DOI:CNKI:50-1165/N.20111110.1503.008

格上的 s-传递模糊矩阵*

姜　超
(南通航运职业技术学院 基础教学部,江苏 南通 226010)

摘要:在模糊矩阵文献中,人们不仅用 min 和 max 这两个运算来定义和讨论矩阵的运算,还用[0,1]上的三角模来定义和讨论矩阵的运算。本文利用完备分配格 L 上三角 s-模及模糊矩阵运算,定义了 s-传递模糊矩阵,并且给出 s-传递模糊矩阵的一些性质。如设 S 是 $\wedge$ -分配 s-模,A 是 s-幂等矩阵,那么,A 是幂等矩阵当且仅当 A 是传递矩阵;传递的对称矩阵是幂等矩阵;设 $A\in L^{n\times n}$是传递矩阵,$B=A\wedge A^{\tau}$。则 B 是传递的对称矩阵,因而也是幂等矩阵。

关键词:格;三角 s-模;s-传递模糊矩阵
中图分类号:O151.21　　文献标志码:A　　文章编号:1672-6693(2011)06-0041-03

众所周知,矩阵是现代数学中非常重要的概念,在分析学、代数学、几何学、逻辑学和组合数学等学科中都有广泛应用。人们不仅关心数环和数域上的矩阵,还关心抽象环和抽象域的矩阵,甚至格上的矩阵。例如,Boole 矩阵既可以看成抽象的二元域{0,1}上的矩阵,又可以看成二元格{0,1}上的矩阵,在经典的二值逻辑的代数理论中占有重要地位;模糊矩阵,也就是格([0,1],min,max)上的矩阵,在模糊推理和模糊系统分析中有着重要的应用。在模糊矩阵文献中,人们不仅用 min 和 max 这两个运算来定义和讨论矩阵的运算,还用[0,1]上的三角模来定义和讨论矩阵的运算[1-5]。在文献[6]中给出了完备分配格 L 上三角 s-模的定义及相关模糊矩阵运算,进一步,本文给出 s-传递模糊矩阵的定义,并且给出 s-传递模糊矩阵的一些全新的结果。

关于格上三角模的一些相关定义、性质、符号的含义等,在文献[5]中都可以找到。

1 格上的 s-传递模糊矩阵

定义 1　设 $A=(a_{ij})\in L^{m\times n}$,$a\in L$。定义 $A_a=(b_{ij})\in L^{m\times n}$如下:对于任意的 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$,$j\in\{1,2,\cdots,n\}$

$$b_{ij}=\begin{cases}1,\text{若 } a_{ij}\geq a\\0,\text{否则}\end{cases}$$

A_a 称为 A 的 a-割。

定义 2　设 S 是 L 上的二元运算。若 S 满足条件:$\forall a,b,c\in L$

1) $(a\ S\ b)\ S\ c=a\ S\ (b\ S\ c)$　　结合律

2) $(a\ S\ b)=(b\ S\ a)$　　交换律

3) $b\leqslant c\Rightarrow a\ S\ b\leqslant a\ S\ c$　　单调性

4) $a\ S\ 0=a$　　边界条件

则称 S 为 L 上的三角余模,简称 s-模。

定义 3　设 S 为 s-模,$A=(a_{ij})\in L^{n\times n}$。

1)若 $E_n\leqslant A$,则称 A 为自反矩阵;若 $E_n\wedge A=0_{n\times n}$,则称 A 为反自反矩阵。

2)若 $A^{2(s)}\leqslant A$,则称 A 为 S-传递矩阵;若 $A^2\leqslant A$,则称 A 为传递矩阵。

3)若存在 $k\in Z_+$,使得 $A^{k(s)}=0_{n\times n}$,则称 A 为 S-幂零矩阵;若存在 $k\in Z_+$,使得 $A^k=0_{n\times n}$,则称 A 为幂零矩阵。

4)若 $A^{2(s)}=A$,则称 A 为 s-幂等矩阵;若 $A^2=A$,则称 A 为幂等矩阵。

5)若 $A^{\tau}=A$,则称 A 为对称矩阵。

定理 1　设 $A=(a_{ij})\in L^{n\times n}$,若 A 是传递矩阵,则对于每一个 $a\in L$,A_a 是传递矩阵。

证明　设 A 是传递矩阵,并设 a 为 L 中任意一个给定的元素。令 $A_a=(b_{ij})$,$A^2=(c_{ij})$,$(A_a)^2=(d_{ij})$,任意给定 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$。

