2011 年 1 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jan. 2011
第 28 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 28 No. 1

运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693.2011.01.002

半严格 F-G 广义凸函数*

赵 宇,黄金莹
(佳木斯大学 理学院数学系,黑龙江 佳木斯 154007)

摘要:定义了广义凸集和 F-G 广义凸函数等概念,进而给出半严格 F-G 广义凸函数概念,并将已有文献中提出的条件 C 推广为条件 P_1、P_2,指出条件 P_1、P_2 的若干性质,得到其所蕴含的等式关系:若 F 在 K 上满足条件 P_1、P_2,则 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall u_1,u_2\in[0,1]$,$u_1\neq u_2$,$\forall x,y\in K$,有 $F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]$。并在此基础上给出半严格 F-G 广义凸函数的两个充分条件,指出在一定条件下,满足中间点半严格 F-G 广义凸性的 F-G 广义凸函数是半严格 F-G 广义凸函数。最后列举了若干满足本文结论的向量值函数 F 和数量函数 G 的具体形式,并给出半严格 F-G 广义凸函数在极小化问题中的应用。

关键词:半严格 F-G 广义凸函数;广义凸集;F-G 广义凸函数;条件 P_1;条件 P_2
中图分类号:O174.13 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2011)01-0007-06

凸性及广义凸性是不等式研究的主要内容,同时也在最优化理论方面起着重要作用。近 20 年的文献中出现了各种各样的广义凸函数,其中的一类常见的推广方式是以讨论极值问题最优性条件为目的通过将凸性条件弱化来构造广义凸函数。1981 年,Hanson[1] 和 Craven[2] 提出了不变凸、拟不变凸和伪不变凸函数等概念,并利用其条件建立了分式规划对偶理论;1985 年,Jeyakumar[3] 提出预不变凸函数的概念;1991 年,Pini[4] 定义了更广义的预不变拟凸函数。值得一提的是,1995 年 Mohan S. R. 与 Neogy S. k. [5] 提出的条件 C 所蕴含的等式关系搭建了不变凸函数类之间的关系,推导出严格、半严格预不变(拟)凸函数的若干判别准则,极大促进了不变凸函数类的性质研究;2005 年,Antczak[6] 提出 r-预不变凸函数,并研究了其在数学规划中的应用。近几年,国内的专家学者针对上述各类广义凸函数开展了特性研究,唐万梅[7-8] 研究了强预不变凸函数和强预拟不变凸函数的充要条件,刘彩平[9] 研究了半严格不变凸函数,丰富了无限维空间中的广义凸理论,黄金莹、赵宇等[10-11] 对预不变凸函数的性质及凸函数的半连续性做了进一步研究。

由于它们在一定程度上保留了凸函数的良好性质,所以各类广义凸函数之间必然有着类似的性质,在研究方法和技巧上就不可避免地出现了类比、雷同、重复的现象,且在处理具体问题时又受到具体形式的影响。本文建立半严格 F-G 广义凸函数概念,开展一般性研究,将目前相关结果加以整合、梳理和推广。

1 半严格 F-G 广义凸函数

定义 1 设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$。称 K 是关于 F 的广义凸集,若存在向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,使得 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in K$,有 $F(x,y,\lambda)\in K$。

将上述中 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 换成 $D\subseteq\mathbf{R}$,就会有:设集合 $D\subseteq\mathbf{R}$。称 D 是关于 G 的广义凸集,若存在数量函数 $G:D\times D\times[0,1]\to\mathbf{R}$,使得 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall s,t\in D$,有 $G(s,t,\lambda)\in D$。

定义 2 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,称数量函数 $f:K\to D$ 在 K 上是 F-G 广义凸函数,若 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in K$,有 $f[F(x,y,\lambda)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda]$。

定义 3 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,称数量函数 $f:K\to D$ 在 K 上是半严格 F-G 广义凸函数,若 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall x,y\in K$,且 $f(x)\neq f(y)$,有 $f[F(x,y,\lambda)]<G[f(x),f(y),\lambda]$。

特别地,在上述定义中,当特取 $D\subseteq\mathbf{R}$ 为凸集,并且 $G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t$,$\forall s,t\in D$,则称数量函

* 收稿日期:2010-05-08 修回日期:2010-07-09
资助项目:黑龙江省教育厅科技研究项目(No. 11551499)
作者简介:赵宇,女,讲师,硕士,研究方向为凸分析与凸规划。

