2011 年 7 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jul. 2011
第 28 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 28 No. 4

运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20110707.1744.001

F-G 广义凸函数与 F 拟凸函数*

黄金莹, 赵 宇, 方秀男
(佳木斯大学 理学院数学系, 黑龙江 佳木斯 154007)

摘要:给出 F-G 广义凸函数和 F 拟凸函数等概念及特例,利用条件 P_1,P_2,研究了 F-G 广义凸函数的若干性质,给出了由 F-G 广义凸函数构造的函数 $\Phi(\lambda)=f[F(x,y,\lambda)]$ 在 $[0,1]$ 上是(拟)凸函数和水平集 $S_\eta(f)=\{x \mid x\in K, f(x)\leqslant\eta\}$ 是关于 F 的广义凸集等结论,并指出 f 在 K 上是 F-G 广义凸函数的充分必要条件是 f 在 K 上既是 F-G 近似广义凸函数也是 F 拟凸函数,最后给出了半严格 F 拟凸函数在极小化问题中的应用,指出当 $\lim\limits_{\lambda\to 0}F(x,y,\lambda)=y$ 时,半严格 F 拟凸函数的局部最优解是全局最优解。

关键词:F-G 广义凸函数;F 拟凸函数;条件 P_1;条件 P_2;半严格 F 拟凸函数
中图分类号:O174.13 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2011)04-0001-05

我国著名学者匡继昌教授在他所著《常用不等式》(第 3 版)中,针对不等式研究提出了 152 个未解决的问题,其中第 79 个问题原文是:"在第 7 章中关于函数凸性的几十个不同概念中,哪些是最核心的概念?这些概念之间有什么联系?"[1]。通过对一些常见的应用于不等式研究和优化理论研究这两个领域的具体广义凸函数的分析归纳[2-7],发现其定义中共有的形式结构使得它们具有一类共同的特征性质,因此本文在文献[2-5]的研究基础上,把这样的形式结构进行抽象,提出 F-G 广义凸函数和 F 拟凸函数的公理化概念,研究其性质,希望能对匡继昌教授所提出的问题有所启发。

1 概念与引理

定义 1 称集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,若存在向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,使得 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in K$,有 $F(x,y,\lambda)\in K$。

同样可以定义 $D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集的概念。

定义 2 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,称 F 在 K 上满足条件 P_1、P_2,若 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$,且 $\alpha<\beta$,$\forall x,y\in K$,有

$$P_1:F\left[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\alpha);\quad P_2:F\left[x,F(x,y,\alpha),\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F(x,y,\beta)$$

同样可以定义,当 $D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集时,G 在 D 上满足条件 P_1、P_2 的概念。

引理 1 若向量值函数 F 在 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上满足条件 P_1、P_2,则 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall u_1,u_2\in[0,1]$,$u_1\neq u_2$,$\forall x,y\in K$,有 $F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]$。

定义 3 设 $D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,称 $G(s,t,\lambda)$ 关于 s,t 在 D 上非减,若

$$\forall\lambda\in[0,1],\ \forall s_1,s_2,t_1,t_2\in D,\text{且 } s_1\leqslant s_2,t_1\leqslant t_2,\text{有 } G(s_1,t_1,\lambda)\leqslant G(s_2,t_2,\lambda)$$

以上概念与引理来自文献[2-3],下面给出 F-G 广义凸函数的公理化概念。

定义 4 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,实值函数 $G:D\times D\times[0,1]\to\mathbf{R}$,实值函数 $f:K\to D$。称 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数,如果满足下列 4 个条件。

* 收稿日期:2011-03-21 网络出版时间:2011-07-07 17:44:00
资助项目:黑龙江省教育厅科学技术研究项目(No. 11551499)
作者简介:黄金莹,男,副教授,硕士,研究方向为凸分析与凸规划。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110707.1744.201104.1_001.html

a) F、G 分别在 K、D 上满足条件 P_1、P_2，且关于 λ 在 $[0,1]$ 上连续；

b) $\forall \lambda \in [0,1]$，$\forall u,v \in D$ 有 $\min\{s,t\} \leqslant G(s,t,\lambda) \leqslant \max\{s,t\}$；

c) $G(s,t,\lambda)$ 关于 s,t 在 D 上非减；

d) $\forall \lambda \in [0,1]$，$\forall x,y \in K$，有 $f[F(x,y,\lambda)] \leqslant G[f(x),f(y),\lambda]$。

