运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20110707.1744.003

渐近拟伪压缩型非自映象的收敛性定理*

黄金平，向长合，彭凤平，戴 敏
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要：Chidume 首次提出渐近非扩张非自映象、一致 L-Lipschitz 非自映象的定义，并证明了所引入的迭代序列强收敛于渐进非扩张非自映象的不动点。本文引入渐近拟伪压缩型非自映象的概念。设 E 是实 Banach 空间，K 是 E 的收缩核，P 是从 E 到 K 上的非扩张收缩映象，T 是一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型非自映象，在对参数的一些限制条件下，给出了带误差修改的 Ishikawa 迭代序列强收敛于 T 的不动点的充要条件，即存在 $[0,+\infty)$ 上的严格增加函数 $\phi(s)$，$\phi(0)=0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\inf\limits_{j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)}[\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1}-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle-k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2+\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)]\leqslant 0$。目的是把对渐近拟伪压缩型自映象的迭代结果推广到渐近拟伪压缩型非自映象，从而推广了以前的结果。

关键词：实 Banach 空间；一致 L-Lipschitz 非自映象；渐近拟伪压缩型非自映象；迭代序列；不动点
中图分类号：O177.91　　文献标志码：A　　文章编号：1672-6693(2011)04-0011-05

1972 年，Goebel 和 Kirk 在文献[1]中引入了渐近非扩张映象。1991 年，Schu 在文献[2]中引入了渐近伪压缩映象。2003 年，Chidume 在文献[3]中引入了渐近非扩张非自映象，一致 L-Lipschitz 的非自映象。有许多作者对渐近非扩张映象，渐近伪压缩映象，渐近非扩张非自映象不动点的迭代逼近问题进行了研究，并得到大量结果。最近，向长合在文献[4]提出渐近拟伪压缩型映象，并证明了一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象迭代收敛的充要条件。受到这些文献思想的启发，本文引入了渐近拟伪压缩型非自映象，讨论了其不动点的逼近问题，所得结果是对文献[3-4]等相应结论的推广。

1 预备知识

设 E 是实 Banach 空间，其对偶空间 E^*，映象 J 是从 E 到 E^* 的正规对偶映象，即

$$J(x)=\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2,\|x\|=\|f\|,\forall x\in E\}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 E 到 E^* 的广义对偶对，用 J 表示单值正规对偶映象。

定义 1[5]　设 K 是 Banach 空间 E 的非空子集，K 称为 E 的收缩核，若存在从 E 到 K 上的连续映象 P，使得 $Px=x,\forall x\in K$，这时 Q 称为 E 到 K 上的收缩映象。

定义 2[3]　设 K 是 Banach 空间 E 的收缩核，具有收缩映象 $P:E\to K$。T 是从 K 到 E 的映象。

1) 称 T 是渐近非扩张的非自映象，如果存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，使得

$$\|T(PT)^{n-1}x-T(PT)^{n-1}y\|\leqslant k_n\|x-y\|,\forall x,y\in K,n\geqslant 1$$

2) 称 T 是一致 L-Lipschitz 的非自映像，如果存在 $L\geqslant 0$，使得

$$\|T(PT)^{n-1}x-T(PT)^{n-1}y\|\leqslant L\|x-y\|,\forall x,y\in K,n\geqslant 1$$

定义 3[9]　设 K 是实 Banach 空间 E 的收缩核，具有非扩张的收缩映像 $P:E\to K$，$T:K\to E$ 是一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象。推广的带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列为

$$\begin{cases}x_{n+1}=P[(1-\alpha_n-\gamma_n)x_n+\alpha_nT(PT)^{n-1}y_n+\gamma_nu_n]\\ y_n=P[(1-\beta_n-\delta_n)x_n+\beta_nT(PT)^{n-1}x_n+\delta_nv_n]\end{cases},n\geqslant 1 \tag{1}$$

* 收稿日期：2011-04-17　　网络出版时间：2011-07-07 17:44:00
资助项目：重庆市教委项目(No. KJ100608)
作者简介：黄金平，男，硕士研究生，研究方向为不动点理论及其应用；通讯作者：向长合，E-mail：xch@cqnu.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110707.1744.201104.11_003.html

其中,x_1 是 K 中给定的一点,$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 E 中的有界点列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列,且 $\alpha_n+\gamma_n\leqslant 1,\beta_n+\delta_n\leqslant 1,\forall n\geqslant 1$。