数 $f:K\to D$ 在 K 上是半严格 F 凸函数。当特取 $G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$,$\forall s,t\in D$,则称数量函数 $f:K\to D$ 在 K 上是半严格 F 拟凸函数。

注1 文献[1-3]给出如下概念:设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$,如果存在向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in K$,有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$,则称集合 K 是关于 η 的不变凸集。

设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$,则

① 若 f 满足:$\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in K$,$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$,则称 f 是预不变凸函数;

② 若 f 满足:$\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall x,y\in K$,$f(x)\neq f(y)$,有 $f(y+\lambda\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$,则称 f 是半严格预不变凸函数。

将上述概念中 $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ 替换为 $\max\{f(x),f(y)\}$ 可得预不变拟凸函数和半严格预不变拟凸函数的概念。

由此,取 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 为关于 η 的不变凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 为凸集。若令 $F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$,$\forall x,y\in K$,$\lambda\in[0,1]$,$G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t$,$\forall s,t\in D$,则当数量函数 $f:K\to D$ 为 K 上关于 η 的半严格预不变凸函数时 f 在 K 在上是半严格 F 凸函数。若令 $F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$,$\forall x,y\in K$,$\lambda\in[0,1]$,$G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$,$\forall s,t\in D$,则当数量函数 $f:K\to D$ 为 K 上关于 η 的半严格预不变拟凸函数时 f 在 K 上是半严格 F 拟凸函数。

2 条件 P_1、P_2 及其性质

定义4 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,称 F 在 K 上满足条件 P_1、P_2,若 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$,且 $\alpha<\beta$,$\forall x,y\in K$,有 P_1:$F[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}]=F(x,y,\alpha)$;$P_2$:$F[x,F(x,y,\alpha),\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}]=F(x,y,\beta)$。设 $D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,称 G 在 D 上满足条件 P_1、P_2,若 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$,且 $\alpha<\beta$,$\forall s,t\in D$,有 P_1:$G[t,G[s,t,\beta],1-\frac{\alpha}{\beta}]=G(s,t,\alpha)$;$P_2$:$G[s,G(s,t,\alpha),\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}]=G(s,t,\beta)$。

对于条件 P_1、P_2,有如下几个性质。

定理1 若向量值函数 F 在 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上满足条件 P_1、P_2,则 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall u_1,u_2\in[0,1]$,$u_1\neq u_2$,$\forall x,y\in K$,有 $F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]$。

证明 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall u_1,u_2\in[0,1]$,$u_1\neq u_2$,$\forall x,y\in K$,分以下两种情况讨论。

① 当 $u_1<u_2$ 时,由条件 P_1、P_2 得

$$F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]\overset{P_2}{=}F[F(x,y,u_1),F[x,F(x,y,u_1),\frac{u_2-u_1}{1-u_1}],\lambda]=$$

$$F[F(x,y,u_1),F[x,F(x,y,u_1),\frac{u_2-u_1}{1-u_1}],1-\frac{\frac{u_2-u_1}{1-u_1}(1-\lambda)}{\frac{u_2-u_1}{1-u_1}}]\overset{P_1}{=}$$

$$F[x,F(x,y,u_1),\frac{u_2-u_1}{1-u_1}(1-\lambda)]=F[x,F(x,y,u_1),\frac{\lambda u_1+(1-\lambda)u_2-u_1}{1-u_1}]\overset{P_2}{=}F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$$

② 当 $u_1>u_2$ 时,由条件 P_1 得

$$F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]\overset{P_1}{=}F[F(x,y,u_1),F[y,F(x,y,u_1),1-\frac{u_2}{u_1}],\lambda]=$$

$$F[F(x,y,u_1),F[y,F(x,y,u_1),\frac{u_1-u_2}{u_1}],1-\frac{\frac{u_1-u_2}{u_1}(1-\lambda)}{\frac{u_1-u_2}{u_1}}]\overset{P_1}{=}$$

$$F\left[y,F(x,y,u_1),\frac{u_1-u_2}{u_1}(1-\lambda)\right]=F\left[y,F(x,y,u_1),1-\frac{\lambda u_1+(1-\lambda)u_2}{u_1}\right]\overset{P_1}{=}F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)$$