比较 d_{ij}和 b_{ij},当 $d_{ij}=0$ 时,有 $d_{ij}\leqslant b_{ij}$。现在设 $d_{ij}=1$,即 $\wedge_{k=1}^{n}(b_{ik}\vee b_{kj})=1$,于是,对任意 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $b_{ik_0}\vee b_{k_0j}=1$,从而 $a_{ik_0}\vee a_{k_0j}\geqslant a$。

由此可见,$c_{ij}=\wedge_{k=1}^{n}(a_{ij}\vee a_{kj})\geqslant a$。由于 A 是

* 收稿日期:2011-05-10　修回日期:2011-08-30　网络出版时间:2011-11-10 15:03
作者简介:姜超,男,副教授,硕士,研究方向为模糊数学。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20111110.1503.201106.41_008.html

传递矩阵,有 $c_{ij} \leqslant a_{ij}$。因此 $a_{ij} \geqslant a$,从而 $b_{ij}=1$。所以总有 $d_{ij} \leqslant b_{ij}$。这样一来,由于 i,j 的任意性,有 $(A_a)^2 \leqslant A_a$。 证毕

定理2 设 S 是 s-模,$A,B \in L^{n\times n}$,那么下列命题成立:

1)若 A 是传递矩阵,则 A 是 s-传递矩阵;

2)A^τ 是 s-传递矩阵当且仅当 A 是 s-传递矩阵;

3)若 A 是 s-传递矩阵,则对于任意的 $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$,$i \neq j$,$P(i,j) \circ A \circ P(i,j)$ 是 s-传递矩阵;

4)若 A 是 s-传递矩阵,则对于任意的正整数 k,$A^{k+1(S)} \leqslant A^{k(S)}$,$A^{k(S)}$ 是 s-传递矩阵;

5)若 S 是 $\wedge$-分配 s-模,A 和 B 都是 s-传递矩阵,并且 $A \cdot sB = B \cdot sA$,则 $A \cdot sB$ 也是 s-传递矩阵。

证明 命题(1)容易验证。显然 $A^{2(S)} \leqslant A \Leftrightarrow (A^{2(S)})^\tau \leqslant A^\tau$,$(A^{2(S)})^\tau \leqslant A^\tau \Leftrightarrow (A^\tau)^{2(S)} \leqslant A^\tau$,因此 $A^{2(S)} \leqslant A \Leftrightarrow (A^\tau)^{2(S)} \leqslant A^\tau$。由此可见,命题(2)成立。

现在设 A 是 s-传递矩阵。不难验证

$$(P(i,j) \cdot s\, A \cdot s\, P(i,j)) \cdot s\, (P(i,j) \cdot s\, A \cdot s\, P(i,j)) = P(i,j) \cdot s\, (A \cdot s\, A) \cdot s\, P(i,j) \leqslant P(i,j) \cdot sA \cdot s\, P(i,j)。$$

所以命题(3)成立。

当 $k=1$ 时,由于 $A^{k(S)}$ 是 s-传递矩阵,当然有 $A^{k+1(S)} \leqslant A^{k(S)}$。假设当 $k=p$ 时有 $A^{k+1(S)} \leqslant A^{k(S)}$,当 $k=p+1$ 时,根据归纳假设和 $\cdot s$ 的单调性,有

$$A^{k+1(S)} = A^{p+1(S)} \cdot sA \leqslant A^p \cdot sA = A^{p+1(S)} = A^{k(S)}$$

所以,对于任意的正整数 k,$A^{k+1(S)} \leqslant A^{k(S)}$。由此可见,对于任意的正整数 $k \geqslant 2$,$A^{k(S)} \leqslant A$,从而,根据 $\cdot s$ 的单调性,有 $A^{k(S)} \cdot sA^{k(S)} \leqslant A^{k-1(S)} \cdot sA = A^{k(S)}$。所以,对于任意的正整数 k,$A^{k(S)}$ 是 s-传递矩阵。这表明命题(4)成立。

最后,若 S 是 $\wedge$-分配 s-模,A 和 B 都是 s-传递矩阵,并且 $A \cdot s\, B = B \cdot sA$,则 $\cdot s$ 满足结合律并具有单调性,从而

$$(A \cdot sB) \cdot s\, (A \cdot sB) = A \cdot s\, (B \cdot sA) \cdot s\, B = A \cdot s\, (A \cdot s\, B) \cdot s\, B = (A \cdot sA) \cdot s\, (B \cdot s\, B) \leqslant A \cdot sB$$

