运筹学与控制论

CNKI:50-1165/N.20110917.1359.002

混合整数拟分离的向量值优化的可分化理论*

王 磊[1,2], 白富生[2]
(1. 江西省九江市第三中学，江西 九江，332000；2. 重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要：在由相互作用的子系统构成的大规模系统的优化中，许多分层和不分层的分化方法已经提出来。除了一些例外，所有这些方法的性质基本上是启发式的。最近的研究考虑的是一系列称为拟分离的优化问题 $\min\limits_{s,l} f^{(0)}(s)+\sum\limits_{i=1}^{N} f^{(i)}(s,l^{(i)})$, s.t. $g^{(0)}(s)\leqslant 0$, $g^{(i)}(s,l^{(i)})\leqslant 0, i=1,\cdots,N$，已经给出了严格的分解理论，一般足以涵盖许多大型工程的设计问题。与文献[1]中利用可分化方法求解实值的目标函数模型不同，本文将同样用可分化方法求解更一般的目标函数——向量值目标函数，给出了其局部弱 Pareto 解的必要条件以及全局弱 Pareto 解的充分必要条件。

关键词：可分化；全局(局部)优化；向量值优化；混合整数规划；多目标设计；拟分离子系统；弱 Pareto 解
中图分类号：O221.2　　文献标志码：A　　文章编号：1672-6693(2011)05-0007-06

许多离散优化问题是 NP 难的，因此对于大数目的设计变量的优化是棘手的。对于一般的非凸连续的全局优化，所有已知的算法都存在指数的计算复杂性，为此连续的全局优化同样是棘手的。因此，分解方法可能是有用的，特别是对这些问题[1-2]。

许多分层和不分层的分化方法已经提出来，如 Kroo 的协同优化[3]，Dantzig-Wolfe 分解[4]，索比斯基的无级分解[5]，并行子空间优化[6]，Renaud and Watson 的增广拉格朗日方法[7]。只有少数的方法都通过了严格的证明收敛，或者被证明产生同等的优化问题(即没有引进虚假的解)[7-11]。一般来说，与不分层中方法比较起来，分层中的方法证明其正确性和收敛性更容易。

事实上，在严格的数学理论的正确性和收敛性存在的情况下，所有出版的分化方法是分层的，而且利用一些特殊问题的结构。然而在多原则设计优化中，这些特殊问题的结构不是经常能被发现的。

在文献[1]中，作者讨论了在多原则设计优化问题中，带有混合整数的目标函数为实值的拟可分子系统的优化问题的可分化理论，给出了关于连续变量包括离散子系统变量的拟分离的局部最优解的必要条件，尽管连续的充分必要条件没有扩大到包括整数变量。

本文将文献[1]中的目标函数推广为向量值函数，然后同样去求解局部最优解的必要条件。即将目标函数进行了推广，使其更一般化，扩大了应用的范围。

1 纯离散的拟分离子系统理论

1.1 记号与说明

记实 n 维欧几里得空间为 E^n，n 元整数数组集为 $\mathbf{Z}^n$，令 g_j 为向量 g 的第 j 个分量，$B(x,\delta)\subset E^n$ 表示球心在 x、半径为 δ 的开球。记全局系统变量 $s\in E^{n_0}$，局部子系统变量 $l^{(i)}\in\mathbf{Z}^{n_i}, i=1,\cdots,N$；$n=n_0+n_1+\cdots+n_N$，其中 N 为子系统的个数。

记 $l=(l^{(1)},\cdots,l^{(N)})$ 表示所有的局部变量，$f^{(0)}(s)$，$f^{(1)}(s,l^{(1)}),\cdots,f^{(N)}(s,l^{(N)})$ 与 $g^{(0)}(s)$，$g^{(1)}(s,l(1)),\cdots,g^{(N)}(s,l^{(N)})$ 都是二次连续可微的实向量值函数，维数都为 m。本部分中的范数均为二范数。

* 收稿日期：2011-04-14　　网络出版时间：2011-09-17 13:59:00
资助项目：国家自然科学基金(No. 10171118)
作者简介：王磊，男，硕士，研究方向为最优化理论与算法；通讯作者：白富生，E-mail：fsbai@cqnu.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110917.1359.201105.7_002.html

下面给出拟分离的子系统问题[2](SSP)

$$\min_{s,l} \quad f^{(0)}(s) + \sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(s,l^{(i)})$$

$$\text{s.t.} \quad g^{(0)}(s) \leqslant 0, g^{(i)}(s,l^{(i)}) \leqslant 0, i = 1,\cdots,N$$

此问题中全局系统变量 s 是向量,而所有的局部子系统变量 $l^{(i)}$ 是离散的。按照文献[2]中的可分化方法,得到分化后的问题为上层(Upper level)问题(DSSP)

$$\min_{s,b} \quad f^{(0)}(s) + \sum_{i=1}^{N} b^{(i)}$$

$$\text{s.t.} \quad g^{(0)}(s) \leqslant 0, \mu^{(i)}(s,b) \leqslant 0, i = 1,\cdots,N$$

其中 $\mu^{(i)}(s,b)$ 是第 i 个下层(Lower level)问题(DSSP)的全局最优解,$i = 1,\cdots,N$

$$\min_{l^{(i)}} \quad \mu^{(i)}$$

$$\text{s.t.} \quad \max_{1\leqslant j\leqslant m}(g_j^{(i)}(s,l^{(i)}) - \mu_j^{(i)}) \leqslant 0, f^{(i)}(s,l^{(i)}) - b^{(i)} - \mu^{(i)} \leqslant 0$$

