le|y|\end{cases}$,则 $X=R$ 是关于 η 的 p-不变凸集,$1-\lambda b(x,y,\lambda)\geqq 0$,且 f 在 $X=R$ 上关于 η 和 b 是 B-$(1,1)$-预不变凸函数。但是 f 在 $x=0$ 处不可微,即 f 在 $X=R$ 上关于 η 和 $\bar{b}(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b(x,y,\lambda)\geq 0$ 不是 B-$(1,1)$-不变凸函数。

引理2 假设 x 和 (λ,u,y) 分别是(VP)和(VD)的可行解,$\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j$ 是在 y 点处 η 和 b_2 的 B-(p,r)-预不变凸函数,且 $\bar{b}_2(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b_2(x,y,\lambda)\geq 0$,则 $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)(\mathrm{e}^{p\eta(x,y)}-I)\leqq 0$。

证明 由 $\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j$ 是在 y 点处 η 和 b_2 的 B-(p,r)-预不变凸函数及引理1可知

$$\frac{1}{r}\bar{b}_2(x,y)\left(\mathrm{e}^{r\left(\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j(x)-\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\right)}-1\right)\geqq\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)(\mathrm{e}^{p\eta(x,y)}-I)$$

因为 x 是(VP)的可行解,有 $g_j(x)\leq 0$,(λ,u,y) 是(VD)的可行解,有 $\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\geqq 0$,则 $\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j(x)-\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\leqq 0$,又由 $\bar{b}_2(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b_2(x,y,\lambda)\geq 0$ 可知,$\dfrac{1}{r}\bar{b}_2(x,y)\left(\mathrm{e}^{r\left(\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j(x)-\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\right)}-1\right)\leqq 0$,从而 $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)(\mathrm{e}^{p\eta(x,y)}-I)\leqq 0$。 证毕

定理4(弱对偶) 假设 x 和 (λ,u,y) 分别是(VP)和(VD)的可行解,$\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_if_i$ 在 y 点处关于 η 和 b_1 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数,$\sum\limits_{j=1}^{m}u_jg_j$ 在 y 点处 η 和 b_2 的 B-(p,r)-预不变凸函数,且 $\bar{b}_1(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b_1(x,y,\lambda)>0$,$\bar{b}_2(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b_2(x,y,\lambda)\geq 0$,则 $f(x)\nleqq f(y)$。

证明 用反证法。假设 $f(x)\leq f(y)$,即 $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_if_i(x)\leqq\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_if_i(y)$。由 $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_if_i$ 是在 y 点处关于 η 和 b_1 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数及引理1可知

$$\frac{1}{r}\bar{b}_1(x,y)\left(\mathrm{e}^{r\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_if_i(x)-\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_if_i(y)\right)}-1\right)>\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)(\mathrm{e}^{p\eta(x,y)}-I)$$

因为(λ,u,y)是(VD)的可行解,有$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)=-\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)$,所以

$$\frac{1}{r}\bar{b}_1(x,y)\left(e^{r\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)\right)}-1\right)>-\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)\left(e^{p\eta(x,y)}-I\right)$$

又由$\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$是在y点处η和b_2的B-(p,r)-预不变凸函数及引理2可得$\frac{1}{r}\bar{b}_1(x,y)\left(e^{r\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)\right)}-1\right)>0$。又由$\bar{b}_1(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b_1(x,y,\lambda)>0$可得,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)>\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)$与假设矛盾,则$f(x)\nleqq f(y)$。　证毕

定理5(弱对偶)　假设x和(λ,u,y)分别是(VP)和(VD)的可行解,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$在$y$点处关于$\eta$和$b$的严格$B$-$(p,r)$-预不变凸函数,且$\bar{b}(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)>0$,则$f(x)\nleqq f(y)$。

定理5的证明方法类似于定理4。

在讨论强对偶定理时,还将用到下面的引理3。

引理3[13]　假设x^*是(VP)的有效解,则$\exists\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_k^*)\geqq0,u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_m^*)\geqq0$,使得下列结论成立:①$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^*\nabla f_i(x^*)+\sum_{j=1}^{m}u_j^*\nabla g_j(x^*)=0$;②$\sum_{j=1}^{m}u_j^*g_j(x^*)=0$。

