运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20111110.1503.003

非光滑伪不变凸性的一个注记*

赵 洁，万 轩，龙莆均
(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要：文献[5]在前人的基础上证明了半严格预拟不变凸函数的一个充分条件，即在一定条件下可微的伪不变凸函数关于相同的向量值函数 η 为半严格预拟不变凸函数。本文将此结论推广到了非光滑的情形，利用 Clarke 次微分理论和条件 C，证明了在关于向量值函数 η 的开不变凸集上，满足局部 Lipschitz 条件的伪不变凸函数关于相同的向量值函数 η 是半严格预拟不变凸函数。

关键词：非光滑伪不变凸；预拟不变凸；半严格预拟不变凸
中图分类号：O221.2 文献标志码：A 文章编号：1672-6693(2011)06-0010-03

研究函数的广义凸性非常重要，一些学者先后对广义凸性做了大量深入的研究工作[1-10]。1991 年，Pini 提出了预不变凸、预拟不变凸和预伪不变凸函数的概念[1]。1995 年，Mohan 和 Neogy 建立了研究广义凸性的一个重要工具条件 C[2]。文献[3]证明了可微的伪凸函数关于相同向量值函数 η 是拟凸函数，也是半严格拟凸函数。Yang 等人证明了可微的伪不变凸函数关于相同向量值函数 η 为预拟不变凸函数[4]。而文献[5]则证明了可微的伪不变凸函数 η 关于相同向量值函数为半严格预拟不变凸函数。本文利用 Clarke 的非光滑理论[6]和条件 C[2]证明了满足局部 Lipschitz 的伪不变凸函数 η 关于相同向量值函数为半严格预拟不变凸函数。

1 预备知识

本文假设 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集，$f:X \to \mathbf{R}$ 为局部 Lipschitz 函数。

定义 1[7] 称 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 是不变凸集，若存在 $\eta(x,y):X \times X \to \mathbf{R}^n$，使得 $y+\lambda\eta(x,y) \in X, \lambda \in [0,1]$。

定义 2[7] $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 关于 $\eta(x,y)$ 为不变凸集，称 $f(x):X \to \mathbf{R}$ 是关于 $\eta(x,y)$ 的预不变凸函数，若对 $\forall x, y \in X, \lambda \in [0,1]$ 有 $f(y+\lambda\eta(x,y)) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

定义 3[6] f 在 $x \in X$ 沿方向 $v \in \mathbf{R}^n$ 的 Clarke 广义方向导数定义为

$$f^0(x;v)=\lim_{y\to x}\sup_{t\downarrow 0}\frac{f(y+\lambda v)-f(y)}{\lambda}$$

f 在 $x \in X$ 的 Clarke 广义方向次微分：$\partial^c f(x)=\{\xi \in \mathbf{R}^n: f^0(x;v) \geqslant \xi^{\mathrm{T}}v, \forall v \in \mathbf{R}^n\}$，有 $f^0(x;v)=\max\{\langle\xi,v\rangle, \forall \xi \in \partial^c f(x), \forall v \in \mathbf{R}^n\}$。

定义 4[7] X 是关于 η 的不变凸集，称 f 为关于相同的 η 的伪不变凸函数，若对 $\forall x, y \in X, \forall \xi \in \partial^c f(x)$，有 $\langle\xi,\eta(x,y)\rangle \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$，$f(x)<f(y) \Rightarrow \langle\xi,\eta(x,y)\rangle<0$。

定义 5[1] X 是关于 η 的不变凸集，称 f 为关于相同的 η 的预不变拟凸函数，若对 $\forall x, y \in X, \lambda \in [0,1]$，$\xi \in \partial^c f(x)$，有 $f(y+\lambda\eta(x,y)) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}$。

定义 6[8] X 是关于 η 的不变凸集，称 f 为关于相同的 η 的半严格预不变拟凸函数，若对 $\forall x, y \in X, \lambda \in$

* 收稿日期：2011-04-07 修回日期：2011-06-28 网络出版时间：2011-11-10 15:03
资助项目：重庆市教委研究项目(No. KJ100608)；重庆市自然科学基金项目(No. CSTC2010BB2090)
作者简介：赵洁，女，硕士研究生，研究方向为非光滑优化理论。
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20111110.1503.201106.10_003.html

$(0,1)$,$f(x) \neq f(y)$,有 $f(y+\lambda\eta(x,y)) < \max\{f(x),f(y)\}$。

条件 C[2]　**称** η **满足条件** C,**若** $\forall x,y \in X,\lambda \in [0,1]$,**则**

$$C_1: \eta(y,y+\lambda\eta(x,y)) = -\lambda\eta(x,y), C_2: \eta(x,y+\lambda\eta(x,y)) = (1-\lambda)\eta(x,y)$$

2 主要结论及其证明

定理　若 X 关于 η 为开不变凸集,η 满足条件 C,f 在 X 上满足局部 Lipschitz 条件且为伪不变凸,则 f 关于相同的 η 为半严格预拟不变凸函数。

