运筹学与控制论

DOI :CNKI :50-1165/N. 20110516. 1013. 173

具有学习效应的间歇批生产的单机排序问题*

杨明明，张淑娟，韩翔凌
(曲阜师范大学 管理学院，山东 日照 276826)

摘要 :本文研究了目标函数为总完工时间,具有 Dejong 学习效应和遗忘效应的间歇批生产的单机排序问题。考虑了批与批之间没有学习效应的传递、有部分学习效应的传递和有总的学习效应传递 3 种模型。首先,在批与批之间没有学习效应传递的模型中,给出了复杂性为 $O(n\log n)$ 的最优算法。其次,在批与批之间有部分学习效应传递的情形下,对批在机器上的加工次序问题,通过引入 0-1 变量,把每一批看作一个工件,将其转化为指派问题。并进一步给出了复杂性为 $O(n\log n + m^3)$ 的多项式时间算法。最后,在批与批之间有总的学习效应传递的情形下,证明了每一批中的工件按 SPT 序排列可使每一批的完工时间达到最小,并对所有批中的工件个数都相等这一特殊情形,给出了复杂性为 $O(n\log n + m^3)$ 的多项式时间算法。

关键词 :排序 ;学习效应 ;单机排序 ;间歇批生产
中图分类号 :O223 文献标识码 :A 文章编号 :1672-6693(2011)03-0004-06

在经典排序问题中,工件的加工时间通常被假设为一个常数,即工件的加工时间在整个生产过程中保持不变。然而在现实生活中,由于员工不断地重复加工相同或类似的工件,使得他们能从中学习到如何更有效地完成工作,提高了生产效率。因此,后续加工的工件的加工时间比前面加工的工件的加工时间要少,这就是‘学习效应”。

唐国春等[1]将现代排序问题分为可控排序、成组分批排序、在线排序、同时加工排序、准时排序和窗时排序、机器不同时开工排序、资源受限排序、随机排序、模糊排序以及多目标排序 10 个分支。随着排序的进一步发展,近几年具有学习效应的排序问题受到国内外学者的广泛关注。Biskup[2]首先将学习效应引入到排序领域,他提出了一个工件的加工时间与位置有关的学习效应模型 :$p_{jr} = p_j r^a$, $j, r = 1, 2, \cdots, n$,其中 $a \leqslant 0$ 为一常数,并证明了当目标函数为极小化共同工期偏差和极小化总完工时间的具有学习效应的单机排序问题是多项式可解的。Mosheiov[3-4]对具有 Biskup[2]提出的学习效应的单机排序问题以及平行机排序问题进行了深入探讨。王吉波,王明征等[5]进一步推广了 Biskup[2]所提出的学习效应模型,提出 Dejong 学习效应模型,并对目标函数分别为最大完工时间和总完工时间的具有 Dejong 学习效应的单机排序进行了探讨,指出 SPT 序是最优排序。Yang 和 Kuo[6]针对 Biskup[2]提出的学习效应模型,研究了具有学习效应和遗忘效应的间歇批生产的单机排序问题,对目标函数为极小化最大完工时间的问题给出了多项式时间算法。Kuo 和 Yang[7-9]提出了一类与时间有关的学习效应模型,并对具有这种学习效应的排序问题进行研究,给出了相应的多项式时间算法。Biskup[10]比较系统地总结了近些年来国内外专家学者对具有学习效应的排序问题的研究成果。Wang 等[11-13]对带学习效应的排序问题又进行了深入探讨,将安装时间、恶化效应等引入到具有学习效应的排序问题中,给出了最优算法。

本文在 Yang 和 Kuo[6]的基础上,将学习效应模型推广到 Dejong 学习效应模型,目标函数为极小化总完工时间,指出了机器在批与批之间没有学习效应的传递和有部分学习效应传递的情形下是多项式可解的,并分别给出了复杂性为 $O(n \log n)$ 和 $O(n \log n + m^3)$ 多项式时间算法。针对机器在批与批之间有总的学习效应传递的一种特殊情形给出了多项式时间算法。

* 收稿日期 :2010-09-30 修回日期 :2011-01-12 网络出版时间 :2011-05-16 10:13:00
资助项目 :国家自然科学基金(No. 10671108) ;山东省自然科学基金(No. Y2005A04)
作者简介 :杨明明,女,硕士研究生,研究方向为组合优化。