定理6(强对偶)　假设x^*是(VP)的有效解,(λ,u,y)是(VD)的可行解,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i$在$y$点处关于$\eta$和$b_1$的严格$B$-$(p,r)$-预不变凸函数,$\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$在$y$点处$\eta$和$b_2$的$B$-$(p,r)$-预不变凸函数,且

$$\bar{b}_1(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b_1(x,y,\lambda)>0,\bar{b}_2(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b_2(x,y,\lambda)\geq0$$

则$\exists\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_k^*)\geqq0,u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_m^*)\geqq0$,使$(\lambda^*,u^*,x^*)$是(VD)的有效解。

证明　因为x^*是(VP)的有效解,则根据引理3可知,$\exists\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_k^*)\geqq0,u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_m^*)\geqq0$,使得结论①、②成立,从而可知$(\lambda^*,u^*,x^*)$是(VD)的可行解。又由定理4可知,对(VD)的可行解(λ,u,y)有$f(x^*)\nleqq f(y)$,所以由定义5可知,(λ^*,u^*,x^*)是(VD)的有效解。　证毕

定理7(强对偶)　假设x^*是(VP)的有效解,(λ,u,y)是(VD)的可行解,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$在$y$点处关于$\eta$和$b$的严格$B$-$(p,r)$-预不变凸函数,且$\bar{b}(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)>0$,则$\exists\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_k^*)\geqq0,u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_m^*)\geqq0$,使$(\lambda^*,u^*,x^*)$是(VD)的有效解。

定理7的证明方法类似于定理6。

定理8(严格逆对偶)　假设x和(λ,u,y)分别是(VP)和(VD)的可行解,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$在$y$点处关于$\eta$和$b$的严格$B$-$(p,r)$-预不变凸函数,且$\lambda f(x)\leqq\lambda f(y)+ug(y),\bar{b}(x,y)=\lim_{\lambda\to0^+}b(x,y,\lambda)>0$,则$y$是(VP)的有效解,且有$x=y$。

证明　先用反证法证明$x=y$。假设$x\neq y$,由$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j$在$y$点处关于$\eta$和$b$的严格$B$-$(p,r)$-预不变凸函数及引理1可知

$$\frac{1}{r}\bar{b}(x,y)\left(e^{r\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)-\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)\right)}-1\right)>\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)\right)\left(e^{p\eta(x,y)}-I\right)$$

由(λ,u,y)是(VD)的可行解,有$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0$,所以$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x)>\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)$,又由$x$是(VP)的可行解,得$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)>\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(y)$。这与已知矛盾,

所以 $x=y$。

再用反证法证明 x 是(VP)的有效解。假设 x 不是(VP)的有效解,由定义5知存在(VP)的可行解 $\bar{x}$,使 $f(\bar{x})\leqq f(x)$,即有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(\bar{x})\leqq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)$。又 $\bar{x}$ 是(VP)的可行解及 $\lambda f(x)\leqq\lambda f(y)+ug(y)$ 得

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{m}u_j g_j(\bar{x})\leqq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j g_j(y) \tag{1}$$

再由 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{m}u_j g_j$ 在 y 点处关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-预不变凸函数及引理1可知对(VP)的可行解 $\bar{x}(\bar{x}\neq y)$ 有

$$\frac{1}{r}\bar{b}(\bar{x},y)\left(e^{r\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{m}u_j g_j(\bar{x})-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)-\sum_{j=1}^{m}u_j g_j(y)\right)}-1\right)>\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)\right)\left(e^{p\eta(\bar{x},y)}-I\right)$$

由 (λ,u,y) 是(VD)的可行解,有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla g_j(y)=0$,所以 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{m}u_j g_j(\bar{x})>\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{m}u_j g_j(y)$。这与(1)式矛盾。所以 x(即 y)是(VP)的有效解。 证毕

注5 本文利用 B-(p,r)-预不变凸性建立了目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题的Mond-Weir型对偶(VD),定理4~8分别给出了目标函数和约束函数在 B-(p,r)-预不变凸函数条件下的弱对偶,强对偶和严格逆对偶定理,推广了文献[8-9,13-14]中关于 B-预不变凸规划、(p,r)-不变凸规划、B-(p,r)-不变凸规划问题的相应结论。

参考文献:

[1] Bector C R,Singh C. *B*-vex functions[J]. JOTA,1991,71:237-253.