由情况 ①、② 知,定理成立。 **证毕**

注 2 **由定理 1 证明过程中的 ② 可以得到下面的推论。**

推论 1 **若向量值函数** F **在** $K\subseteq \mathbf{R}^n$ **上满足条件** P_1**,则对** $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall u_1,u_2\in[0,1]$,$u_1>u_2$,$\forall x,y\in K$,**有** $F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]$。

定理 1 中向量值函数 F **换成数量函数** G **在关于** G **的广义凸集** $D\subseteq\mathbf{R}$ **中考虑也同样成立。**

定理 2 **若向量值函数** F **在** $K\subseteq\mathbf{R}^n$ **上满足条件** P_1**,且对** $\forall x,y\in K$**,有** $F(x,y,0)=y$**,则对** $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$**,且** $\alpha<\beta$,$\forall x,y\in K$**,有** P_1':$F\left[F(x,y,\beta),y,\frac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\alpha)$。

证明 F **在** K **上满足条件** P_1**,即** $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$ **且** $\alpha<\beta$,$\forall x,y\in K$**,有** P_1:$F\left[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\alpha)$。**令** $\alpha=0$**,有** $F[y,F(x,y,\beta),1]=F(x,y,0)=y$**,若** $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$**,且** $\alpha=0<\beta$**,则可由** $F(x,y,0)=y$ **知,**$F\left[F(x,y,\beta),y,\frac{0}{\beta}\right]=F[F(x,y,\beta),y,0]=y=F(x,y,0)$。**若** $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$**,且** $0<\alpha<\beta$**,则**

$$F\left[F(x,y,\beta),y,\frac{\alpha}{\beta}\right]=F\left\{F(x,y,\beta),F[y,F(x,y,\beta),1],\frac{\alpha}{\beta}\right\}=$$

$$F\left\{F(x,y,\beta),F[y,F(x,y,\beta),1],1-\frac{1-\frac{\alpha}{\beta}}{1}\right\}=F\left[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\alpha)$$

则定理得证。 **证毕**

定理 3 **若** $K\subseteq\mathbf{R}^n$ **是关于** F **的广义凸集,且** $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in K$**,有** $F(x,y,\lambda)=F(y,x,1-\lambda)$**,则条件** P_1 **等价于条件** P_2。

证明 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$**,且** $\alpha<\beta$,$\forall x,y\in K$**,有** $F\left[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=F\left[y,F(y,x,1-\beta),\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right]=$

$$F\left[y,F(y,x,1-\beta)\right],\frac{1-\alpha-(1-\beta)}{1-(1-\beta)}\overset{P_2}{=}F(y,x,1-\alpha)=F(x,y,a)$$

则条件 P_2 **蕴含条件** P_1。**且由** $F\left[x,F(x,y,\alpha),\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F\left[x,F(x,y,\alpha),1-\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right]=$

$$F\left[x,F(y,x,1-\alpha),1-\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right]\overset{P_1}{=}F(y,x,1-\beta)=F(x,y,\beta)$$

知条件 P_1 **蕴含条件** P_2。 **证毕**

定理 4 **设** $K\subseteq\mathbf{R}^n$ **为关于** η **的不变凸集,若** η **在** K **上满足条件** C**,则** $F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$ **在** K **上满足条件** P_1、P_2。

证明 **因** η **在** K **上满足条件** C**,即** $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in K$**,有**

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$$

从而,$\forall\alpha,\beta\in[0,1]$**,且** $\alpha<\beta$,$\forall x,y\in K$**,有**

$$F\left[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\beta)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\eta(y,F(x,y,\beta))=$$

$$y+\beta\eta(x,y)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\eta(y,y+\beta\eta(x,y))=y+\beta\eta(x,y)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)(-\beta)\eta(x,y))=$$

$$y+\left[\beta+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)(-\beta)\right]\eta(x,y)=F(x,y,\alpha)$$

$$F\left[x,F(x,y,\alpha),\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F(x,y,\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(x,F(x,y,\alpha))=y+\alpha\eta(x,y)+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(x,y+\alpha\eta(x,y))=$$

$$y+\alpha\eta(x,y)+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}(1-\alpha)\eta(x,y)=y+[\alpha+(\beta-\alpha)]\eta(x,y)=F(x,y,\beta)$$