特别地，在上述定义中，当特取 $D \subseteq \mathbf{R}$ 为凸集，并且 $G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t$，$\forall s,t \in D$，则称数量函数 $f:K \to D$ 是 K 上的 F 凸函数。

当特取 $D \subseteq \mathbf{R}$ 为非空数集，并且 $G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$，$\forall s,t \in D$，则称数量函数 $f:K \to D$ 是 K 上的 F 拟凸函数。F-G 广义凸函数的特例见表 1。

表 1 F-G 广义凸函数的特例

序号	函数名称	$K \subseteq \mathbf{R}^n$	$D \subseteq \mathbf{R}$	$F:K \times K \times [0,1]$	$G:D \times D \times [0,1]$
1	拟凸函数[1]	K 为凸集	D 为任意非空实数集	$\lambda x+(1-\lambda)y$	$\max\{s,t\}$
2	凸函数[1]	K 为凸集	D 为凸集	$\lambda x+(1-\lambda)y$	$\lambda s+(1-\lambda)t$
3	预不变凸函数[8]	K 为不变凸集[10]，η 满足条件 C[11]	D 为凸集	$y+\lambda\eta(x,y)$	$\lambda s+(1-\lambda)t$
4	预不变拟凸函数[9]	K 为不变凸集[10]，η 满足条件 C[11]	D 为任意非空实数集	$y+\lambda\eta(x,y)$	$\max\{s,t\}$
5	几何凸函数[1]	$K \subseteq \mathbf{R}^n_{++}$ 为几何凸集	$D \subseteq \mathbf{R}_+$ 为几何凸集	$x^\lambda y^{1-\lambda}$	$s^\lambda t^{1-\lambda}$
6	对数凸函数[1]	K 为凸集	$D \subseteq \mathbf{R}_+$ 为几何凸集	$\lambda x+(1-\lambda)y$	$s^\lambda t^{1-\lambda}$
7	指数凸函数	$K \subseteq \mathbf{R}^n_{++}$ 为几何凸集	D 为凸集	$x^\lambda y^{1-\lambda}$	$\lambda s+(1-\lambda)t$
8	P 幂凸函数[1]	$K \subseteq \mathbf{R}^n_{++}$ 为 P 幂凸集	$D \subseteq \mathbf{R}_+$ 为 P 幂凸集	$[\lambda x^P+(1-\lambda)y^P]^{\frac{1}{P}}$	$[\lambda s^P+(1-\lambda)t^P]^{\frac{1}{P}}$
9	P-凸函数[1]	$K \subseteq \mathbf{R}^n_{++}$ 为 P 幂凸集	D 为凸集	$[\lambda x^P+(1-\lambda)y^P]^{\frac{1}{P}}$	$\lambda s+(1-\lambda)t$
10	q-凸函数[1]	K 为凸集	$D \subseteq \mathbf{R}_+$ 为 q 幂凸集	$\lambda x+(1-\lambda)y$	$[\lambda s^q+(1-\lambda)t^q]^{\frac{1}{q}}$

注 1 其中 P、q 为非零常数，$f^r(x)=[f(x)]^r$，对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n) \in K \subseteq \mathbf{R}^n$，规定 $x^\lambda=(x_1^\lambda,x_2^\lambda,\cdots,x_n^\lambda)$，$x^\lambda y^{1-\lambda}=(x_1^\lambda y_1^{1-\lambda},x_2^\lambda y_2^{1-\lambda},\cdots,x_n^\lambda y_n^{1-\lambda})$。

注 2 表 1 中仅给出定义的形式结构，未给出具体不等式定义，以拟凸函数为例，从此表可知，其定义应为：设 K 为凸集，D 为任意非空实数集，$f:K \to D$ 满足 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\forall x,y \in K$，有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \max\{f(x),f(y)\}$，则称 f 是 K 上的拟凸函数。

注 3 表 1 中所给出的具体函数满足定义 4 的 4 个条件，验证都是初等的，这里仅举例加以说明。例如，设 D 为任意非空实数集，$G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$，$\forall s,t \in D$，因 $\forall \alpha,\beta \in [0,1]$，且 $\alpha<\beta$，$\forall s,t \in \mathbf{R}$，有

$$G\left[t,G(s,t,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=\max\{t,G(s,t,\beta)\}=\max\{t,\max\{s,t\}\}=\max\{s,t\}=G(s,t,\alpha)$$