[2] Bector C R,Suneja S K,Lalitha C S. Generalized *B*-vex functions and generalized *B*-vex programming[J]. JOTA,1993,76(3):561-576.

[3] Jeyakumar V. Equivalence of a saddle points and optima,and duality for a class of non-convex problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1988,130:334-343.

[4] Kaul R N,Suneja S K,Sivastava M K. Optimality criteria and duality in multiple objective optimization involving generalized invexity[J]. JOTA,1994,80:465-482.

[5] Suneja S K,Singh C,Bector C R. Generalization of preinvex and *B*-vex functions[J]. JOTA,1993,76(3):577-587.

[6] Antczak T. (p,r)-invex sets and functions[J]. Jonmal of Mathematical Analysis and Applications,2001,263:355-379.

[7] Antczak T. On (p,r)-invexity-type nonlinear pmgramming problems[J]. J Math Anal Appl,2001,264:297-382.

[8] Antczak T. (p,r)-invexity in muliobjective programming[J]. EJOR,2004,152:72-78.

[9] Antczak T. A class of B-(p,r)-invex functions and mathematical programming[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2003,286:187-206.

[10] Antczak T. Generalized fractional minimax programming with B-(p,r)-invexity[J]. Omputers and Mathematics with Applications. 2008,56:1505-1525.

[11] Zhang Y,Zhu B,Xu Y T. A class of Lipschitz B-(p,r)-invex functions and nonsmooth programming[J]. OR Transactions,2009,13:61-71.

[12] Antczak T. Generalized B-(p,r)-invexity functions and nonlinear mathematical programming[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization. 2009,30:1-22.

[13] 孙玉华. B-(p,r)-不变凸规划问题的Mond-Weir型对偶[J]. 经济数学,2005,22(1):100-104.

[14] 赵克全,陈哲. B-预不变凸函数在多目标规划的对偶问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2008,25(2):1-3.

[15] 彭再云,雷鸣,刘亚威,等. 一类可微凸多目标分式规划的最优性条件[J]. 重庆交通大学学报:自然科学版,2009,28(1):156-158.

[16] Long X J,Peng Z Y,Zeng B. Characterization and applications of semistrictly prequasi-invex functions[J]. Optimization Letters,2009,3(3):337-345.

Operations Research and Cybernetics

The Research of Mond-weir Duality for Programming with B-(p,r)-pre-invexity Function

WAN Xuan[1], *PENG Zai-yun*[2]

(1. School of Mathematics Science, Chongqing Nornal University, Chongqing 400047;

2. School of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: B-(p,r)-pre-invex function is a new generalized convex function and it's a generalization of B-(p,r)-invex functions. In this paper, the property of the B-(p,r)-pre-invex function and its Mond-weir duality of the multi-objective programming problems are considered. First, some basic properties of the B-(p,r)-pre-invex function are introduced to show that the properties of addition, multiplication and composition to the B-(p,r)-pre-invex function are still satisfying, meanwhile, some examples are given to illustrate that the B-(p,r)-pre-invex function is a ture generalization of B-(p,r)-invex function. Second, the multi-objective programming problems of B-(p,r)-pre-invex function and the solution for its Mond-weir duality problems are emphasized here. By using the B-(p,r)-pre-invex function, the weak, strong and strict converse duality results are established for multi-objective problems (VP) which concerns about objective function and constraint function. The results extend the corresponding ones in the literature on programming problems with pre-invex function, B-pre-invex function and (p,r)-pre-invex function.

Key words: B-(p,r)-pre-invex function; multiobjective programming; Mond-Weir duality

(责任编辑　黄　颖)