故 F 在 K 上满足条件 P_1、P_2。 证毕

满足条件 P_1、P_2 的具体的向量值函数 F、数量函数 G 将由本文注3、注4 分别给出。

定理5 设函数 $f:K\to D$ 在 K 上是半严格 F-G 广义凸函数,F 满足条件 P_1、P_2,则对 $\forall x,y\in K,\Phi(\alpha)=f[F(x,y,\alpha)]$ 在 $[0,1]$ 上 $\forall\lambda\in(0,1),\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$,且 $\Phi(\alpha_1)\neq\Phi(\alpha_2)$,有 $\Phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)<G[\Phi(\alpha_1),\Phi(\alpha_2),\lambda]$。

证明 $\forall\lambda\in(0,1),\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1],\Phi(\alpha_1)\neq\Phi(\alpha_2)$,则由 F 满足条件 P_1、P_2 及定理1 可以推得

$$\Phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f[F(x,y,\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)]=f\{F[F(x,y,\alpha_1),F(x,y,\alpha_2),\lambda]\}<$$
$$G\{f[F(x,y,\alpha_1)],f[F(x,y,\alpha_2)],\lambda\}=G[\Phi(\alpha_1),\Phi(\alpha_2),\lambda]$$ 证毕

由定理5 可以得到如下两个推论。

推论2 设函数 $f:K\to D$ 在 K 上是半严格 F 凸函数,F 满足条件 P_1、P_2,则 $\forall x,y\in K,\Phi(\alpha)=f[F(x,y,\alpha)]$ 是 $[0,1]$ 上的半严格凸函数。

推论3 设函数 $f:K\to D$ 在 K 上是半严格 F 拟凸函数,F 满足条件 P_1、P_2,则 $\forall x,y\in K,\Phi(\alpha)=f[F(x,y,\alpha)]$ 是 $[0,1]$ 上的半严格拟凸函数。

3 半严格 F-G 广义凸函数的充分条件

定理6 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,且有如下条件:①F、G 在 K 上满足条件条件 P_1、P_2;② $\forall\lambda\in(0,1)$,$G(s,t,\lambda)$ 关于 t 在 D 上严格增加;③ 函数 $f:K\to D$ 在 K 上是 F-G 广义凸函数,且满足 $\exists\alpha\in(0,1),\forall x,y\in K$,且 $f(x)\neq f(y)$,有 $f[F(x,y,\alpha)]<G[f(x),f(y),\alpha]$,则函数 f 在 K 上是半严格 F-G 广义凸函数。

证明 假设函数 f 不是半严格 F-G 广义凸函数,即 $\exists\bar{\lambda}\in(0,1),\exists x_0,y_0\in K,f(x_0)\neq f(y_0)$,有

$$f[F(x_0,y_0,\bar{\lambda})]\geqslant G[f(x_0),f(y_0),\bar{\lambda}]$$

因为 f 在 K 上是 F-G 广义凸函数,故又有 $$f[F(x_0,y_0,\bar{\lambda})]\leqslant G[f(x_0),f(y_0),\bar{\lambda}]$$

于是 $$f[F(x_0,y_0,\bar{\lambda})]=G[f(x_0),f(y_0),\bar{\lambda}] \tag{1}$$

令 $w_0=F(x_0,y_0,\alpha),\alpha\neq\bar{\lambda}$,则分以下两种情况。

i) 若 $\alpha>\bar{\lambda}$,取 $t_0=\dfrac{\alpha-\bar{\lambda}}{\alpha}$,由条件 ① ~ ③ 知 $F(y_0,w_0,t_0)=F[y_0,F(x_0,y_0,\alpha),1-\dfrac{\bar{\lambda}}{\alpha}]=F(x_0,y_0,\bar{\lambda})$

$$f[F(x_0,y_0,\bar{\lambda})]=f[F(y_0,w_0,t_0)]\leqslant G[f(y_0),f(w_0),t_0]=G[f(y_0),f[F(x_0,y_0,\alpha)],t_0]<$$
$$G[f(y_0),G[f(x_0),f(y_0),\alpha],1-\frac{\bar{\lambda}}{\alpha}]=G[f(x_0),f(y_0),\bar{\lambda}]$$