故 G 在 $\mathbf{R}$ 上满足条件 P_1。

2 F-G 广义凸函数的特征性质

定理 1 设函数 $f:K \to D$ 是 K 上的 F-G 广义凸函数，则对 $\forall x,y \in K$，$\Phi(\lambda)=f[F(x,y,\lambda)]$ 在 $[0,1]$ 上有下式成立，$\forall \lambda \in [0,1]$，$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$，$\Phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2) \leqslant G[\Phi(\alpha_1),\Phi(\alpha_2),\lambda]$。

证明 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$，如果 $\alpha_1=\alpha_2$，则有

$$\Phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=\Phi(\alpha_1)=\Phi(\alpha_2) \leqslant G[\Phi(\alpha_1),\Phi(\alpha_2),\lambda]$$

如果 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，则由 F 满足条件 P_1、P_2 及引理 1 可以推得

$$\Phi(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f[F(x,y,\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)]=f\{F[F(x,y,\alpha_1),F(x,y,\alpha_2),\lambda]\} \leqslant$$
$$G\{f[F(x,y,\alpha_1)],f[F(x,y,\alpha_2)],\lambda\}=G[\Phi(\alpha_1),\Phi(\alpha_2),\lambda]$$

证毕

由定理 1 可以得到如下两个推论。

推论 1 设函数 $f:K \to D$ 是 F 凸函数，则 $\forall x,y \in K$，$\Phi(\lambda)=f[F(x,y,\lambda)]$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数。

推论 2 设函数 $f:K \to D$ 是 F 拟凸函数，则 $\forall x,y \in K$，$\Phi(\lambda)=f[F(x,y,\lambda)]$ 是 $[0,1]$ 上的拟凸函数。

定理 2 设函数 $f:K \to D$ 是 F-G 广义凸函数，则对 $\forall \eta \in \mathbf{R}$，水平集 $S_\eta(f)=\{x \mid x \in K, f(x) \leqslant \eta\}$ 为关于 F

的广义凸集。

证明　$\forall x,y\in S_\eta(f)$,有 $f(x)\leqslant\eta, f(y)\leqslant\eta$,则

$$\forall\lambda\in[0,1],\forall x,y\in S_\eta(f), f[F(x,y,\lambda)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda]\leqslant\max\{f(x),f(y)\}\leqslant\eta$$

即 $F(x,y,\lambda)\in S_\eta(f)$,$S_\eta(f)$ 是关于 F 的广义凸集。　**证毕**

推论3　函数 $f:K\to D$ 是 F 拟凸函数的充分必要条件是对 $\forall\eta\in\mathbf{R}$,水平集 $S_\eta(f)=\{x\mid x\in K, f(x)\leqslant\eta\}$ 为关于 F 的广义凸集。

证明　必要性。由定理2直接得到。

充分性。$\forall x,y\in K$,取 $\eta=\max\{f(x),f(y)\}$,由此得到的水平集 $S_\eta(f)=\{x\mid x\in K, f(x)\leqslant\eta\}$ 为关于 F 的广义凸集,且 $x,y\in S_\eta(f)$。于是 $\forall\lambda\in[0,1]$,$F(x,y,\lambda)\in S_\eta(f)$,即 $f[F(x,y,\lambda)]\leqslant\eta=\max\{f(x),f(y)\}$。

证毕

设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集,$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的广义凸集,对于函数 $f:K\to D$,构造集合如下:记 $A^f=\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],\forall x,y\in K, f[F(x,y,\lambda)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda]\}$,则有下述稠密性定理成立。

定理3　(稠密性定理)若 $f:K\to D$ 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数,则集合 A^f 在 $[0,1]$ 稠密。

证明　由 F-G 广义近似凸函数的定义知,故 $\exists\alpha,0,1\in A^f$,其中 $\alpha\in(0,1)$。假设 A^f 在 $[0,1]$ 非稠,则存在 $\lambda_0\in(0,1)$,对于

$$\lambda_1=\inf\{\lambda\in A^f\mid\lambda\geqslant\lambda_0\},\lambda_2=\sup\{\lambda\in A^f\mid\lambda\leqslant\lambda_0\}$$

