DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2011. 01. 009

一个新的 Hilbert 型积分不等式*

陈广生[1]，丁宣浩[2]

(1. 广西现代职业技术学院 计算机工程系，广西 河池 547000；2. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067)

摘要：Hilbert 积分不等式在分析学中有重要的应用。本文通过引入独立参数 λ，利用权函数方法和实分析技巧研究了 Hilbert 型积分不等式，建立了一个具有独立参数的 Hilbert 型积分不等式 $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|\ln x-\ln y|f(x)g(x)}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+\max\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{A}{\lambda^2}\left\{\int_0^{\infty}x^{1-\lambda}f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{\infty}x^{1-\lambda}g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$，证明了它的常数因子为最佳值。作为应用，给出它的具有最佳常数因子的等价形式 $\int_0^{\infty}y^{\lambda-1}\left[\int_0^{\infty}\frac{|\ln x-\ln y|f(x)}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+\max\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\mathrm{d}x\right]^2\mathrm{d}y<\left[\frac{A}{\lambda^2}\right]^2\int_0^{\infty}x^{1-\lambda}f^2(x)\mathrm{d}x$。本文所得到的不等式是新的不等式。

关键词：Hilbert 型积分不等式；权函数；不等式；最佳常数因子

中图分类号：O178　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2011)01-0037-03

设 $f(x),g(x)\geqslant 0$，使得 $0<\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有[1]

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\pi\left[\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

这里，常数因子 π 为最佳值。(1) 式称为 Hilbert 积分不等式，它在分析学中有重要应用[2]。

关于(1) 式的推广和改进已经取得了许多成果[3-5]。

最近，文献[6] 给出了如下一个新的 Hilbert 型积分不等式。

设 $f(x),g(x)\geqslant 0$，使得 $0<\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(x)}{x+y+\max\{x,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<D\left\{\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/2} \tag{2}$$

这里，常数因子 $D=\sqrt{2}(\pi-2\arctan\sqrt{2})$ 为最佳值。

本文在(2) 式的基础上，引入参数 λ，利用权函数，导出一个新的 Hilbert 型积分不等式，作为应用，建立它的等价式。

1 引理

引理 1　设 $\lambda>0$，定义权函数

$$\omega_{\lambda}(x)=\int_0^{\infty}\frac{|\ln x-\ln y|x^{\lambda/2}y^{\lambda/2-1}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+\max\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\mathrm{d}y,x\in(0,\infty) \tag{3}$$

则有

$$\omega_{\lambda}(x)=\frac{A}{\lambda^2} \tag{4}$$

这里，$A=-8\int_0^1\frac{\ln s}{2+s^2}\mathrm{d}s=3.809896\cdots$。

证明　令 $u=y^{\lambda}/x^{\lambda}$，则有

$$\omega_{\lambda}(x)=\int_0^{\infty}\frac{|\ln x-\ln y|x^{\lambda/2}y^{\lambda/2-1}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+\max\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{|\ln u|u^{-\frac{1}{2}}}{1+u+\max\{1,u\}}\mathrm{d}u=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^1\frac{-\ln u\,u^{-\frac{1}{2}}}{2+u}\mathrm{d}u+$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_1^{\infty}\frac{\ln u\,u^{-\frac{1}{2}}}{1+2u}\mathrm{d}u=-\frac{2}{\lambda^2}\int_0^1\frac{\ln u\,u^{-\frac{1}{2}}}{2+u}\mathrm{d}u=$$

$$-\frac{8}{\lambda^2}\int_0^1\frac{\ln s}{2+s^2}\mathrm{d}s\left(s=u^{\frac{1}{2}}\right)$$

令 $A=-8\int_0^1\frac{\ln s}{2+s^2}\mathrm{d}s=3.809896\cdots$，故(4) 式

* 收稿日期：2010-05-10　　收稿日期：2010-07-14
资助项目：国家自然科学基金资助项目(No. 10871217)
作者简介：陈广生，男，硕士，讲师，研究方向为解析不等式、小波分析和热辐射。

为真。 证毕

引理2 设 $\lambda > 0, 0 < \varepsilon < \lambda$,令

$$J(\varepsilon) = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{|\ln x - \ln y|}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} x^{\frac{\lambda-2-\varepsilon}{2}} y^{\frac{\lambda-2-\varepsilon}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则

$$J(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{A}{\lambda^2} + o(1)\right] - O(1) \quad (\varepsilon \to 0^+) \qquad (5)$$