这与(1)式矛盾。

ii) 若 $\alpha<\bar{\lambda}$,取 $t_0=\dfrac{\bar{\lambda}-\alpha}{1-\alpha}$,由条件 ① ~ ③ 知

$$F(x_0,w_0,t_0)=F[x_0,F(x_0,y_0,\alpha),\frac{\bar{\lambda}-\alpha}{1-\alpha}]=F(x_0,y_0,\bar{\lambda})$$
$$f[F(x_0,y_0,\bar{\lambda})]=f[F(x_0,w_0,t_0)]\leqslant G[f(x_0),f(w_0),t_0]=G[f(x_0),f[F(x_0,y_0,\alpha)],t_0]<$$
$$G[f(x_0),G[f(x_0,f(y_0),\alpha],\frac{\bar{\lambda}-\alpha}{1-\alpha}]=G[f(x_0,f(y_0),\bar{\lambda}]$$

这与(1)式矛盾。

综上,函数 f 在 K 上是半严格 F-G 广义凸函数。 证毕

定理7 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,且满足条件:①F 在 K 上满足条件 P_1、P_2,且对 $\forall x,y\in K$,有 $F(x,y,0)=y$,G 在 D 上满足条件 P_1;②$G(s,t,\lambda)$ 关于 s,t 在 D 上非减,且对 $\forall\lambda\in(0,1),\forall s,t\in D,s\neq t$,有 $\min\{s,t\}<G(s,t,\lambda)\leqslant\max\{s,t\}$;③函数 $f:K\to D$ 在 K 上是 F-G 广义凸函数,且满足 $\exists\alpha\in(0,1),\forall x,y\in K$,且 $f(x)\neq f(y)$,有 $f[F(x,y,\alpha)]<G[f(x),f(y),\alpha]$,则函数 f 在 K 上是半严格 F-G 广义凸函数。

证明 假设存在 $x,y\in K$ 和 $\lambda\in(0,1)$,使得 $f(x)\neq f(y)$,并且 $f[F(x,y,\lambda)]\geqslant G[f(x),f(y),\lambda]$ 不失一般性,假设 $f(x)<f(y)$,令 $z=F(x,y,\lambda)$,由条件 ② 得

$$f(z)\geqslant G[f(x),f(y),\lambda]>\min\{f(x),f(y)\}=f(x)$$

再由条件 ③ 知,函数 f 在 K 上是 F-G 广义凸函数得 $f(z)\leqslant G[f(x),f(y),\lambda]$,从而

$$f(x)<f(z)=G[f(x),f(y),\lambda] \tag{2}$$

令 $\beta_1=\lambda+\alpha^n(1-\lambda),\beta_2=\lambda-\dfrac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}(1-\lambda),\bar{x}=F(x,y,\beta_1),\bar{y}=F(x,y,\beta_2)$

显然,当 n 充分大,$\beta_1<1,\beta_2>0$,且 $\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2=\lambda,0<\beta_2<\lambda<\beta_1<1$,由条件 ① 知,$F$ 满足条件 P_2,于是 $F(x,z,\alpha^n)=F[x,F(x,y,\lambda),\alpha^n]=$

$$F[x,F(x,y,\lambda),\frac{\lambda+\alpha^n(1-\lambda)-\lambda}{1-\lambda}]=F[x,y,\lambda+\alpha^n(1-\lambda)]=F(x,y,\beta_1)=\bar{x}$$

用数学归纳法证明 $\forall n\in\mathbf{N},f[F(x,z,\alpha^n)]<f(z)$。当 $n=1$ 时,由条件 ②、③ 及 $f(x)<f(z)$ 得

$$f[F(x,z,\alpha)]<G[f(x),f(z),\alpha]\leqslant\max\{f(x),f(z)\}=f(z)$$

假设当 $n=k$ 时,有 $f[F(x,z,\alpha^k)]<f(z)$ 成立。则当 $n=k+1$ 时,由条件 ① 及定理 2 得

$$F(x,z,\alpha^{k+1})=F[F(x,z,\alpha^k),z,\frac{\alpha^{k+1}}{\alpha^k}]=F[F(x,z,\alpha^k),z,\alpha]$$

于是
$$f[F(x,z,\alpha^{k+1})]=f\{F[F(x,z,\alpha^k),z,\alpha]\}<G\{f[F(x,z,\alpha^k)],f(z),\alpha\}\leqslant$$
$$\max\{f[F(x,z,\alpha^k)],f(z)\}=f(z)$$