这表明 $A \cdot s\, B$ 是 s-传递矩阵。所以命题(5)成立。 证毕

定理3 设 S 是 $\wedge$-分配 s-模,A 是 s-幂等矩阵,那么,A 是幂等矩阵当且仅当 A 是传递矩阵。

证明 显然,当 A 是幂等矩阵时,A 是传递矩阵。

现在假设 A 是传递矩阵,于是 $A^2 \leqslant A$。由于 A 是 s-幂等矩阵,又有 $A^{2(S)}=A$。因此 $A^2 \leqslant A^{2(S)}$。另一方面 $A^{2(S)} \leqslant A^2$。所以 $A^{2(S)}=A^2$,从而 $A^2=A$,这就是说,A 是幂等矩阵。 证毕

定理4 传递的对称矩阵是幂等矩阵。

证明 设 $A=(a_{ij}) \in L^{n\times n}$ 是传递的对称矩阵。令 $E_A=\mathrm{Dial}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,其中 $a_i=\vee_{j=1}^{n}(a_{ij} \vee a_{ji})$,$i \in \{1,2,\cdots,n\}$。通过简单的演算可知 $E_A \cdot A = A \cdot E_A = A$。这里,由 A 是对称矩阵,有 $a_i=\vee_{j=1}^{n} a_{ij}$,$i \in \{1,2,\cdots,n\}$。一方面,由于 A^2 的第 i 行第 i 列的元素为 $\wedge_{j=1}^{n}(a_{ij} \vee a_{ji})=\vee_{j=1}^{n} a_{ij}$,因此 $E_A \leqslant A^2$。另一方面,由 A 是传递矩阵,有 $A^2 \leqslant A$。利用矩阵合成的单调性,可得 $A=E_A \cdot A \leqslant A^2 \cdot A \leqslant A \cdot A = A^2$。所以 $A^2=A$,即 A 是幂等矩阵。 证毕

定理5 设 $A \in L^{n\times n}$ 是传递矩阵,$B=A \wedge A^\tau$,则 B 是传递的对称矩阵,因而也是幂等矩阵。

证明 显然 B 是对称矩阵,由于 $B \leqslant A$ 且 A 是传递矩阵,因为 $B^2 \leqslant A^2 \leqslant A$;由于 $B \leqslant A^\tau$ 且 A 是传递矩阵,$B^2 \leqslant (A^\tau)^2 \leqslant A^\tau$。因此 $B^2 \leqslant A \wedge A^\tau = B$,所以 B 是传递矩阵,B 是幂等矩阵。 证毕

参考文献:

[1] Anthony J M, Sherwood H. Fuzzy groups redefined[J]. J Math Anal Appl, 1979(69):124-130.

[2] Schweizer B, Sklar A. Associative functions and statistical triangular inequalities[J]. PuN Math Debrecen, 1961, 8:169-186.

[3] Yu Y D. L—sets and L—universal algebras[C]//Schweizer B. Advances in Fuzzy Theory and Technology. NC: Bookwrights—Independent Book Producer, 1992:91-114.

[4] Yu Y D, Moordeson J N, Cheng S C. Elements of L—algebra[Z]. Omaha, NB, USA: Creighton University, 1994.

[5] 姜超. L-矩阵与三角模[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(6):24-30.

[6] 姜超. 完备分配格 L-上的 s-幂零矩阵[J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(3):33-37.

[7] 程静,何承源. 广义酋矩阵与广义 Hermite 矩阵的一些性质[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2010, 27(3):58-59.

[8] 夏璇,毕公平. 复合矩阵及其在 Hermite 矩阵中的应用[J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2009, 33(3):312-326.

s-Transfer Fuzzy Matrix on Lattice

JIANG Chao

(Dept. of Basic Courses, Nantong Shipping College, Nantong Jiangsu 226010, China)

Abstract: In the articles on fuzzy matrix, people define and discuss matrix operation not only by the operations of min and max, but also by triangle norm in [0, 1]. Using triangular s-norms on a complete distributive lattice L and fuzzy matrix operations, we define the s-transfer fuzzy matrix, and give some properties of the s-transfer fuzzy matrix. For example, suppose S is the s-norm distributed by $\wedge$ and A is S-idempotent matrix, then A is idempotent matrix, when and only when A is transfer matrix and the transferred symmetric matrix is idempotent matrix. Suppose $A \in L^{n \times n}$ is transferred matrix, $B = A \wedge A^{\tau}$, then B transfers symmetric matrix, and therefore B is also idempotent matrix.

Key words: lattice; triangular s-norm; s-transfer fuzzy matrix

(责任编辑 游中胜)