证明 做变换 $u = y^\lambda / x^\lambda$,则

$$J(\varepsilon) = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{|\ln x - \ln y|}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} x^{\frac{\lambda-2-\varepsilon}{2}} y^{\frac{\lambda-2-\varepsilon}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\int_{1/x^\lambda}^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2\lambda}}|\ln u|}{1+u+\max\{1,u\}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2\lambda}}|\ln u|}{1+u+\max\{1,u\}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x -$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\int_0^{x^{-\lambda}} \frac{u^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2\lambda}}|\ln u|}{1+u+\max\{1,u\}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x >$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{A}{\lambda^2} + o(1)\right] - \frac{1}{\lambda^2}\int_1^\infty x^{-1}\int_0^{x^{-\lambda}} \frac{u^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2\lambda}}|\ln u|}{1+u}\mathrm{d}u\mathrm{d}x >$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{A}{\lambda^2} + o(1)\right] - \frac{4}{\lambda(\lambda-\varepsilon)^2} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{A}{\lambda^2} + o(1)\right] - O(1)$$

故(5)式成立。 证毕

2 主要结论

定理1 设 $\lambda > 0$,f,g 为非负实可测函数,使得 $0 < \int_0^\infty x^{1-\lambda} f^2(x)\mathrm{d}x < \infty$,$0 < \int_0^\infty x^{1-\lambda} g^2(x)\mathrm{d}x < \infty$ 则有

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y| f(x) g(x)}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y <$$

$$\frac{A}{\lambda^2}\left\{\int_0^\infty x^{1-\lambda} f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\left\{\int_1^\infty x^{1-\lambda} g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/2} \qquad (6)$$

这里,常数因子 $\frac{A}{\lambda^2}$ 为最佳值。

证明 由带权的 Cauchy 不等式[7] 和引理1得

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y| f(x) g(y)}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} \frac{y^{(\lambda/2-1)/2}}{x^{(\lambda/2-1)/2}} \frac{x^{(\lambda/2-1)/2}}{y^{(\lambda/2-1)/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\left\{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f^2(x) x^{\lambda/2} y^{\lambda/2-1} x^{1-\lambda}}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left\{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{g^2(y) x^{\lambda/2-1} y^{\lambda/2} y^{1-\lambda}}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left\{\int_0^\infty \omega_\lambda(x) x^{1-\lambda} f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty \omega_\lambda(y) y^{1-\lambda} g^2(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{A}{\lambda^2}\left\{\int_0^\infty x^{1-\lambda} f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty y^{1-\lambda} g^2(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}$$

下面应用 Cauchy 不等式证明上式中间取严格不等号,若不然,必存在不全为0的常数 a,b 使得 $af^2(x)y^{\lambda/2-1}x^{1-\lambda/2} = bg^2(y)x^{\lambda/2-1}y^{1-\lambda/2}$ a.e 于 $(0,\infty)\times(0,\infty)$。即有 $axf^p(x)x^{1-\lambda} = byg^q(y)y^{1-\lambda}$ a.e 于 $(0,\infty)\times(0,\infty)$,于是有常数 C,使 $axf^2(x)x^{1-\lambda} = C$ a.e 于 $(0,\infty)$。不妨设 $a \neq 0$,则可得等式 $x^{1-\lambda}\cdot f^2(x) = \frac{C}{a}x^{-1}$ a.e 于 $(0,\infty)$,无论 C 是否为0,积分的结果必与 $0 < \int_0^\infty x^{1-\lambda} f^2(x)\mathrm{d}x < \infty$ 相矛盾。于是(6)式成立。

设 ε 为任意小的正数,定义函数 $f_\varepsilon(x)$,$g_\varepsilon(x)$ 使

$$f_\varepsilon(x) = 0, x \in (0,1); f_\varepsilon(x) = x^{\frac{\lambda-2-\varepsilon}{2}}, x \in [1,\infty)$$

$$g_\varepsilon(x) = 0, x \in (0,1); g_\varepsilon(x) = x^{\frac{\lambda-2-\varepsilon}{2}}, x \in [1,\infty)$$

若(6)式的常数因子不是最佳值,则存在正数 $K < \frac{A}{\lambda^2}$,使(6)式的常数因子 $\frac{A}{\lambda^2}$ 换上 K 仍成立。特别地,由(5)式,有

$$\left[\frac{A}{\lambda^2} + o(1)\right] - \varepsilon O(1) <$$

$$\varepsilon\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{|\ln x - \ln y|}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} x^{\frac{\lambda-2-\varepsilon}{2}} y^{\frac{\lambda-2-\varepsilon}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y <$$

$$\varepsilon K\left[\int_0^\infty x^{1-\lambda} f_\varepsilon^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^\infty x^{1-\lambda} g_\varepsilon^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon K \frac{1}{\varepsilon} = K$$

