2011 年 11 月
第 28 卷 第 6 期

重庆师范大学学报(自然科学版)
Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)

Nov. 2011
Vol. 28 No. 6

运筹学与控制论

DOI :CNKI :50-1165/N. 20111110. 1503. 002

恶化工件具有 p-s-d 安装时间的非同类机排序*

任慧敏, 杨明明
(曲阜师范大学 管理学院, 山东 日照 276826)

摘要 :主要讨论了恶化工件具有 p-s-d 安装时间的非同类机排序问题。工件的实际加工时间与开工时间有关,安装时间是依赖于所在机器上已加工完的工件的加工时间的简单函数,即 p-s-d 形式。本文所考虑的问题是如何确定工件在非同类机上的加工顺序使得所有工件的总完工时间最小。在每台机器上加工的工件数确定的情况下,将该排序问题转化为一个指派问题。由于每台机器上加工的工件数可在 $O(n^{m-1})$ 时间内确定,而指派问题能在 $O(n^3)$ 时间内解决,故本文证明了所提出的排序问题是多项式时间可解的。本文还讨论了该排序问题的两种特殊情形。情形一,工件在不同机器上的恶化和安装系数是相同的,即 $\delta_i=\delta$,$b_i=b$,工件 j 在不同机器上的正常加工时间为 a_j,不依赖于所在的机器,此时相当于所有工件在同型平行机上加工。情形二,在情形一的基础上又考虑了工件不存在恶化,即 $\delta_i=0$。对这两种情形下的排序问题,本文由降序算法得到最优序。

关键词 :排序 ;非同类机 ;安装时间 ;恶化工件
中图分类号 :O223　　文献标志码 :A　　文章编号 :1672-6693(2011)06-0005-05

近几年来,具有恶化效应的排序问题得到广泛的关注。Gupta J. N. D. 和 Gupta S. K. 最早在排序问题中引入恶化效应[1],此后出现了一系列对具有恶化效应的排序问题的研究[2-8]。另外,在排序问题中引入安装时间是很有必要的。常用的安装时间有两种形式 :一种是与顺序独立(安装时间与工件本身有关,而与加工完的工件无关) ;一种是与顺序相关(安装时间不仅与工件本身有关还与加工完的工件有关)。Koulamas 和 Kyparisis 首次给出了与顺序相关的安装时间(即 p-s-d)的排序问题,证明某些问题是多项式可解的,并将他们的结果扩展到安装时间为非线性的形式[9]。Biskup 和 Herrmann 分析了工件带有(p-s-d)和工期相关的安装时间的一些问题,证明了极小化延迟问题是多项式可解的,而极小化总误工问题,极小化最大延误问题,极小化最大误工问题都是在某些特殊情形下才具有多项式算法[10]。Zhao 和 Tang 研究了工件具有恶化效应和 p-s-d 安装时间的单机排序问题,并指出对目标为极小化总完工时间和时间表长问题,在 $O(n\log n)$ 时间内可找到最优序[11]。本文将在基础上进行扩展,研究恶化工件具有 p-s-d 安装时间的非同类机排序问题。Hsu, Kuo 和 Yang 研究了具有学习效应和安装时间的非同类机排序问题,证明问题 $R_m \mid p_{ijr} = p_{ij}r^{a_{ij}}, S_{\mathrm{psd}} \mid TC$ 在 $O(n^{m+2})$ 时间内可解,并指出该问题的特殊情形存在最优解[12]。

本文讨论了恶化工件具有 p-s-d 安装时间的非同类机排序问题 $R_m \mid p_{ij} = a_{ij}+\delta_i t, S_{\mathrm{psd}} \mid TC$。在每台机器上工件数确定的情况下,该排序问题可转化为指派问题,而指派问题在多项式时间内可解,故本文证明该问题是多项式可解的。同时本文还对问题的两种特殊情形进行了探讨,分别指出他们存在最优序。