定义4 设 K 是实 Banach 空间 E 的收缩核,具有收缩映象 $P:E\to K$。

1) 称 $T:E\to K$ 是渐近伪压缩非自映象,如果存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,$\forall x,y\in K$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$,使得

$$\langle T(PT)^{n-1}x-T(PT)^{n-1}y,j(x-y)\rangle\leqslant k_n\|x-y\|^2,\forall n\geqslant 1。$$

2) 称 T 是渐进伪压缩型非自映象,如果存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,$\forall y\in K$,有

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in K}\inf_{j(x-y)\in J(x-y)}\left[\langle T(PT)^{n-1}x-T(PT)^{n-1}y,j(x-y)\rangle-k_n\|x-y\|^2\right]\right\}\leqslant 0$$

3) 称 T 是渐近拟伪压缩型非自映像,若 $F(T)$ 非空,$\forall p\in F(T)$,$\exists\ \{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$ 有

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in K}\inf_{j(x-p)\in J(x-p)}\left[\langle T(PT)^{n-1}x-p,j(x-p)\rangle-k_n\|x-p\|^2\right]\right\}\leqslant 0$$

显然,若映像 $T:K\to E$ 是渐近非扩张的,那么 T 一定是一致 L-Lipschitz 的,另外,渐近非扩张的非自映象和具有不动点的渐近伪压缩非自映象以及具有不动点的渐近伪压缩型非自映象都是渐近拟伪压缩型非自映象的特例。

2 一些引理

引理1[6] 设 E 是实 Banach 空间,$J:E\to E^*$ 的正规对偶映象,则对 $\forall j(x+y)\in J(x+y)$,有

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\forall x,y\in E$$

引理2[4] 设 $\phi(s)$ 是 $[0,\infty)$ 上的严格增加函数,且 $\phi(0)=0$,n_0 为某非负整数,若当 $n\geqslant n_0$ 时,$a_n,b_n,c_n,\varepsilon_n,\alpha_n$ 都是非负数并且满足如下3个条件:

1) $a_{n+1}\leqslant(1+b_n)a_n-\alpha_n\phi(a_{n+1})+\alpha_n\varepsilon_n+c_n$;

2) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}b_n<+\infty$,$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}c_n<+\infty$,$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$;

3) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n=+\infty$。

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

3 主要结论

定理1 设 E 是实 Banach 空间,K 是 E 的收缩核,具有非扩张的收缩映象 $P:E\to K$。$T:K\to E$ 是一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映像,其渐进系数 $k_n\geqslant 1$,且 T 的不动点集 $F(T)$ 非空,任给 $x_1\in K$,$\{x_n\}$ 是由(1)式定义的序列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{\delta_n\}\subset[0,1]$,并且满足如下4个条件:

1) $\alpha_n+\gamma_n\leqslant 1,\beta_n+\delta_n\leqslant 1(\forall n\geqslant 0)$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n<\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(k_n-1)<\infty$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\delta_n<\infty$。

$\forall x^*\in F(T)$,则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^* 的充要条件是存在 $[0,+\infty)$ 上的严格增加函数 $\phi(s)$,$\phi(0)=0$,使得

$$\limsup_{n\to\infty}\inf_{j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)}\left[\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1}-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle-k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2+\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)\right]\leqslant 0 \tag{2}$$

证明 充分性。$F(T)$ 非空,任取 $x^*\in F(T)$,假设在 $[0,\infty)$ 上存在严格增加函数 $\phi(s)$,$\phi(0)=0$,使得(2)式成立,令

$$\bar{\varepsilon} = \inf_{j(x_{n+1}-x^*) \in J(x_{n+1}-x^*)} \left[\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1} - x^*, j(x_{n+1} - x^*) \rangle - k_n \| x_{n+1} - x^* \|^2 + \phi(\| x_{n+1} - x^* \|) \right]$$

$$\varepsilon_n = \max \{\bar{\varepsilon}_n, 0\} + \frac{1}{n}, \forall n \geqslant 1$$

则存在 $j(x_{n+1} - x^*) \in J(x_{n+1} - x^*)$,使得

$$\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1} - x^*, j(x_{n+1} - x^*) \rangle - k_n \| x_{n+1} - x^* \|^2 + \phi(\| x_{n+1} - x^* \|) < \bar{\varepsilon}_n + \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon_n \tag{3}$$