有 $0\leqslant\lambda_2<\lambda_1\leqslant1$,根据确界定义,对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\max\{\alpha,1-\alpha\}}-1\right)(\lambda_1-\lambda_2)$,存在 $u_1,u_2\in A^f$,使得 $\lambda_1\leqslant u_1<\lambda_1+\varepsilon_0$,$\lambda_2-\varepsilon_0<u_2\leqslant\lambda_2$,于是

$$u_1-u_2<\lambda_1-\lambda_2+2\varepsilon_0=\frac{1}{\max\{\alpha,1-\alpha\}}(\lambda_1-\lambda_2)\text{ 或 }\max\{\alpha,1-\alpha\}(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2$$

令 $\bar\lambda=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2$,由 F 满足条件 P_1、P_2 及引理1知,对 $\forall x,y\in K$,有

$$f[F(x,y,\bar\lambda)]=f[F(x,y,\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)]=f\{F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\alpha]\}\leqslant$$
$$G\{f[F(x,y,u_1)],f[F(x,y,u_2)],\alpha]\}\leqslant G\{G[f(x),f(y),u_1],G[f(x),f(y),u_2],\alpha]\}=$$
$$G[f(x),f(y),\alpha u_1+(1-\alpha)u_2]=G[f(x),f(y),\bar\lambda]$$

即 $\bar\lambda\in A^f$,对 $\bar\lambda$ 作如下讨论。

1)若 $\bar\lambda\geqslant\lambda_0$,由 $\bar\lambda-u_2=\alpha(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2$ 知 $\bar\lambda<\lambda_1$,但 $\bar\lambda\geqslant\lambda_0$ 且 $\bar\lambda\in A$,与 λ_1 的取法矛盾。

2)若 $\bar\lambda\leqslant\lambda_0$,由 $u_1-\bar\lambda=(1-\alpha)(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2$ 知 $\bar\lambda>\lambda_2$,但 $\bar\lambda\leqslant\lambda_0$ 且 $\bar\lambda\in A$,这与 λ_2 的取法矛盾。

综上,假设不成立,故 A^f 在 $[0,1]$ 中稠密。　**证毕**

定理4　f 是 K 上的 F-G 广义凸函数的充分必要条件是 f 在 K 上既是 F-G 广义近似凸函数也是 F 拟凸函数。

证明　必要性。显然成立。

充分性。只需证 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall x,y\in K$,有 $f[F(x,y,\lambda)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda]$。因 $f:K\to D$ 是 K 上的 F-G 广义近似凸函数,由定理3知,集合 A^f 在 $[0,1]$ 稠密。

对 $\forall\lambda\in(0,1)$,$\forall x,y\in K$,则有

ⅰ)当 $f(x)\leqslant f(y)$ 时,因为 A^f 在 $[0,1]$ 稠密,故 $\exists\{\lambda_n\}\subset(0,1)$,$\lambda_n\to\lambda(n\to\infty)$,$\lambda_n<\lambda$ 使得

$$f[F(x,y,\lambda_n)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda_n]$$

因为对 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall s,t\in D$,有 $\min\{s,t\}\leqslant G(s,t,\lambda)$,故

$$f(x)=\min\{f(x),f(y)\}\leqslant G[f(x),f(y),\lambda_n]$$

令 $w_n=F(x,y,\lambda_n)$,$t_n=\frac{\lambda-\lambda_n}{1-\lambda_n}\in(0,1)$,因为 F 满足条件 P_2,故有

$$F[x,F(x,y,\lambda_n),t_n]=F\left[x,F(x,y,\lambda_n),\frac{\lambda-\lambda_n}{1-\lambda_n}\right]=F(x,y,\lambda)$$

因为 f 是 K 上的 F 拟凸函数,于是

$$f[F(x,y,\lambda)]=f\{F[x,F(x,y,\lambda_n),t_n]\}\leqslant\max\{f(x),f[F(x,y,\lambda_n)]\}\leqslant$$
$$\max\{f(x),G[f(x),f(y),\lambda_n]\}=G[f(x),f(y),\lambda_n]$$

即$f[F(x,y,\lambda)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda_n]$。

由 G 关于 λ 在$[0,1]$连续,在上式中令 $n\to\infty$,就有$f[F(x,y,\lambda)\leqslant G[f(x),f(y),\lambda]$。