1 问题描述

本文考虑了恶化工件具有 p-s-d 安装时间的非同类机排序问题。该问题可描述为 :有 n 个无关的不可中断加工的工件 $J_1, J_2, \cdots, J_n$ 在 m 台非同类机 $M_1, M_2, \cdots, M_m$ 上加工。令 S_i 表示指派在机器 M_i 上加工的工件的集合,那么 $S_i \cap S_j = \varnothing, \forall i \neq j$ 且 $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = \{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$。令 n_i 表示指派到机器 M_i 上加工的工件个数且

* 收稿日期 :2011-05-24　　修回日期 :2011-07-04　　网络出版时间 :2011-11-10 15 :03
资助项目 :国家自然科学基金项目(No. 11071142) ;山东省自然科学基金项目(No. ZR2010AM034)
作者简介 :任慧敏,女,硕士研究生,研究方向为排序理论与算法。
网络出版地址 :http ://www. cnki. net/kcms/detail/50. 1165. N. 20111110. 1503. 201106. 5_002. html

$n=\sum_{i=1}^{m}n_i$。不失一般性,假设 $m\leqslant n$。所有工件在零时刻到达,每台机器同一时刻只能加工一个工件而且机器不能空闲直到安排在它上的最后一个工件被加工完。令 a_{ij},p_{ij} 分别表示工件 $J_j(j\in\{1,2,\cdots,n\})$ 在机器 $M_i(i\in\{1,2,\cdots,m\})$ 上的正常加工时间和实际加工时间,工件 J_j 如果被安排在机器 M_i 上且在 t 时刻开始加工,那么工件的实际加工时间可表示为

$$p_{ij}=a_{ij}+\delta_i t,\ j=1,2,\cdots,n,\ i=1,2,\cdots,m \tag{1}$$

其中 $\delta_i\geqslant 0$ 表示工件在机器 M_i 上加工时的恶化率。Koulama 和 Kyparisis 假设工件 J_j 安装在机器 M_i 的第 r 个位置上加工的 p-s-d 安装时间可表示为[9]

$$s_{i[1]}=0,s_{i[r]}=b_i\sum_{k=1}^{r-1}p_{il[k]},l\in S_i,i=1,2,\cdots,m,r=2,\cdots,n_i \tag{2}$$

其中 $b_i\geqslant 0$。本文引用方程(2)来表示安装时间,且总完工时间用 TC 表示。目标是极小化总完工时间。引用 Graham 的经典三元组表示法[13],所研究的问题可表示为 $R_m\mid p_{ij}=a_{ij}+\delta_i t,S_{\mathrm{psd}}\mid TC$。

2 相关引理

在这一节中给出两个相关引理。

引理1[14] 对于两个序列 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$,当它们以不同的升降序排列时,相应元素的乘积和 $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ 达到最小。

为得到引理2,假设只用一台机器来加工这 n 个工件。令 $\pi=[J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]}]$ 是这个问题的一个排序,$J_{[i]}$ 表示该排序中第 i 个位置上的工件,$a_{[j]}$ 和 $p_{[j]}$ 分别表示工件 $J_{[j]}$ 的正常加工时间和实际加工时间,那么这 n 个位置上的工件的实际加工时间可表示为

$$p_{[1]}=a_{[1]}$$
$$p_{[2]}=a_{[2]}+\delta a_{[1]}$$
$$p_{[3]}=a_{[3]}+\delta[(1+\delta)a_{[1]}+a_{[2]}]$$
$$\cdots$$
$$p_{[j]}=a_{[j]}+\delta[\sum_{i=1}^{j-1}(1+\delta)^{j-i-1}a_{[i]}]$$
$$\cdots$$
$$p_{[n]}=a_{[n]}+\delta[\sum_{i=1}^{n-1}(1+\delta)^{n-i-1}a_{[i]}]$$

如果工件的加工时间与开工时间无关,即 $\delta=0$,那么问题 $1\mid p_j=a_j+\delta t\mid TC$ 等价于问题 $1\parallel TC$。