1 符号与假设

本文所考虑的极小化总完工时间的具有学习效应和遗忘效应的间歇批生产的单机排序问题，将用到下列符号。m 为批的个数($m \geqslant 2$)，即共有 m 批；B_i 为第 i 批；n_i 为第 i 批中工件的个数；n 为工件总数，即共有 n 个工件($n_1+n_2+\cdots+n_m=n$)；J_{ij} 为 B_i 中第 j 个工件($j=1,2,\cdots,n_i$)；a_i 为在 B_i 中的工件的学习因子($a_i \leqslant 0$)；b_i 为 B_i 的学习因子($b_i \leqslant 0$)；p_{ij} 为 J_{ij} 的标准加工时间；p_{ij}^r 为 J_{ij} 在 B_i 中的第 r 个位置加工的实际加工时间；$p_{i[k]}$ 为在 B_i 中的第 k 个位置加工的工件 $J_{i[k]}$ 的标准加工时间；$p_{i[k]}^k$ 为在 B_i 中的第 k 个位置加工的工件 $J_{i[k]}$ 的实际加工时间；C_{ij} 为 J_{ij} 的完工时间；$C_{i[k]}$ 为安排在 B_i 中的第 k 个位置加工的工件 $J_{i[k]}$ 的完工时间；$\sum\sum C_{ij}$ 为所有工件的总完工时间。

n 个工件分成 m 批放在一台机器上加工，所有工件在 0 时刻准备就绪，当工件被安排在第一个生产批中的第一个位置上加工时，工件的加工时间即为它的标准加工时间。由于学习效应的存在，后续加工的工件的实际加工时间要比它们的标准加工时间要小。假设工件具有 Dejong 学习效应。Dejong 学习效应可以作如下描述。

假定 P_{ij}^r 表示工件 J_{ij} 被安排在 B_i 中的第 r 个位置上加工的实际加工时间，则 $p_{ij}^r=p_{ij}(M+(1-M)r^{a_i})$。其中 $a_i \leqslant 0$ 为学习因子，是一个常数；$0 \leqslant M \leqslant 1$，是一个常数。当 $M=1$ 时，就是经典排序问题；当 $M=0$ 时，就是 Biskup[2] 提出的学习效应模型。可见，Dejong 学习效应更具一般性，更符合现实生产。

然而，如果在生产线之间中断的时间较长，就会出现遗忘效应，即可能出现批与批之间没有学习效应的传递、有部分学习效应传递和有总的学习效应传递这 3 种情形。这将在下一部分对目标函数为总完工时间的情形进行探讨。

2 目标函数为总完工时间的情形

模型 1　批与批之间没有学习效应的传递

为方便描述排序问题，令 DLE 表示 the Dejong's learning effect；B 表示间歇的批加工问题；T_{no} 表示批与批之间没有学习效应的传递。则此问题用三参数表示法可表示为：$1|B,DLE,T_{\text{no}}|\sum\sum C_{ij}$。

引理 1　对于问题 $1\|\sum C_j$ 可通过 SPT 规则得到最优排序。

引理 2　对于问题 $1|DLE|\sum C_j$ 可通过标准加工时间的 SPT 规则得到最优排序。

下面给出求解问题 $1|B,DLE,T_{\text{no}}|\sum\sum C_{ij}$ 的最优算法 A。

算法 A　Step 1　对于每一批中的工件，按标准加工时间非减的次序排列，即

$$p_{i1} \leqslant p_{i2} \leqslant \cdots \leqslant p_{in_i}, i=1,2,\cdots,m$$

Step 2　记 P_i 为 B_i 按 SPT 规则加工时的完工时间，$P_i=\sum_{k=1}^{n_i} p_{i[k]}(M+(1-M)k^{a_i})$，按 P_i 非减的次序安排在机器上加工。

Step 1 中，对于 B_i 中的工件的最优排序可通过 SPT 规则得到，复杂性为 $O(n_i\log n_i)$，对于所有的批内部的工件的排序将花费 $\sum_{i=1}^{m} O(n_i\log n_i)$ 的时间。

令 $n_l=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_m\}$，由于 $\sum_{i=1}^{m} n_i=n$，$n_i \leqslant n$，因此

$$\sum_{i=1}^{m} n_i\log n_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} n_i\log n_l \leqslant (\log n_l)\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)=n\log n_l \leqslant n\log n$$

