DOI:CNKI:50-1165/N.20110708.1118.004

行列式的计算方法探讨*

张 新 功
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘要:行列式计算的技巧性很强。理论上,任何一个行列式都可以按照定义进行计算,但是直接按照定义计算而不借助于计算机有时是不可能的。本文在总结已有常规行列式计算方法的基础上,结合历年数学专业硕士研究生入学考试试题特征性进行分析,对行列式的计算方法和一些技巧进行了更深入的探讨。总结出"定义法"、"化三角形法"、"用行列式的性质转化为已知的行列式"、"滚动消去法"、"拆分法"、"加边法"、"归纳法"、"利用递推降级法"、"利用重要的结论与重要公式"、"特征值法"等 10 种计算技巧和途径。

关键词:行列式;计算方法与技巧;加边;拆项

中图分类号:G642　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2011)04-0088-05

行列式是重要的数学工具和概念之一,它来源于解线性方程组。时至今日行列式理论的应用却远不止于此[1],它在消元法、矩阵论、坐标变换、多重积分中的变量替换、解行星运动的微分方程组、将二次型及二次型束化简为标准型、运筹学中线性规划和图与网络理论等诸多的问题中都有广泛的应用,然而这些应用最终离不开行列式的计算,它是行列式理论中的一个重要问题[1-10]。行列式是大学数学中重要的计算工具之一,而高阶行列式的计算,其基本方法和技巧是"化零"和"降阶",即先利用行列式的性质做恒等变形化简,使行列式中出现较多的零元素,然后套用特殊的行列式的值来计算(如上(下)三角行列式[2])或利用按行(列)展开定理降低行列式的阶数。因此特将行列式的计算方法归纳总结,并通过对一些大专院校历年典型研究生入学考试试题的特征进行分析,说明其求解方法与技巧。

1 定义法

根据行列式定义可知,如果所求的行列式中含的非零元素特别少(一般不多于 $2n$ 个),可以直接利用行列式的定义求解,或者行列式的阶数比较低(一般是 2 阶或者 3 阶)。如果对于一些行列式的零元素(若有)分布比较有规律,如上(下)三角形行列式以及含零块形式的行列式可以考虑用定义法求解。

例 1　$(a_1-c_1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$(中山大学)

证明　右端 $=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}(a_1c_3-a_3c_1)-\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}(a_1c_2-a_2c_1)=a_1\left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}c_3-\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}c_1\right]-$

$$c_1\left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}a_3-\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}a_2+\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}a_1\right]=a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}-c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\text{左端}$$

2 化三角形法

此法是把行列式变换为如下形式:使位于对角线一侧的所有元素全部等于零,次对角线的情形,可以用

* 收稿日期:2011-05-13　　网络出版时间:2011-07-08 11:18:00
作者简介:张新功,男,讲师,博士,研究方向为组合优化、排序理论。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110708.1118.004.html

改变行(或列)的次序成相反次序的方法,化到主对角线的情形,所得的行列式等于主对角线元素的乘积。

3 用行列式的性质转化为已知的行列式

若已知某个行列式的值,来求另一个行列式,可利用行列式的定义以及性质找出这两个行列式之间的关系,从而求出未知的行列式。

例 2[3]　设 A 为 3×3 矩阵,$|A|=-2$,把矩阵 A 按列分块为(A_1,A_2,A_3),其中 $A_j(j=1,2,3)$是矩阵 A 的第 j 列,则 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=$ ________。(湖南大学,2001)

解　因为 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=|A_3,3A_2,A_1|=-3|A_1,A_2,A_3|=6$。

4 滚动消去法

当行列式每两行的值比较接近时,可采用让邻行中的某一行减或者加上另一行的若干倍,这种方法叫作滚动消去法。一般利用此方法后,最好在化简后行列式的第一行或者列能产生较多的零,以便利用降级法来做。

例 3[4]　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&1&2&\cdots&n-2&n-1\\3&2&1&\cdots&n-3&n-2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n-1&n-2&\cdots&2&1\end{vmatrix}$ $(n\geqslant2)$(北京师范大学,2001)