引理2 对于给定的排序 $\pi=[J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]}]$,如果问题 $1\parallel TC$ 的目标函数可写为 $TC=\sum_{j=1}^{n}w_{[j]}a_{[j]}$,那么问题 $1\mid p_j=a_j+\delta t\mid TC$ 的目标函数可写为 $TC=\sum_{j=1}^{n}w_{[j]}p_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_{[j]}a_{[j]}$,其中 $\tilde{w}_{[j]}=w_{[j]}+\delta[\sum_{i=j+1}^{n}(1+\delta)^{i-j-1}w_{[i]}]$(定义 $\sum_{j=n+1}^{n}x_j=0$)。

证明 显然,问题 $1\parallel TC$ 中工件 $J_{[j]}$ 的实际加工时间是 $a_{[j]}$,而问题 $1\mid p_j=a_j+\delta t\mid TC$ 中工件 $J_{[j]}$ 的实际加工时间是 $p_{[j]}$。由于问题 $1\parallel TC$ 的目标值可以表示为 $TC=\sum_{j=1}^{n}w_{[j]}a_{[j]}$,那么问题 $1\mid p_j=a_j+\delta t\mid TC$ 的目标值可表示为 $TC=\sum_{j=1}^{n}w_{[j]}p_{[j]}$。因此

$$TC=\sum_{j=1}^{n}w_{[j]}p_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}w_{[j]}\{a_{[j]}+\delta[\sum_{i=1}^{j-1}(1+\delta)^{j-i-1}a_{[i]}]\}=$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{[j]}\{w_{[j]}+\delta[\sum_{i=j+1}^{n}(1+\delta)^{i-j-1}w_{[i]}]\}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_{[j]}a_{[j]}$$ 证毕

3 极小化总完工时间

证明问题 $R_m\mid p_{ij}=a_{ij}+\delta_i t,S_{\mathrm{psd}}\mid TC$ 是多项式可解的。用 $p(n,m)=(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ $(n=\sum_{i=1}^{m}n_i)$ 来表示指派到每台机器的工件个数,则对给定的 $p(n,m)$ 问题变为一个 n 个工件与 n 个位置对应的指派问题。工件 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 被指派到机器 M_i 上第 r 个位置 (i,r) $(r=1,2,\cdots,n_i,i=1,2,\cdots,m)$ 的排序费用记作:

$(n_i - r + 1)(1 + b_i(n_i - r)/2)p_{ij[r]}$。

令 $x_{ij[r]} = \begin{cases} 1，当工件 j 在 M_i 的第 r 个位置加工 \\ 0，否则 \end{cases}$，则该排序问题可转化为下面的指派问题(P)

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i}(n_i - r + 1)(1 + b_i(n_i - r)/2)p_{ij[r]}x_{ij[r]} \tag{3}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij[r]} = 1, i = 1,2,\cdots,m, r = 1,2,\cdots,n_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i}x_{ij[r]} = 1, j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij[r]} = 0 \text{ 或 } 1, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n, r = 1,2,\cdots,n_i$$

令 $w_{i[r]} = (n_i - r + 1)(1 + b_i(n_i - r)/2)$，将 $p_{ij[r]} = a_{ij[r]} + \delta_i[\sum_{k=1}^{r-1}(1 + \delta_i)^{r-k-1}a_{il[k]}]$ 代入目标函数(3)，由引理 2，(3) 式可简化为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i}\tilde{w}_{i[r]}a_{ij[r]}x_{ij[r]}$$

其中 $\tilde{w}_{i[r]} = w_{i[r]} + \delta_i[\sum_{k=r+1}^{n_i}(1 + \delta_i)^{n_i-r-1}w_{i[k]}]$。

对于 $p(n,m) = (n_1,n_2,\cdots,n_m)$，$n_i$ 的取值范围为 $0 \leqslant n_i \leqslant n$，如果前 $m-1$ 台机器上工件的个数确定，那么第 m 台机器上的工件数也确定，因为 $n = \sum_{i=1}^{m}n_i$。故 $p(n,m)$ 可能的个数为 $(n+1)^{m-1}$。则有下面的定理成立。

定理 1　问题 $R_m \mid p_{ij} = a_{ij} + \delta_i t, S_{psd} \mid TC$ 能在 $O(n^{m+2})$ 时间内得到解决。