由(2)式知 $\limsup_{n\to\infty} \bar{\varepsilon}_n \leqslant 0$,从而 $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$。记

$$M = \sup \{\| u_n - x^* \| + \| v_n - x^* \| : n \geqslant 1\}$$

由于 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是 E 中的有界点列,所以 $M < +\infty$,由于 T 是一致 L-Lipschitz 的($L \geqslant 1$),并且由(1)式及(2)式,有

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - x^* \|^2 &= \| P[(1 - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n T(PT)^{n-1}y_n + \gamma_n u_n - x^*] \|^2 \leqslant \\
&\| (1 - \alpha_n - \gamma_n)(x_n - x^*) + \alpha_n (T(PT)^{n-1}y_n - x^*) + \gamma_n (u_n - x^*) \|^2 \leqslant \\
&\| (1 - \alpha_n - \gamma_n) \|^2 \| x_n - x^* \|^2 + 2\alpha_n \langle T(PT)^{n-1}y_n - x^*, j(x_{n+1} - x^*) \rangle + 2\gamma_n \langle u_n - x^*, j(x_{n+1} - x^*) \rangle \leqslant \\
&(1 - \alpha_n)^2 \| x_n - x^* \|^2 + 2\alpha_n \langle T(PT)^{n-1}x_{n+1} - x^*, j(x_{n+1} - x^*) \rangle + \\
&2\alpha_n \langle T(PT)^{n-1}y_n - T(PT)^{n-1}x_{n+1}, j(x_{n+1} - x^*) \rangle + 2\gamma_n M \| x_{n+1} - x^* \| \leqslant \\
&(1 - \alpha_n)^2 \| x_n - x^* \|^2 + 2\alpha_n \{k_n \| x_{n+1} - x^* \|^2 - \phi(\| x_{n+1} - x^* \|) + \varepsilon_n\} + \\
&2\alpha_n L \| y_n - x_{n+1} \| \| x_{n+1} - x^* \| + 2\gamma_n M \| x_{n+1} - x^* \|
\end{aligned} \tag{4}$$

由于

$$\| x_n - u_n \| \leqslant \| x_n - x^* \| + \| x^* - u_n \| \leqslant \| x_n - x^* \| + M \tag{5}$$

$$\| x_n - v_n \| \leqslant \| x_n - x^* \| + \| x^* - v_n \| \leqslant \| x_n - x^* \| + M \tag{6}$$

由(5)、(6)及(1)式得

$$\begin{aligned}
&\| y_n - x_{n+1} \| = \\
&\| P[(1 - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n T(PT)^{n-1}x_n + \delta_n v_n] - P[(1 - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n T(PT)^{n-1}y_n + \gamma_n u_n] \| \leqslant \\
&\| [(1 - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n T(PT)^{n-1}x_n + \delta_n v_n] - [(1 - \alpha_n - \gamma_n)x_n + \alpha_n T(PT)^{n-1}y_n + \gamma_n u_n] \| = \\
&\| (\alpha_n - \beta_n)(x_n - T(PT)^{n-1}x_n) + \alpha_n [T(PT)^{n-1}x_n - T(PT)^{n-1}y_n] + \gamma_n (x_n - u_n) - \delta_n (x_n - v_n) \| \leqslant \\
&| \alpha_n - \beta_n | (1 + L) \| x_n - x^* \| + \alpha_n L \| x_n - x^* \| + \alpha_n L \| y_n - x^* \| + \\
&(\gamma_n + \delta_n) \| x_n - x^* \| + M \| \gamma_n + \delta_n \| = \\
&[(1 + L) | \alpha_n + \beta_n | + \alpha_n L + \gamma_n + \delta_n] \| x_n - x^* \| + \alpha_n L \| y_n - x^* \| + M(\gamma_n + \delta_n)
\end{aligned} \tag{7}$$

由(1)式得

$$\begin{aligned}
\| y_n - x^* \| &= \| P[(1 - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n T(PT)^{n-1}x_n + \delta_n v_n] - Px^* \| \leqslant \\
&\| (1 - \beta_n - \delta_n)(x_n - x^*) + \beta_n [T(PT)^{n-1}x_n - x^*] + \delta_n (v_n - x^*) \| \leqslant \\
&(1 - \beta_n - \delta_n) \| x_n - x^* \| + \beta_n \| T(PT)^{n-1}x_n - x^* \| + \delta_n \| v_n - x^* \| \leqslant \\
&(1 - \beta_n - \delta_n) \| x_n - x^* \| + \beta_n L \| x_n - x^* \| + \delta_n M \leqslant (1 + \beta_n L) \| x_n - x^* \| + \delta_n M
\end{aligned} \tag{8}$$