故对于所有批中的工件的排序将花费 $O(n\log n)$ 的时间。

Step2 中对于批在机器上的加工次序的问题需花费 $O(m\log m)$ 的时间。由于 $n > m$，故算法A的复杂性为 $O(n\log n)$。

定理1　算法 A 能最优地解决 $1|B,DLE,T_{\text{no}}|\sum\sum C_{ij}$。

证明　对于每一批中的工件的最优排序问题等价于 $1|DLE|\sum C_j$，由引理2可知，每一批的工件按标准加工时间的SPT序进行排列，即可得到最优排序。

把每一批看作一个工件，P_i 看作是 B_i 批的加工时间，由于批与批之间没有学习效应的传递，则问题 $1|B,DLE,T_{\text{no}}|\sum\sum C_{ij}$ 等价于 $1\|\sum C_j$，由引理1知，按 P_i 的非减序排列即可得最优排序。　证毕

模型2　批与批之间有部分学习效应的传递

假设：1）每一批中的工件都具有Dejong学习效应；2）B_i 被安排在第 r 批加工的实际加工时间为 $P_{ir} = P_i(M+(1-M)r^{b_i})$，其中 P_i 为 B_i 中的工件按SPT序加工的完工时间，$P_i = \sum_{k=1}^{n_i} p_{i[k]}(M+(1-M)k^{a_i})$，$P_i$ 不受批所在次序中的位置的影响。

令 P_{part} 表示批与批之间有部分学习效应的传递，则此问题用三参数表示法可表示成：$1|B,DLE,T_{\text{part}}|\sum\sum C_{ij}$。

记在批与批之间没有学习效应传递的情况下，每一批中的所有工件的总完工时间为 C_i，则 $C_i = \sum_{k=1}^{n_i} p_{i[k]}(M+(1-M)k^{a_i})\times(n_i-k+1)$。

则问题 $1|B,DLE,T_{\text{part}}|\sum\sum C_{ij}$ 中批的加工次序问题可转化成下面的指派问题。

$$\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\left(C_i(M+(1-M)r^{b_i})+n_i\sum_{l=1}^{r-1}P_l(M+(1-M)l^{b_i})\right)x_{ir}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ir}=1, r=1,2,\cdots,m\\ \sum_{r=1}^{m}x_{ir}=1, i=1,2,\cdots,m\\ x_{ir}=0\text{ 或 }1, i,r=1,2,\cdots,m\end{cases}\tag{1}$$

给出求解 $1|B,DLE,T_{\text{part}}|\sum\sum C_{ij}$ 问题的多项式时间的最优算法B。

算法B　Step 1　对于每一批中的工件，按标准加工时间非减的次序排列，即

$$p_{i1}\leqslant p_{i2}\leqslant\cdots\leqslant p_{in_i}, i=1,2,\cdots,m$$

Step 2　按指派问题(1)式来安排批的加工次序。

Step1 的时间复杂性为 $O(n\log n)$，Step2 中指派问题的最优算法的时间复杂性为 $O(m^3)$，则算法B的时间复杂性为 $O(n\log n+m^3)$。

定理2　算法B能最优地解决问题 $1|B,DLE,T_{\text{part}}|\sum\sum C_{ij}$。

推论1　如果所有批的学习因子都相等，即 $b_i = b(i=1,2,\cdots,m)$，则算法A能最优地解决 $1|B,DLE,T_{\text{part}}|\sum\sum C_{ij}$。

证明　对于每一批中的工件的最优排序问题，由引理2知，SPT序是最优排序；对于批的加工次序问题，由于 $b_i = b$，$P_{ir} = P_i(M+(1-M)r^b)$，将每一批看作一个工件，P_i 看作是 B_i 的加工时间，则

$$1|B,DLE,T_{\text{part}}|\sum\sum C_{ij}\Leftrightarrow 1|DLE|\sum C_j。$$

由引理2知，按 P_i 非减的次序安排在机器上加工能得到最优排序。　证毕

模型3　批与批之间有总的学习效应的传递

假设：1）B_i 被安排在第 i 批进行加工；

2）J_{ij} 在 B_i 中第 r 个位置上的实际加工时间为 $p_{ij}^r = p_{ij}\left(M + (1-M)\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right)$。

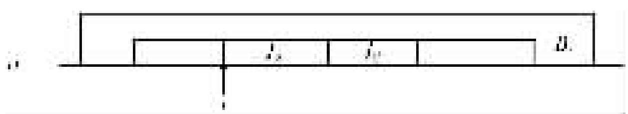
令 T_{total} 表示批与批之间有总的有学习效应的传递，则此问题可用三参数表示法表示成：$1 \mid B, DLE, T_{\text{total}} \mid \sum\sum C_{ij}$。