证明　当 $p(n,m)$ 已知，这个排序问题等价于解上面的指派问题(P)。由于指派问题能在 $O(n^3)$ 时间内解决，而 $p(n,m)$ 能在 $O(n^{m-1})$ 时间内确定。故问题 $R_m \mid p_{ij} = a_{ij} + \delta_i t, S_{psd} \mid TC$ 能在 $O(n^{m+2})$ 时间内得到解决。　证毕

4　两种特殊情形

4.1　排序问题 $P_m \mid p_{ij} = a_j + \delta t, S_{psd}, b_i = b \mid TC$

这一节中将讨论一种特殊情形，工件在不同机器上加工的恶化率和安装系数都是相同的，即 $\delta_i = \delta, b_i = b, (i = 1,2,\cdots,m)$。工件在不同机器上的正常加工时间和实际加工时间分别为 $a_{ij} = a_j$ 和 $p_{ij} = a_j + \delta t$，不依赖于所在的机器。则这个问题可转化为平行机的情形，此问题可表示为 $P_m \mid p_{ij} = a_j + \delta t, S_{psd}, b_i = b \mid TC$。

定理 2　排序问题 $P_m \mid p_{ij} = a_j + \delta t, S_{psd}, b_i = b \mid TC$ 能在 $O(n^m \log n)$ 时间内得到最优序。

证明　在这种情形下首先考虑在每台机器上工件数确定的情况下，如何最优地安排工件在机器上的加工顺序使目标值最小。令 $a_{i[r]}$ 和 $p_{i[r]} = a_{i[r]} + \delta t$ 分别表示在机器 M_i 上第 r 个位置加工的工件的正常加工时间和实际加工时间。此时该问题的目标函数值可表示为

$$TC = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i}(n_i - r + 1)(1 + b(n_i - r)/2)p_{i[r]} \tag{4}$$

令 $w_{i[r]} = (n_i - r + 1)(1 + b(n_i - r)/2)$，由引理 2，则(4) 式可以简化为 $TC = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i}\tilde{w}_{i[r]}a_{i[r]}$，其中，$\tilde{w}_{i[r]} = w_{i[r]} + \delta[\sum_{k=r+1}^{n_i}(1 + \delta)^{k-r-1}w_{i[k]}]$。

由引理 1，须将这 n 个工件按加工时间 $a_{i[r]}$ 不增的顺序排在 $\tilde{w}_{i[r]}$ 不减顺序对应的位置上加工，这时目标值达到最小。这个排序过程要用 $O(n\log n)$ 时间来完成。由于确定每台机器上工件数 $p(n,m)$ 需要 $O(n^{m-1})$ 时间，故问题 $P_m \mid p_{ij} = a_j + \delta t, S_{psd}, b_i = b \mid TC$ 能在 $O(n^m \log n)$ 时间内得到最优序。　证毕

4.2　排序问题 $P_m \mid p_{ij} = a_j, S_{psd}, b_i = b \mid TC$

在问题 $P_m \mid p_{ij} = a_j + \delta t, S_{psd}, b_i = b \mid TC$ 的基础上，考虑工件不存在恶化，即 $\delta_i = 0$。此排序问题可表示为 $P_m \mid p_{ij} = a_j, S_{psd}, b_i = b \mid TC$。

该问题的目标值具有形式

$$TC = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i}(n_i - r + 1)(1 + b(n_i - r)/2)p_{i[r]} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i}(n_i - r + 1)(1 + b(n_i - r)/2)a_{i[r]}$$

该问题的最优序满足如下性质。

定理3 对问题 $P_m \mid p_{ij} = a_j, S_{psd}, b_i = b \mid TC$ 存在最优序满足每台机器上的工件数相差不超过1。