解　从第二行开始每行减去上一行,有

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&1&2&\cdots&n-2&n-1\\3&2&1&\cdots&n-3&n-2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n-1&n-2&\cdots&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\1&1&-1&\cdots&-1&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1&-1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&0&0&\cdots&0&-2\\2&2&0&\cdots&0&-2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1&-1\end{vmatrix}=2^{n-2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n+1\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}(n+1)2^{n-2}$$

5 拆分法

把行列式的某行或者列的各元素均写成量数和,再利用行列式的性质写成两个行列式的和,使问题简化以便计算。

例 4[5]　计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&y&y&\cdots&y\\z&x&y&\cdots&y\\z&z&x&\cdots&y\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\z&z&z&\cdots&x\end{vmatrix}$(安徽大学)

解　1)当 $y=z$ 时,容易计算得 $D_n=(x-y)^{n-1}[x+(n-1)y]$。

2)当 $y\neq z$ 时,将 n 列写成两项和 $y=y+0$;$x=y+(x-y)$。

那么 D_n 可以拆成两个行列式之和,即 $D_n=(x-y)D_{n-1}+C$,其中

$$C=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z-x & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z-x & z-y & \cdots & x-y & 0 \\ z-x & z-y & \cdots & z-y & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} z-x & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ z-x & z-y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z-x & z-y & \cdots & z-y & x-y \\ z-x & z-y & \cdots & z-y & z-y \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} z-x & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z-x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & z-x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z-x \end{vmatrix}=y(x-z)^{n-1}$$

因此有 $D_n=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}$。根据 y,z 的对称性,类似可得:$D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}$。作差可得 $(y-z)D_z=y(x-z)^{n-1}-z(x-y)^{n-1}$,即 $D_n=\dfrac{y(x-z)^{n-1}-z(x-y)^{n-1}}{y-z}$。

6 加边法

将 n 级行列式增加一行一列变为 $n+1$ 级行列式,再利用行列式的有关性质简化出结果。

例5[6] 计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$(华中师范大学,2000)

解 利用加边法得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & x+1 & x & \cdots & x \\ 0 & x & x+\frac{1}{2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^{n}kx & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}=$$

$$\left(1+\frac{n(n+1)}{2}x\right)\frac{1}{n!}$$

7 归纳法

先通过计算一些初始行列式 D_1,D_2,D_3 等,找出它们的结果与级数之间的关系,用不完全归纳法对 D_n 的结果提出猜想,然后用数学归纳法证明其猜想成立。

例6 计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$(广西大学,兰州大学)

解 由于 $D_1=\cos\theta$,$D_2=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$,因而猜想 $D_n=\cos n\theta$。现在用第二数学归纳法来证明。当 $n=1$ 时结论成立。归纳假设结论对 $\leqslant n-1$ 都成立,再证明 n 时,对于 D_n 按照最后一行展开得

$$D_n = 2D_{n-1}\cos\theta - D_{n-2} = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta =$$
$$\cos[\theta + (n-1)\theta] + \cos[(n-1)\theta - \theta] - \cos(n-2)\theta = \cos n\theta$$

8 利用递推降级法[7]

如果一个行列式在元素分布上比较有规律,则可设法找出 n 级行列式 D_n 与较低级的行列式之间的关系,以此类推来计算行列式的值。

a) 如果 n 级行列式满足关系式:$aD_n + bD_{n-1} + c = 0$。一般通过在寻找 D_n 与 D_{n-1} 之间的关系,进而形成一个以 D_n,D_{n-1} 为未知量的二元一次方程组,求出 D_n。

b) 如果 n 级行列式满足关系式:$aD_n + bD_{n-1} + cD_{n-2} = 0$,则作特征方程 $ax^2 + bx + c = 0$。

ⅰ) 若特征方程的判别式 $\Delta \neq 0$,则特征方程有两个不相等的根:x_1,x_2,则 $D_n = Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1}$。其中 A,B 为待定系数,令 $n = 1,2$,求出 A,B。

ⅱ) 若特征方程的判别式 $\Delta = 0$,则特征方程有两个相等的根:x_1,x_2,则 $D_n = (A + nB)x_1^{n-1}$。其中 A,B 为待定系数,令 $n = 1,2$,求出 A,B。