故 $\forall n\in\mathbf{N},f[F(x,z,\alpha^n)]<f(z)$。即

$$f(\bar{x})<f(z) \tag{3}$$

注意到 $0<\beta_2<\beta_1<1$,再由 F 在 K 上满足条件 P_1,G 在 D 上满足条件 P_1 及推论 1 得

$$F(\bar{x},\bar{y},\alpha)=F[F(x,y,\beta_1),F(x,y,\beta_2),\alpha]=F[x,y,\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2]=F(x,y,\lambda)=z$$
$$G\{G[f(x),f(y),\beta_1],G[f(x),f(y),\beta_2],\alpha\}=G[f(x),f(y),\lambda]$$

考虑下面两种情况。ⅰ)如果 $f(\bar{x})=f(\bar{y})$,则

$$f(z)=f[F(\bar{x},\bar{y},\alpha)]\leqslant G[f(\bar{x}),f(\bar{y}),\alpha]\leqslant\max\{f(\bar{x}),f(\bar{y})\}=f(\bar{x})$$

这与(3)式矛盾。

ⅱ)如果 $f(\bar{x})\neq f(\bar{y})$,则由条件 ③ 得 $f(z)=f[F(\bar{x},\bar{y},\alpha)]<G[f(\bar{x}),f(\bar{y}),\alpha]$

$$f(\bar{x})=f[F(x,y,\beta_1)]\leqslant G[f(x),f(y),\beta_1],f(\bar{y})=f[F(x,y,\beta_2)]\leqslant G[f(x),f(y),\beta_2]$$

由条件 ② 知,$G(s,t,\lambda)$ 关于 s,t 在 D 上非减,于是

$$f(z)<G[f(\bar{x}),f(\bar{y}),\alpha]\leqslant G\{G[f(x),f(y),\beta_1],G[f(x),f(y),\beta_2],\alpha\}=G[f(x),f(y),\lambda]$$

这与(2)式矛盾。

综上所述,定理得证。 证毕

注 3 满足定理 7 条件的函数 G 包括:①$G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\},\forall s,t\in\mathbf{R}$;②$G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t$,$\forall s,t\in\mathbf{R}$;③$G(s,t,\lambda)=s^\lambda t^{1-\lambda},\forall s,t\in(0,+\infty)$;④$G(s,t,\lambda)=[\lambda s^r+(1-\lambda)t^r]^{\frac{1}{r}},\forall s,t\in(0,+\infty)$,$r>0$。

注 4 满足定理 7 条件的函数 F 包括:①$F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y),\forall x,y\in\mathbf{R}^n,\lambda\in[0,1]$,其中 η 在 K 上满足条件 C;②$F(x,y,\lambda)=x^\lambda y^{1-\lambda},\forall x,y\in\mathbf{R}_{++}^n,\lambda\in[0,1]$ 其中 $\mathbf{R}_{++}^n$ 是分量为正的 n 维实数组全体,对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}_{++}^n,y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}_{++}^n$,记 $x^r=(x_1^r,x_2^r,\cdots,x_n^r),xy=(x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n)$;③$F(x,y,\lambda)=[\lambda x^r+(1-\lambda)y^r]^{\frac{1}{r}},\forall x,y\in\mathbf{R}_{++}^n,\lambda\in[0,1]$;④$F(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y,\forall x,y\in\mathbf{R}^n,\lambda\in[0,1]$。

4 半严格 F-G 广义凸函数在极小化问题中的应用

考虑极小化问题(P) $\min\limits_{x\in K}f(x)$。

定理 8 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,$D \subseteq \mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,函数 $f:K \to D$ 在 K 上是半严格 F-G 广义凸函数,且对 $\forall s,t \in D, s \neq t$,有 $G(s,t,\lambda) \leqslant \max\{s,t\}$,且 $\lim\limits_{\lambda \to 0} F(x,y,\lambda) = y$,若 $\bar{x}$ 是问题(P)的局部最优解,则 $\bar{x}$ 也是问题(P)的全局最优解。