ⅱ)当$f(x)>f(y)$时,因为 A^f 在$[0,1]$稠密,故$\exists\{\lambda_n\}\subset(0,1)$,$\lambda_n\to\lambda(n\to\infty)$,$\lambda_n>\lambda$ 使得

$$f[F(x,y,\lambda_n)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda_n]$$

因为对$\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall s,t\in D$,有$\min\{s,t\}\leqslant G(s,t,\lambda)$,故

$$f(y)=\min\{f(x),f(y)\}\leqslant G[f(x),f(y),\lambda_n]$$

令 $w_n=F(x,y,\lambda_n)$,$t_n=1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n}\in(0,1)$,因为 F 满足条件 P_1,故有

$$F[y,F(x,y,\lambda_n),t_n]=F[y,F(x,y,\lambda_n),1-\frac{\lambda}{\lambda_n}]=F(x,y,\lambda)$$

因为f是 K 上的 F 拟凸函数,于是

$$f[F(x,y,\lambda)]=f\{F[y,F(x,y,\lambda_n),t_n]\}\leqslant\max\{f(y),f[F(x,y,\lambda_n)]\}\leqslant$$
$$\max\{f(y),G[f(x),f(y),\lambda_n]\}=G[f(x),f(y),\lambda_n]$$

即$f[F(x,y,\lambda)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda_n]$。

由 G 关于 λ 在$[0,1]$连续,在上式中令 $n\to\infty$,就有

$$f[F(x,y,\lambda)]\leqslant G[f(x),f(y),\lambda]$$

证毕

注4 由定义4的条件b)及 F 拟凸函数的定义,F 拟凸函数是一类特取 D 为任意非空实数集,$G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$,$\forall s,t\in D$ 的 F-G 广义凸函数,并且在相同 F 的前提下,F-G 广义凸函数一定是 F 拟凸函数。而定理4说明,对于给定的一个 F 拟凸函数f,如果还存在某个函数 G,连同给定的 F,使之成为 F-G 广义近似凸函数,则可断言f就是此 F、G 下的 F-G 广义凸函数。

3 半严格 F 拟凸函数在极小化问题中的应用

定义5 在定义4中,若条件a)、b)、c)成立,而条件d)改为

$$\forall\lambda\in(0,1),\forall x,y\in K,\text{且 }x\neq y,\text{有 }f[F(x,y,\lambda)]<G[f(x),f(y),\lambda]$$

则称f是 K 上的严格 F-G 广义凸函数。

若条件a)、b)、c)成立,而条件d)改为

$$\forall\lambda\in(0,1),\forall x,y\in K,\text{且 }f(x)\neq f(y),\text{有 }f[F(x,y,\lambda)]<G[f(x),f(y),\lambda]$$

则称f是 K 上的半严格 F-G 广义凸函数。

在上述定义中,特取 $D\subseteq\mathbf{R}$ 为非空数集,并且 $G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$,$\forall s,t\in D$,则称数量函数 $f:K\to D$ 是 K 上的严格 F 拟凸函数和半严格 F 拟凸函数。

考虑极小化问题(P)$\min\limits_{x\in K}f(x)$。

定理5 设函数$f:K\to D$ 是 K 上的半严格 F 拟凸函数,且$\lim\limits_{\lambda\to0}F(x,y,\lambda)=y$,若 $\bar{x}$ 是问题(P)的局部最优解,则 $\bar{x}$ 也是问题(P)的全局最优解。若f还是 K 上的严格 F 拟凸函数,则 $\bar{x}$ 是唯一的。

证明 假设 $\bar{x}$ 不是问题(P)的全局最优解,则存在 $x^*\in K$,使得$f(x^*)<f(\bar{x})$。

一方面,因 $\bar{x}$ 是问题(P)的局部最优解,则存在 $\bar{x}$ 的邻域 $U\subset\mathbf{R}^n$,满足

$$f(\bar{x})\leqslant f(x),\forall x\in K\cap U \tag{1}$$

另一方面,因$\lim\limits_{\lambda\to0}F(x^*,\bar{x},\lambda)=\bar{x}$,所以存在 δ,$0<\delta<1$,当 $\lambda\in(0,\delta)$时,有

$$F(x^*,\bar{x},\lambda)\in K\cap U$$

因函数$f:K\to D$ 在 K 上是半严格 F 拟凸函数,故

$$\forall\lambda\in(0,1),f[F(x^*,\bar{x},\lambda)]<\max\{f(x^*),f(\bar{x})\}=f(\bar{x})$$