例 7　计算 n 级行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}$(北京航空航天大学)

解　按照第一行展开得 $D_n = 2D_{n-1} - \frac{1}{4}D_{n-2}$,作特征方程 $4x^2 - 8x + 1 = 0$,解得 $x_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$,所以 $D_n = A\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$。

当 $n = 1,2$ 有方程组 $\begin{cases} A + B = 2 \\ (4+2\sqrt{3})A + (4-2\sqrt{3})B = 15 \end{cases}$,解之得 $A = \frac{12+7\sqrt{3}}{12}$,$B = \frac{12-7\sqrt{3}}{12}$。因此 $D_n = \left(\frac{12+7\sqrt{3}}{12}\right)\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{12-7\sqrt{3}}{12}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$。

9 利用重要的结论与重要公式

将已知的行列式化为熟悉的公式,如范德蒙公式,三角形式(上或者下三角形行列式)以及利用拉普拉斯定理等重要结论。

例 8　计算行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$(兰州大学,云南大学)

解　将第 $n+1$ 行与上面各行作两两对换,将它换到第 1 行,经过 n 次对换,再将第 n 行作两两对换,…,直到第 2 行作一次对换放在第 n 行。得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-n)^{n-1} & [a-(n-1)]^{n-1} & \cdots & a^{n-1} \\ (a-n)^{n} & [a-(n-1)]^{n} & \cdots & a^{n} \end{vmatrix}=n!(n-1)!\cdots 2!$$

10 特征值法

设 $\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 级矩阵 A 的全部特征值,则有公式 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。故只要能求出矩阵 A 的全部特征值,那么就可计算出 A 的行列式。

例9[8] 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 级矩阵 A 的全部特征值,证明:A 可逆的当且仅当它的特征值全不为零。(华南理工大学)

证明 因为 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,则

$$A\text{ 是可逆的}\Leftrightarrow|A|\neq 0\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0\Leftrightarrow\lambda_i\neq 0(i=1,\cdots,n)$$ 证毕

本文根据近年来出现在数学专业的研究生入学考试试题比较详细地总结了计算行列式的方法,具体计算行列式时一般是将几种方法结合起来使用,而不是单独使用一种方法,这需要具体问题具体分析。

参考文献:

[1] 王作中. 行列式的计算方法与技巧[J]. 民营科技,2010,8:97-98.

[2] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2003.

[3] 黄先开,曹显兵,简怀玉. 2008年考研数学经典讲义:理工类[M]. 2版. 北京:中国人民大学出版社,2007.

[4] 钱吉林. 高等代数题解精粹[M]. 北京:中央民族大学出版社,2002.

[5] 徐仲. 线性代数典型题解集[M]. 2版. 西安:西北工业大学出版社,2000.

[6] 李世伟,王航平. 关于各种行列式算法的探讨[J]. 牡丹江大学学报,2010,19:112-115.

[7] 王丽霞. N 种行列式的几种常见的计算方法[J]. 山西大同大学学报,2008,24(2):11-14.

[8] 李志慧,李永明. 高等代数中的典型问题与方法[M]. 北京:科学出版社,2008.

[9] 孙克强. 杨辉三角与行列式[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,1994,17(4):53-57.

[10] 吴云. 分块矩阵的初等变换及其在求逆和行列式中的应用[J]. 重庆工业管理学院学报,1998(3):100-104.

Research on the Computing Methods of Determinant

ZHANG Xin-gong

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The computing methods of determinant rely much on techniques. Theoretically, each determinant can be computed by the definition of determinant. However, it is sometimes impossible to indirectly compute by the definition, rather than by computer. Therefore, it is very necessary and meaningful to discuss the computing methods of determinant. Based on the computing methods of the determinant and the analysis of test questions' characteristics for higher algebra in master graduate entrance exam, in this paper, I futher study and discuss some computing methods and skills of the determinant. Theremore, I summarize ten methods and skills as following: the method by definition, transforming triangular determinant, transforming the known determinant, rolling elimination technique, splitting method, bordering determinant, induction method, recursiving relegation method, the important conclusions and formulas, and eigenvalue method.

Key words: determinant; computing methods and skills; bordered determinant; splitting

(责任编辑 黄 颖)