证明 (反证法)假设 $\pi = \{\pi_1, \cdots, \pi_i, \cdots, \pi_k, \cdots, \pi_m\}$ 为该问题的一个最优序,其中 π_i 为在机器 M_i 上加工的工件的排序。若机器上工件的个数不满足上述结论,那么至少存在两台机器(不妨设为 M_i 和 M_k)的工件个数相差大于1。设机器 M_i 和 M_k 上工件个数分别为 n_i 和 n_k,且 $n_i - n_k > 1$。令 $\pi' = \{\pi_1, \cdots, \pi_i', \cdots, \pi_k', \cdots, \pi_m\}$,其中 π_i' 和 π_k' 分别为机器 M_i 上第一个位置的工件移到 M_k 上第一个位置后得到的排序。其他机器上的工件保持不变。令 $TC(\pi_i' + \pi_k')$ 表示排序 π_i' 和 π_k' 中工件的总完工时间,$TC(\pi_i + \pi_k)$ 为排序 π_i 和 π_k 中工件的总完工时间,则排序 π' 和 π 的目标值的差为

$$TC(\pi') - TC(\pi) = TC(\pi_i' + \pi_k') - TC(\pi_i + \pi_k)$$

$$TC(\pi_i' + \pi_k') = (n_i - 1)(1 + (n_i - 2)b/2)a_{i[2]} + \cdots + a_{i[n_i]} + (n_k + 1)(1 + n_k b/2)a_{i[1]} + n_k(1 + (n_k - 1)b/2)a_{k[1]} + (n_k - 1)(1 + (n_k - 2)b/2)a_{k[2]} + \cdots + a_{k[n_k]}$$

$$TC(\pi_i + \pi_k) = n_i(1 + (n_i - 1)b/2)a_{i[1]} + (n_i - 1)(1 + (n_i - 2)b/2)a_{i[2]} + \cdots + a_{i[n_i]} + n_k(1 + (n_k - 1)b/2)a_{k[1]} + (n_k - 1)(1 + (n_k - 2)b/2)a_{k[2]} + \cdots + a_{k[n_k]}$$

由于 $n_i - n_k > 1$,故有 $n_k + 1 < n_i$ 且 $n_k < n_i - 1$,而 $a_{i[1]} > 0$,则有

$$TC(\pi_i' + \pi_k') - TC(\pi_i + \pi_k) = (n_k + 1)(1 + n_k b/2)a_{i[1]} - n_i(1 + (n_i - 1)b/2)a_{i[1]} = \{(n_k + 1)(1 + n_k b/2) - n_i(1 + (n_i - 1)b/2)\}a_{i[1]} < 0$$

即调整后新排序的目标值比原排序小,与原排序为最优序矛盾。

故所有机器上工件的个数相差不超过1。 证毕

定理4 排序问题 $P_m \mid p_{ij} = a_j, S_{psd}, b_i = b \mid TC$ 能在 $O(n\log n)$ 时间内的到最优序。

证明 令 $$TC = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i}(n_i - r + 1)(1 + b(n_i - r)/2)a_{i[r]} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_i} w_{i[r]}a_{i[r]} \quad (5)$$

其中 $w_{i[r]} = (n_i - r + 1)(1 + b_i(n_i - r)/2)$,$i = 1,2,\cdots,m$,$r = 1,2,\cdots,n_i$。由定理3可知每台机器上工件个数相差不超过1,即 $|n_i - n_j| \leqslant 1, \forall i \neq j$。不妨设机器上工件的个数满足 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_m$,计算 $w_{i[r]}$ 的值($w_{i[r]} = (n_i - r + 1)(1 + b_i(n_i - r)/2)$),可知它们满足关系

$$w_{11} \leqslant w_{21} \leqslant \cdots \leqslant w_{m1} \leqslant w_{12} \leqslant \cdots \leqslant w_{m2} \leqslant \cdots \leqslant w_{1n_1} \leqslant w_{2n_2} \leqslant \cdots \leqslant w_{mn_m}$$

由引理1可知,要使得(5)式目标值最小,将工件按加工时间 $a_{i[r]}$ 不增的顺序依次排在机器 $M_1, \cdots, M_m$ 的第一个位置,然后第二个位置,依次排下去直到所有的工件都加工完。

该排序为问题 $P_m \mid p_{ij} = a_j, S_{psd}, b_i = b \mid TC$ 的最优序,所用的时间为 $O(n\log n)$。 证毕

5 结束语

本文主要讨论了具有恶化效应和p-s-d安装时间的非同类机排序问题,并指出这个问题多项式可解。另外对该问题的两种特殊情形,证明在多项式时间内能得到最优序。对具有其它形式的恶化效应和安装时间的非同类机排序问题,还需作进一步研究。

参考文献:

[1] Gupta J N D, Gupta S K. Single facility scheduling with nonlinear processing times[J]. Computers and Industrial Engineering, 1988, 14: 387-393.