定理 3　对于问题 $1 \mid B, DLE, T_{\text{total}} \mid \sum\sum C_{ij}$ 的任一批，每一批中的工件的总完工时间的最优值可通过 SPT 规则达到。

证明　证明过程利用“相邻交换”的思想。

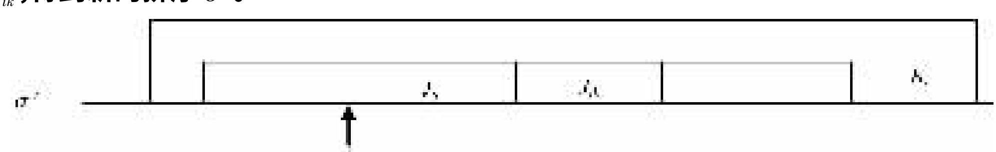
假设 σ 为一最优排序，对于 B_i，σ 中存在满足下列条件的工件 J_{ik} 和 J_{ij}：$p_{ij} \leqslant p_{ik}$，J_{ik} 在 J_{ij} 之前加工且 J_{ik} 在第 r 个位置上加工。

令 B 和 A 分别表示在 J_{ik} 和 J_{ij} 之前和之后加工的工件的总完工时间，t 表示在 B_i 中第 $r-1$ 个位置上加工的工件的完工时间。



$$\sum C_{ij}(\sigma) = B + \left(t + p_{ik}\left(M + (1-M)\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right)\right) + \left(t + p_{ik}\left(M + (1-M)\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right) + p_{ij}\left(M + (1-M)\left(r + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right)\right) + A$$

交换 J_{ij} 与 J_{ik}，得到新的排序 σ'。



$$\sum C_{ij}(\sigma') \leqslant B + \left(t + p_{ij}\left(M + (1-M)\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right)\right) + \left(t + p_{ij}\left(M + (1-M)\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right) + p_{ik}\left(M + (1-M)\left(r + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right)\right) + A$$

因为
$$\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i} > \left(r + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i} > 0, a_i \leqslant 0, p_{ij} \leqslant p_{ik}$$

所以有
$$2\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i} - \left(r + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i} > 0, p_{ik} - p_{ij} \geqslant 0$$

则
$$\sum C_{ij}(\sigma) - \sum C_{ij}(\sigma') \geqslant 2p_{ik}\left(M + (1-M)\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right) + p_{ij}\left(M + (1-M)\left(r + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right) - 2p_{ij}\left(M + (1-M)\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right) - p_{ik}\left(M + (1-M)\left(r + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right) = (p_{ik} - p_{ij})\left(M + (1-M)\left(2\left(r + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i} - \left(r + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)^{a_i}\right)\right) \geqslant 0$$

可知 σ' 也为最优排序。

对 σ 中不满足 SPT 序的所有工件重复上述调整过程，直到满足 SPT 序为止。　　证毕

推论 2　对于问题 $1 \mid B, DLE, T_{\text{total}} \mid \sum\sum C_{ij}$，存在一个最优排序，对于每一批中工件按标准加工时间的 SPT 规则进行排序。

下面对问题 $1 \mid B, DLE, T_{\text{total}} \mid \sum\sum C_{ij}$ 的一种特殊情形进行探讨。

如果所有批中的工件数目相等，即 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = \frac{n}{m} = \bar{n}$。令 $x_{ir} = \begin{cases} 1, B_i \text{ 作为第 } r \text{ 批进行加工} \\ 0, \text{否则} \end{cases}$，则

当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = \frac{n}{m} = \bar{n}$ 时,$1 \mid B, DLE, T_{\text{total}} \mid \sum \sum C_{ij}$ 中的批在机器上的加工次序问题可转化为下面的指派问题。

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{\bar{n}} p_{i[j]} \left(M + (1-M)((r-1)\bar{n}+j)^{a_i}\right)(\bar{n}-j+1) + \bar{n} \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{l=1}^{\bar{n}} p_{k[l]} \left(M + (1-M)((k-1)\bar{n}+l)^{a_i}\right) x_{ir} \right)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ir} = 1, r = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{r=1}^{m} x_{ir} = 1, i = 1,2,\cdots,m \\ x_{ir} = 0 \text{ 或 } 1, i, r = 1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{2}$$

算法 R Step1 在每一批中,工件按标准加工时间的 SPT 规则进行加工;