令 $\varepsilon \to 0^+$,有 $K \geqslant \frac{A}{\lambda^2}$。这与假设 $K < \frac{A}{\lambda^2}$ 矛盾,故常数因子 $\frac{A}{\lambda^2}$ 为最佳值。 证毕

定理2 设 $\lambda > 0$,f 为非负实可测函数,使得 $0 < \int_0^\infty x^{1-\lambda} f^2(x)\mathrm{d}x < \infty$,则有

$$\int_0^\infty y^{\lambda-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y| f(x)}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}}\mathrm{d}x\right]^2\mathrm{d}y <$$

$$\left[\frac{A}{\lambda^2}\right]^2\int_0^\infty x^{1-\lambda} f^2(x)\mathrm{d}x \qquad (7)$$

这里,常数因子 $\left[\frac{A}{\lambda^2}\right]^2$ 为最佳值,且(7)式与(6)式等价。

证明 定义函数

$$g(y) = y^{\lambda-1}\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y| f(x)}{x^\lambda + y^\lambda + \max\{x^\lambda, y^\lambda\}}\mathrm{d}x, y \in (0,\infty)$$,则由(6)式,有

$$0 < \int_0^\infty y^{1-\lambda} g^2(y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\infty y^{\lambda-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y| f(x)}{x^\lambda+y^\lambda+\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\right]^2\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y| f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda+\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant \tag{8}$$

$$\frac{A}{\lambda^2}\left[\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^\infty y^{1-\lambda}g^2(y)\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}}$$

因此有

$$0<\int_0^\infty y^{1-\lambda}g^2(y)\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\left[\frac{A}{\lambda^2}\right]^2\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^2(x)\mathrm{d}x<\infty \tag{9}$$

这说明应用(6)式,(8)式取严格不等号;(9)式亦然,故(7)式成立。

反之,设(7)式成立,由 Holder 不等式,有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y| f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda+\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^\infty y^{(\lambda-1)/2}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y| f(x)}{x^\lambda+y^\lambda+\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\right]y^{(1-\lambda)/2}g(y)\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\left\{\int_0^\infty y^{\lambda-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y| f(x)}{x^\lambda+y^\lambda+\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\right]^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left\{\int_0^\infty y^{1-\lambda}g^2(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}<$$

$$\frac{A}{\lambda^2}\left\{\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty x^{1-\lambda}g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

再由(7)式,得(6)式。因此(6)式和(7)式等价。若(7)式的常数因子不是最佳值,则由(7)式得出(6)式的常数因子也不是最佳的矛盾,说明(7)式的常数因子$\left[\frac{A}{\lambda^2}\right]^2$是最佳值。

参考文献:

[1] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[2] Mintrinovie D S, Pecaric J E, Fiilk A M. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[3] 胡克. 几个重要的不等式[J]. 江西师院学报:自然科学版, 1979, 3(1): 1-4.

[4] Yang B C. On Hilbert's integral inequality[J]. J Math Anal Appl, 1998, 220: 778-785.

[5] Kuang J C. On new extension of Hilbert's integral inequality[J]. J Math Anal Appl, 1999, 235: 608-614.

[6] Li Y J, Wu J, He B. A new Hilbert-type integral inequality and the equivalent form[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2006: 1-6.

[7] 匡继昌. 常用不等式[M]. 长沙:湖南教育出版社, 1993.

[8] 陈广生, 丁宣浩. 一个多参数的逆向 Hilbert 型不等式[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2010, 35(5): 32-39.

A New Hilbert's Type Integral Inequality

CHEN Guang-sheng[1], *DING Xuan-hao*[2]

(1. Dept. of Computer Engineering, Guangxi Modern Vocational Technology College, Hechi Guangxi 547000;
2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Hilbert's integral inequality is important in analysis and its applications. In this paper, a Hilbert-type integral inequality with independent parameter was investigated, by introducing an independent parameter λ, using the way of weight function and the method of real analysis, we established a Hilbert's type integral inequality $\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y| f(x)g(x)}{x^\lambda+y^\lambda+\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{A}{\lambda^2}\{\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^\infty x^{1-\lambda}g^2(x)\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}}$, and its constant factors were proved to be the optimum value. As applications, we gave its equivalent form $\int_0^\infty y^{\lambda-1}\left[\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y| f(x)}{x^\lambda+y^\lambda+\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\right]^2<\left[\frac{A}{\lambda^2}\right]^2\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^2(x)\mathrm{d}x$ with a best constant factor. They were new integral inequalities which we established in the paper.

Key words: Hilbert's type integral inequality; weight function; holder inequality; best constant factor

(责任编辑 游中胜)