证明 若 $\bar{x}$ 是问题(P)的局部最优解,则存在 $\bar{x}$ 的邻域 $U \subset \mathbf{R}^n$,满足

$$f(\bar{x}) \leqslant f(x), \forall x \in K \cap U \tag{4}$$

假设 $\bar{x}$ 不是问题(P)的全局最优解,则存在 $x^* \in K$,使得 $f(x^*) < f(\bar{x})$。

因函数 $f:K \to D$ 在 K 上是半严格 F-G 广义凸函数,且对 $\forall s,t \in D, s \neq t$,有 $G(s,t,\lambda) \leqslant \max\{s,t\}$,故

$$\forall \lambda \in (0,1), f[F(x^*,\bar{x},\lambda)] < G[f(x^*), f(\bar{x}), \lambda] \leqslant \max\{f(x^*), f(\bar{x})\} = f(\bar{x})$$

即

$$\forall \lambda \in (0,1), f[F(x^*,\bar{x},\lambda)] < f(\bar{x}) \tag{5}$$

因 $\lim\limits_{\lambda \to 0} F(x^*,\bar{x},\lambda) = \bar{x}$,所以存在 $\delta, 0 < \delta < 1$,当时 $\lambda \in (0,\delta) \subset (0,1)$ 时,有 $F(x^*,\bar{x},\lambda) \in K \cap U$。

一方面,由(4)式知,$f(\bar{x}) \leqslant f[F(x^*,\bar{x},\lambda)], \forall \lambda \in (0,\delta)$。另一方面,由(5)式知,$f[F(x^*,\bar{x},\lambda)] < f(\bar{x}), \forall \lambda \in (0,\delta)$,矛盾。 证毕

参考文献:

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tuker conditions [J]. J Math Anal Appl, 1981, 80(2): 544-550.

[2] Craven B D. Invex functions and constrained local minima [J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1981, 24: 357-366.

[3] Jeyakumar V. Strong and weak invexity in Mathematical programming[J]. Methods Oper Res, 1985, 55: 109-125.

[4] Pini R. Invexity and generalized convexity [J]. Optimization, 1991, 22: 513-525.

[5] Mohan S R, Neogy S K. On invex set and preinvex functions [J]. J Math Anal Appl, 1995, 189: 901-908.

[6] Antczak T. r-pre-invexity and r-invexity in mathematical programming[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005(50): 551-556.

[7] Tang Wanmei, Yang Xinmin. The sufficiency and necessity condtions of strongly preinvex functions[J]. OR Transactions, 2006, 10(3): 50-58.

[8] Tang Wanmei, Liu Qian, Yang Xinmin. The sufficiency and necessity condtions of strongly prequasi-invex functions [J]. OR Transactions, 2007, 11(3): 21-30.

[9] 刘彩平. 半严格不变凸函数[J]. 运筹学学报, 2007, 11(4): 85-92.

[10] 黄金莹, 赵宇. 预不变凸函数的若干性质[J]. 哈尔滨师范大学学报:自然科学版, 2009, 25(3): 36-39.

[11] 黄金莹, 赵宇. 凸函数与半连续函数的关系[J]. 数字的实践与认识, 2010, 40(13): 153-159.

Operations Research and Cybernetics

Semi-strictly *F-G* Generalized Convex Functions

ZHAO Yu, HUANG Jin-ying

(Dept. of Mathematics, Jiamusi University, Jiamusi Heilongjiang 154007, China)

Abstract: This paper defines generalized convex sets and generalized convex functions, furthermore gives the definition of Semi-strictly *F-G* generalized convex functions. It generalizes the conditions C of reference[5] to conditions P_1, P_2, gives their properities and obtains the equal relation between conditions P_1 and P_2. The relation is supposed F to satisfy conditions P_1 and P_2 over K, then for any $\lambda \in (0,1)$ and for any $u_1, u_2 \in [0,1]$, $u_1 \neq u_2$, then for all $x, y \in K$, we have $F(x,y,\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) = F[F(x,y,u_1), F(x,y,u_2), \lambda]$. Based on this, comparing to reference[9] and [10], the author gives two sufficient conditions of semi-strictly *F-G* generalized convex functions and gives that under certain conditions, *F-G* generalized convex functions is semi-strictly *F-G* generalized convex functions when *F-G* generalized convex functions satisfy intermediate-point semi-strictly *F-G* generalized convexity. At last, this paper enumerates several vector valued functions F and numerical functions G and the applications of semi-strictly *F-G* generalized convex functions in minimization problems.

Key words: semi-strictly *F-G* generalized convex functions; generalized convex sets; *F-G* generalized convex functions; condition P_1; condition P_2

(责任编辑 黄 颖)