[2] Alidaee B, Womer N K. Scheduling with time dependent processing times: Review and extensions[J]. Journal of the Operational Research Society, 1999, 50: 711-720.

[3] Bachman A, Janiak A, Kovalyov M Y. Minimizing the total weighted completion time of deteriorating jobs[J]. Information Processing Letters, 2002, 81: 81-84.

[4] Browne S, Yechiali U. Scheduling deteriorating jobs on a single processor[J]. Operations Research, 1990, 38: 495-498.

[5] Cheng T C E, Kang L, Ng C T. Due-date assignment and single machine scheduling with deteriorating jobs[J]. Journal of the Operational Research Society, 2004, 55: 198-203.

[6] Cheng T C E, Kang L, Ng C T. Single machine due-date scheduling of jobs with decreasing start-time dependent processing times[J]. International Transactions in Operational Research, 2005, 12: 355-366.

[7] Yang S J, Yang D L, Cheng T C E. Single-machine due-window assignment and scheduling with job-dependent aging

effects and deteriorating maintenance [J]. Computers and Operations Research, 2010, 37: 1510-1514.
[8] Zhao C L, Tang H Y. Single machine scheduling problems with deteriorating jobs [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 161: 865-874.
[9] Koulamas C, Kyparisis G J. Single-machine scheduling problems with past-sequence-dependent setup times [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 187: 1045-1049.
[10] Biskup D, Herrmann J. Single-machine scheduling against due dates with past-sequence-dependent setup times [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 191: 587-592.
[11] Zhao C L, Tang H Y. Single machine scheduling with past-sequence-dependent setup times and deteriorating jobs [J]. Computers and Industrial Engineering, 2010, 59: 663-663.
[12] Hsu C J, Kuo W H, Yang D L. Unrelated parallel machine scheduling with past-sequence-dependent setup time and learning effects [J]. Applied Mathematical Model, 2010, 35: 1492-1496.
[13] Graham R L, Lawler E L, Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey [J]. Ann Discrete Math, 1979, 5: 287-326.
[14] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities [M]. London: Cambridge University Press, 1967.

Operations Research and Cybernetics

The Scheduling of Unrelated Parallel Machine of p-s-d Setup Time of Deteriorating Job

REN Hui-min, YANG Ming-ming
(College of Management Science, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China)

Abstract: In this paper, we consider an unrelated parallel machine scheduling problem with setup time and deteriorating jobs simultaneously. The setup time is proportional to the length of the already processed jobs, that is, the setup time is past-sequence-dependent (p-s-d). It is assumed that the job processing time is defined by functions dependent on their starting times. The objective is to minimize the total completion time. If the number n_i of jobs for each machine M_i is known in advance, the problem of the total completion time minimization on unrelated parallel machines can be formulated as an assignment problem. The assignment problem is solved in $O(n^3)$ time and $n_i (i=1,2,\cdots,m)$ can be determined in $O(n^{m-1})$ time. So we show that the proposed problem can be solved in polynomial time. We also discuss two special cases of the problem. First, each job has the same deterioration δ and setup parameter b on different machines. The normal processing time of job j is a_j no matter what machine the job is assigned to. That is all jobs are processed on identical parallel machines. Second, based on the first case, we also consider all jobs with no deterioration, that is $\delta_i=0$. For the two cases, we show that they can be optimally solved by lower order algorithms.

Key words: scheduling; unrelated parallel machine; setup time; deteriorating job

(责任编辑 黄 颖)