把(8)式代入(7)式得

$$\begin{aligned}
\| y_n - x_{n+1} \| \leqslant& [(1 + L) | \alpha_n - \beta_n | + 2\alpha_n L + \alpha_n \beta_n L^2 + \gamma_n + \delta_n] \| x_n - x^* \| + \\
&(\alpha_n \delta_n L + \gamma_n + \delta_n)M
\end{aligned} \tag{9}$$

令 $d_n = [(1 + L) | \alpha_n - \beta_n | + 2\alpha_n L + \alpha_n \beta_n L^2 + \gamma_n + \delta_n]$,$e_n = (\alpha_n \delta_n L + \gamma_n + \delta_n)M$。把(9)式代入(4)式得

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - x^* \|^2 \leqslant& (1 - \alpha_n)^2 \| x_n - x^* \|^2 + 2\alpha_n [k_n \| x_{n+1} - x^* \|^2 - \varphi(\| x_{n-1} - x^* \|) + \varepsilon_n] + \\
&2\alpha_n L(d_n \| x_n - x^* \| + e_n) \| x_{n+1} - x^* \| + 2M\gamma_n \| x_{n+1} - x^* \|
\end{aligned} \tag{10}$$

引入记号

$$a_n = \| x_n - x^* \|^2, \forall n \geqslant 1; \varphi(s) = 2\phi(\sqrt{s}), \forall s \geqslant 0$$

$$\lambda_n = L\alpha_n d_n = L\alpha_n [(1 + L) | \alpha_n - \beta_n | + 2\alpha_n L + \alpha_n \beta_n L^2 + \gamma_n + \delta_n] \tag{11}$$

$$\mu_n = L\alpha_n\varepsilon_n + M\gamma_n = L\alpha_n(\alpha_n\delta_n L + \gamma_n + \delta_n)M + M\gamma_n \tag{12}$$

则(10)式化简为

$$a_{n+1} \leqslant (1-\alpha_n)^2 a_n + 2\alpha_n k_n a_{n+1} - a_n\varphi(a_{n+1}) + 2\alpha_n\varepsilon_n + 2(\lambda_n \| x_n - x^* \| + u_n)\| x_{n+1} - x^* \|$$

利用不等式 $2ab \leqslant a^2 + b^2$,得

$$a_{n+1} \leqslant (1-\alpha_n)^2 a_n + 2\alpha_n k_n a_{n+1} - a_n\varphi(a_{n+1}) + 2\alpha_n\varepsilon_n + \lambda_n(a_n + a_{n+1}) + u_n(1 + a_{n+1}) =$$
$$(1 - 2\alpha_n + \alpha_n^2 + \lambda_n)a_n + (2\alpha_n k_n + \lambda_n + \mu_n)a_{n+1} \tag{13}$$

由假设条件3),4)以及(11)~(12)式,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2 < \infty, \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n < \infty, \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n < \infty \tag{14}$$

因此,$2\alpha_n k_n + \lambda_n + \mu_n \to 0(n\to\infty)$,$\exists n_0$,当 $n \geqslant n_0$ 时,$2\alpha_n k_n + \lambda_n + \mu_n \leqslant \frac{1}{2}$,令

$$b_n = \frac{1 - 2\alpha_n + \alpha_n^2 + \lambda_n}{1 - 2\alpha_n k_n + \lambda_n + \mu_n} - 1 = \frac{2\alpha_n(k_n - 1) + \alpha_n^2 + 2\lambda_n + \mu_n}{1 - 2\alpha_n k_n + \lambda_n + \mu_n}, c_n = \frac{\mu_n}{1 - 2\alpha_n k_n - \lambda_n - \mu_n}$$

当 $n \geqslant n_0$ 时,$0 \leqslant b_n \leqslant 2[2\alpha_n(k_n - 1) + \alpha_n^2 + 2\lambda_n + \mu_n]$,$0 \leqslant c_n \leqslant 2\mu_n$,由(13)式得

$$a_{n+1} \leqslant (1 + b_n)a_n - \alpha_n\varphi(a_{n+1}) + 4\alpha_n\varepsilon_n + c_n, \forall n \geqslant n_0$$