证明　反证法。假设 f 不是关于 η 为半严格预拟不变凸函数,则存在 $x_1,x_2 \in X,\lambda \in (0,1)$,使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$,且 $f(x^*) \geqslant \max\{f(x_1),f(x_2)\}$,其中 $x^* = x_2 + \lambda\eta(x_1,x_2)$。

不失一般性,假设 $f(x_1) < f(x_2)$,则有 $f(x_1) \leqslant f(x^*)$,由 f 关于 η 为伪不变凸,得

$$\langle \xi,\eta(x_1,x^*)\rangle < 0, \xi \in \partial^C f(x^*) \tag{1}$$

由 η 满足条件 C,有

$$\eta(x_1,x^*) = \eta(x_1,x_2+\lambda\eta(x_1,x_2)) = (1-\lambda)\eta(x_1,x_2)$$

$$\eta(x_2,x^*) = \eta(x_2,x_2+\lambda\eta(x_1,x_2)) = -\lambda\eta(x_1,x_2)$$

所以

$$\eta(x_1,x^*) = -\frac{1-\lambda}{\lambda}\eta(x_2,x^*) \tag{2}$$

结合(1)和(2)式有

$$\langle \xi,\eta(x_2,x^*)\rangle > 0, \xi \in \partial^c f(x^*) \tag{3}$$

故存在一点 $\bar{x} = x^* + \mu\eta(x_2,x^*)$,$\mu \in (0,1)$。

下证 $f(\bar{x}) > f(x^*) = f(x_2)$。反证法,假设 $\forall \mu \in (0,1)$,$f(\bar{x}) \leqslant f(x^*)$,即 $f(x^* + \mu\eta(x_2,x^*)) \leqslant f(x^*)$。$f$ 在 X 上满足局部 Lipschitz 条件,对于 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$f^0(x^*,\eta(x_2,x^*)) = \lim_{y^*\to x^*}\sup_{t\downarrow 0}\frac{f(y^*+t\eta(x_2,x^*)) - f(y^*)}{t} \leqslant \lim_{t\downarrow 0}\sup\frac{f(x^*+t\eta(x_2,x^*)) - f(x^*)}{t} + \varepsilon < \varepsilon$$

由 ε 的任意性,$f^0(x^*,\eta(x_2,x^*)) \leqslant 0$。所以 $\exists \xi \in \partial^c f(\bar{x})\langle \xi,\eta(x_2,x^*)\rangle \leqslant 0$,与(3)式矛盾。

再由 f 关于 η 伪不变凸,则 $\langle \hat{\xi},\eta(x^*,\bar{x})\rangle < 0 \langle \hat{\xi},\eta(x_2,\bar{x})\rangle < 0$,$\hat{\xi} \in \partial^c f(\bar{x})$。而由条件 C

$$\eta(x_2,\bar{x}) = \eta(x_2,x^*+\mu\eta(x_2,x^*)) = (1-\mu)\eta(x_2,x^*)$$

$$\eta(x^*,\bar{x}) = \eta(x^*,x^*+\mu\eta(x_2,x^*)) = \mu\eta(x_2,x^*)$$

与上述两式同时成立矛盾,故 f 关于相同的 η 为半严格预拟不变凸。　　证毕

参考文献:

[1] Pini R. Invexity and generalized convexity [J]. Optimization,1991,22:513-525.

[2] Mohan S R,Neogy S K. On lnvex sets and preinvex functions[J]. JMMA,1995,189:901-908.

[3] Bazaraa M S,Shetty C M. Nonlinear programming theory and algorithms[M]. New York:John Whley & Sons,1979.

[4] Yang X M,Yang X Q,Teo K L. Generalized invexity and generlized invariant monotonicity [J]. JOTA,2003,117(3):607-625.

[5] 赵克全. 半严格拟不变凸的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2006,23(3):1-3.

[6] Clarke F H. Optimization and nonsmooth analysis[M]. New York:John Wiely,1983.

[7] Well T,Mond B. Preinvex functions in multiple-objective optimization[J]. JMAA,1988,136:29-38.

[8] Yang X M,Yang X Q,Teo K L. Characterizations and applications of prequasi-invex functions [J]. JOTA,2001,110(3):645-668.

[9] 袁德辉,邓声南. 非光滑规划的最优性及其对偶性[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,199.

[10] 焦合华. 半(p,r)-(预)不变凸函数及其规划的鞍点最优性条件[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2007,31(4):394-399.

Operations Research and Cybernetics

A Note on Nonsmooth Pseudoinvexity

ZHAO Jie, WAN Xuan, LONG Pu-jun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Zhao et al has obtained a sufficient condition about semi-strictly prequasi-invex functions, which the differentiable pseudo-invex functions must be semi-strictly prequasi-invex functions with the same vector-valued function under some suitable conditions. In this paper, it was generalized that the corresponding results to the nonsmooth case. It was proved that the nonsmooth pseudo-invex functions which based on the open invex set with respect to the vector-valued function and satisfied the condition of Lipschitz which are semi-strictly prequasi-invex functions with respect to the same vector-valued function by making use of the condition C and the theory of Clarke subdifferential.

Key words: nonsmooth pseudoinvexity; prequasiinvexity; semi-strictly prequasiinvexity

(责任编辑 黄 颖)