即

$$\forall\lambda\in(0,1),f[F(x^*,\bar{x},\lambda)]<f(\bar{x}) \tag{2}$$

(1)式与(2)式矛盾。

当 f 还是 K 上的严格 F 拟凸函数时,$\bar{x}$ 一定是唯一的。事实上,假设存在 $\tilde{x}\in K,\tilde{x}\neq\bar{x}$,且 $\tilde{x}$ 也是问题(P)的全局最优解,则 $f(\bar{x})=f(\tilde{x})$,由严格 F-G 凸性知,此时对于 $\forall\lambda\in(0,1)$,有

$$f[F(\bar{x},\tilde{x},\lambda)]<\max\{f(\bar{x}),f(\tilde{x})\}=f(\bar{x})=f(\tilde{x}) \tag{3}$$

(3)式与 $\bar{x}$ 是问题(P)的全局最优解矛盾。 证毕

注 5 根据定义 5 知,严格 F-G 广义凸函数一定是半严格 F-G 广义凸函数,反之则未必成立[12]。F-G 广义凸函数与严格、半严格 F-G 广义凸函数三者之间在一定条件下可以相互转化[2-3]。

同时根据定义 4 的条件 b)及严格和半严格 F 拟凸函数的定义,在相同 F 的前提下,严格 F-G 广义凸函数一定是严格 F 拟凸函数,半严格 F-G 广义凸函数一定是半严格拟凸函数。因此只需来关注半严格 F 拟凸函数在极小化问题中的应用就可以解决 F-G 广义凸函数在极小化问题中的应用问题。

参考文献:

[1] 匡继昌. 常用不等式[M]. 3 版. 济南:山东科学技术出版社,2004,348-356.

[2] 赵宇,黄金莹. 半严格 F-G 广义凸函数[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2011,28(1):7-12.

[3] 赵宇,黄金莹,刘春妍. 严格 F-G 广义凸函数[J]. 杭州师范大学学报:自然科学版,2011,10(1):20-26.

[4] 黄金莹,赵宇. 预不变凸函数的若干性质[J]. 哈尔滨师范大学学报:自然科学版,2009,25(3):36-39.

[5] 黄金莹,赵宇. 凸函数与半连续函数的关系[J]. 数学的实践与认识,2010,40(13):153-159.

[6] 刘建林,邓声南. 非光滑广义 F-凸规划问题的充分性条件[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2001(1):20-23.

[7] 赵克全. 预不变凸函数的一个等价条件[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27(3):6-8.

[8] Jeyakumar V. Strong and weak invexity in mathematical programming[J]. Methods Oper Res,1985,55:109-125.

[9] Pini R. Invexity and generalized convexity[J]. Optimization,1991,22:513-525.

[10] Wer T,Mond B. Pre-invex Functions in Multiple Objective Optimization[J]. J Math Anal Appl,1988,136(1):29-38.

[11] Mohan S R,Neogy S k. On invex set and preinvex functions[J]. J Math Anal Appl,1995,189:901-908.

[12] 彭建文,朱道立. 严格 B-预不变凸函数[J]. 数学物理学报,2006,26A(2):200-206.

Operations Research and Cybernetics

The *F-G* Generalized Convex and *F* Quasi Convex Functions

HUANG Jin-ying, ZHAO Yu, FANG Xiu-nan

(Dept. of Mathematics, Jiamusi University, Jiamusi Heilongjiang 154007, China)

Abstract: Given in this paper are the definitions of F-G generalized convex functions, F quasi convex functions and their examples. By using the conditions P_1 and P_2, the author gives some properties of F-G generalized convex functions, gives functions $\Phi(\lambda)=f[F(x,y,\lambda)]$ which was made by F-G generalized convex functions be (quasi) convex function on $[0,1]$, gives $S_\eta(f)=\{x\mid x\in K,f(x)\leqslant\eta\}$ is generalized convex sets about F and gives f is F-G generalized convex functions over K if and only if f is F-G approximately generalized convex functions and F quasi convex functions over K. At last, the author gives the applications of semi-strictly F quasi convex functions in minimization problem and gives when $\lim\limits_{\lambda\to 0}F(x,y,\lambda)=y$, then local optimal solution of semi-strictly F quasi convex functions is global optimal solution.

Key words: F-G generalized convex functions; F quasi convex function; condition P_1; condition P_2; semi-strictly F quasi convex functions

(责任编辑 黄 颖)