由(14)式及 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(k_n - 1) < \infty$,得 $\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n < +\infty$,$\sum_{n=n_0}^{\infty}c_n < +\infty$。由引理2有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\| x_n - x^* \|^2 = 0$$

从而得到 $\lim_{n\to\infty}\| x_n - x^* \| = 0$,即 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*。

必要性。假设 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^* \in F(T)$,应为 $x_n \in K$,并且 $T:K\to E$ 是渐近拟伪压缩型映象,根据定义,有

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in K}\inf_{j(x-x^*)\in J(x-x^*)}\left[\langle T(PT)^{n-1}x - x^*, j(x-x^*)\rangle - k_n\| x - x^* \|^2\right]\right\} \leqslant 0 \tag{15}$$

任取一个在$[0,+\infty)$上的严格增加函数 $\phi(s)$,满足条件 $\phi(0) = 0$(例如 $\phi(s) = s$),则

$$\lim_{n\to\infty}\phi(\| x_n - x^* \|) = 0$$

由(15)式可以推出(2)式成立。 证毕

注1 若 $T:K\to K$ 是自映像,$\{u_n\}$,$\{v_n\}$ 是 K 中的有界点列,这时本文定理1就变为文献[4]中的定理3.1,因此,本文是对文献[4]的推广。

注2 由于具有不动点的渐近伪压缩型非自映象是渐近拟伪压缩型非自映象的特例,所以对于具有不动点的渐近伪压缩型非自映象,也有相应的结论成立。

参考文献:

[1] Goebel K,Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings [J]. Proc Amer Math Soc,1972,35(1):171-174.

[2] Schu J. Iterative construction of fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl,1991,158:407-413.

[3] Chidume C E,Ofoedu E U,Zegeye H. Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings [J]. J Math Anal Appl,2003,280:364-374.

[4] 向长合. 一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象迭代收敛的充要条件[J]. 系统科学与数学,2008,28(4):447-455.

[5] 曾六川. 一致光滑 Banach 空间中渐近伪压缩张映象不动点的迭代逼近问题[J]. 数学学报,2005,26(A):283-290.

[6] Chang S S. On chidume s open question and approximation solutions of multi-valued strongly accretive mapping equation in Banach space[J]. J Math Anal Appl,1997,216:94-111.

[7] 张石生. Banach 空间中渐近非扩张映像不动点的迭代逼近问题[J]. 应用数学学报,2001,24(2):236-241.

[8] 向长合. 有限个广义渐近拟非扩张型映像不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2006,23(1):6-9.

[9] 张芳. 一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩非自映象不动点的迭代逼近[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2009,26(1):7-10.

Operations Research and Cybernetics

Convergence Theorem for Asymptotically Quasi Pseudo-Contractive Type Nonself-mappings

HUANG Jin-ping, *PENG Feng-ping*, *DAI Min*

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Chidume first introduced the definition of asymptotically nonexpansive nonself-mappings and uniformly L-Lipschitzan nonself-mappings. Furthermore he proved that the iterative sequence converged strongly to fixed points of asymptotically nonexpansive nonself-mappings. In this paper, the definition of asymptotically pseudo-contractive type nonself-mappings, asymptotically quasi pseudo-contractive type nonself-mappings is introduced. Suppose E is a real Banach space, let K be a retract of E, P be a nonexpansive retraction from E to K, T is L-Lipschitzan asymptotically quasi pseudo-contractive type nonself-mappings, under some restricted conditions on the parameters. An necessary and sufficient condition is given for the modified Ishikawa iterative sequence with error to converge strongly to a fixed point of T, Suppose there exist a strictly increasing function $\phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $\phi(0)=0$, such that $\limsup_{n\to\infty}\inf_{j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)}[\langle T(PT)^{n-1}x_{n+1}-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle - k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2+\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)]\leqslant 0$. The objective of this article is to extend the asymptotically quasi pseudo-contractive type mappings to asymptotically quasi pseudo-contractive type nonself-mappings. Therefore, the results presented in this paper extended the previous work.

Key words: real Banach space; uniformly L-Lipschitzan nonself-mappings; asymptotically quasi pseudo-contractive type nonself-mappings; iterative sequence; fixed points

（责任编辑 游中胜）