Step2 根据指派问题(2)式来安排批的加工次序。

算法 R 的复杂性为 $O(n\log n + m^3)$。

定理 4 当所有批中工件的个数相等,即 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = \frac{n}{m} = \bar{n}$ 时,算法 R 能最优地解决 $1 \mid B, DLE, T_{\text{total}} \mid \sum \sum C_{ij}$。

3 结论

本文研究了目标函数为总完工时间的具有 Dejong 学习效应和遗忘效应的间歇批生产的单机排序问题。对批与批间没有学习效应传递和有部分学习效应传递的情形,分别给出了时间复杂性为 $O(n\log n)$ 和 $O(n\log n + m^3)$ 的多项式时间算法,并针对批与批间有总的学习效应传递的一种特殊情形给出了复杂性为 $O(n\log n + m^3)$ 的多项式时间算法。对于其他的学习效应模型也可引入到间歇批生产的研究中,例如同时考虑与加工位置和加工时间有关的学习效应模型或者同时具有学习效应和恶化效应的排序问题,都是值得继续深入探讨的。

参考文献:

[1] 唐国春,张峰,罗守成,等. 现代排序论[M]. 上海:上海科学出版社,2003.

[2] Biskup D. Single-machine scheduling with learning considerations[J]. European Journal of Operational Research, 1999,115:173-178.

[3] Mosheiov G. Scheduling problems with a learning effect [J]. European Journal of Operational Research,2001,132: 687-693.

[4] Mosheiov G. Parallel machine scheduling with learning effect[J]. Journal of the Operational Research Society. 2001,52:1-5.

[5] 王吉波,王明征. 具有一般学习效应的单机排序问题[J]. 数学研究与评论,2005,25(04):642-646.

[6] Yang D L,Kuo W H. A Single-machine Scheduling problem with learning effects in intermittent batch production [J]. Computer and Industrial Engineering,2009(57):762-765.

[7] Kuo W H,Yang D L. Minimizing the makespan in a single-machine scheduling problem with a time-based learning effect[J]. Information Processing Letters,2006,97:64-67.

[8] Kuo W H,Yang D L. Single-machine scheduling problems with the time-dependent learning effect [J]. Computers and mathematics,2007,53:1733-1739.

[9] Kuo W H,Yang D L. Minimizing the total completion time in a single-machine scheduling problem with a time-dependent learning effect [J]. European Journal of Operational Research,2006,174:1184-1190.

[10] Biskup D. A state-of-the-art review on scheduling with learning effects[J]. European Journal of Operational Research,2008,188:315-329.

[11] Wang J B. Single machine scheduling with a time-dependent learning effect and deteriorating jobs[J]. Journal of the Operational Research Society,2009,60:583-586.

[12] Wang J B,Wang D,Wang L Y,et al. Single machine scheduling with exponential time-dependent learning effect and past-sequence-dependent setup times[J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,57:9-16.

[13] Wang J B. Single-machine scheduling with a sum-of-actual-processing-time-based learning effect[J]. Journal of the Operational Research Society,2010,61:172-177.

Operations Research and Cybernetics

Single-machine Scheduling Problems with Learning Effects in Intermittent Batch Production

YANG Ming-ming, *ZHANG Shu-juan*, *HAN Xiang-ling*

(College of Operations Research and Management Sciences, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China)

Abstract: In this paper, we study single-machine scheduling problems with Dejong's learning and forgetting effects in intermittent batch production. We consider the models of no transmission, partial transmission and total transmission of the Dejong's learning effects from batch to batch. The objective of scheduling problems is to minimize the total completion time. Firstly, in the model of no transmission from batch to batch, we provide the polynomial-time optimal algorithm, the complexity is $O(n\log n)$. In addition, in the model of partial transmission from batch to batch, for the problem of batch sequence on the machine, we introduce 0-1 variable, and the problem can be formulated as an assignment problem. As we all know, an assignment problem exists in the polynomial algorithm, and the complexity of the polynomial algorithm is $O(m^3)$. Further, we give the polynomial-time optimal algorithm, the complexity is $O(n\log n+m^3)$. Finally, we show that SPT-sequence is the optimal sequence for the jobs within each batch, and present the polynomial time algorithm for the special case that the job numbers of all batches are equal in the problem with the total transmission mod-nomial time algorithm for the special case that the job numbers of all batches are equal in the problem with the total transmission models, and the complexity of the algorithm is $O(n\log n+m^3)$.

Key words: scheduling; learning effect; single-machine; intermittent batch production

(责任编辑　黄　颖)