设 X 和 X_D 分别表示(SSP)和(DSSP)的可行集,假设可行离散集 $\{l/(s,l) \in X\}$ 是有限集。记 $\theta(s,l)$ 为(SSP)的目标函数,$\theta_D(s,b)$ 为(DSSP)的(Upper level)的目标函数。

1.2 相关的定义及定理

引理 1 [1] 若 (s,l) 是(SSP)的可行解,则 $(s,b) = (s,b^{(1)},\cdots,b^{(N)}) = (s, f^{(1)}(s,l^{(1)}),\cdots, f^{(N)}(s,l^{(N)}))$ 是(DSSP)的可行解。

证明 由 (s,l) 是(SSP)的可行解知 $(s,l) \in X$,因此 $g^{(0)}(s) \leqslant 0, g^{(i)}(s,l^{(i)}) \leqslant 0, i = 1,\cdots,N$。考虑问题(DSSP)中的 $(s,b) = (s,b^{(1)},\cdots,b^{(N)}) = (s, f^{(1)}(s,l^{(1)}),\cdots, f^{(N)}(s,l^{(N)}))$,由此等式知在(DSSP)的下层问题中 $\mu^{(i)} \geqslant 0$,于是 $\mu^{(i)}(s,b) = 0, i = 1,\cdots,N$,即 $g^{(0)}(s) \leqslant 0$ 且 $\mu^{(i)}(s,b) \leqslant 0, i = 1,\cdots,N$,这也就证明了 $(s,b) = (s,b^{(1)},\cdots,b^{(N)}) = (s, f^{(1)}(s,l^{(1)}),\cdots, f^{(N)}(s,l^{(N)}))$ 是(DSSP)的可行解。 证毕

定义 1 $(s^*,l^*) \in X$ 是(SSP)的局部弱 Pareto 解,如果存在开球 $B(s^*,\delta)$,不存在 $(s,l) \in X$ 和 $s \in B(s^*,\delta)$ 使得 $\theta(s,l) < \theta(s^*,l^*)$。

定理 1 如果是 $(s^*,b^*) = (s^*, f^{(1)}(s^*,l^{(1)*}),\cdots, f^{(N)}(s^*,l^{(N)*})) \in X_D$(DSSP)的局部弱 Pareto 解,则 $(s^*,l^*) \in X$ 是(SSP)的局部弱 Pareto 解。

证明 假设存在 $(s,l) \in X$ 和 $s \in B(s^*,\delta)$ 使得 $\theta(s,l) < \theta(s^*,l^*)$,于是存在一个序列 $(s_{(k)},l_{(k)}) \in X$ 使得 $s_{(k)} \to s^*$ 且

$$\theta(s_{(k)},l_{(k)}) < \theta(s^*,l^*) \tag{1}$$

对所有的 k 均成立。由于 X 中的离散部分假设的是有限的,故在必要的时候可设所有 $l_{(k)} = l'$,于是可设 $b' = (f^{(1)}(s^*,l^{(1)'}),\cdots, f^{(N)}(s^*,l^{(N)'}))$,由连续性可知

$$\lim_{k\to\infty}(s_{(k)},l_{(k)}) = (s^*,l') \tag{2}$$

可以看到,在 $\|s_{(k)} - s^*\| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ 时,$b_{(k)} = (f^{(1)}(s_{(k)},l_{(k)}^{(1)}),\cdots, f^{(N)}(s_{(k)},l_{(k)}^{(N)}))$(此处 $b_{(k)}$ 为 mN 维向量,不是 m 乘 N 维矩阵)不在开球 $B(b^*,\frac{\delta}{\sqrt{2}})$ 内,否则由已知条件知,至少存在一个 $1 \leqslant j_0 \leqslant m$,使得

$$\theta_{j_0}(s_{(k)},l_{(k)}) = \theta_{Dj_0}(s_{(k)},b_{(k)}) \geqslant \theta_{Dj_0}(s^*,b^*) = \theta_{j_0}(s^*,l^*)$$

与(1)式矛盾。由 $b_{(k)}$ 的连续性可知 $\lim_{k\to\infty} b_{(k)} = b'$ 也不在开球 $B(b^*,\frac{\delta}{\sqrt{2}})$ 内;又有

$$\sum_{i=1}^{N}(b^{(i)'} - b^{(i)*}) = \theta_D(s^*,b') - \theta_D(s^*,b^*) = \theta(s^*,l') - \theta(s^*,l^*) \tag{3}$$

由(1)、(2)式可知 $\lim_{k\to\infty}\theta(s_{(k)},l_{(k)}) = \theta(s^*,l') \leqslant \theta(s^*,l^*)$。

故由(3)式知 $\sum_{i=1}^{N}(b^{(i)'} - b^{(i)*}) \leqslant 0$,再加上前面的 b' 不在开球 $B(b^*,\frac{\delta}{\sqrt{2}})$ 内,可得到,存在某个 $b^{(i)'} \leqslant$

$b^{(i)*}-\frac{\delta}{\sqrt{2NN}}$。

由 X 中的两个点 (s^*,l^*) 和 (s^*,l'),可构造一个新的点 $(s,l)\in X$,其中 $s=s^*$,$l^{(j)}=l^{(j)*}(j\neq i)$,$l^{(i)}=l^{(i)'}$。由引理 1,对应于 $(s,l)\in X$,相应的点 $(s,b^{(1)*},\cdots,b^{(i-1)*},b^{(i)'},b^{(i+1)*},\cdots,b^{(N)*})\in X_D$,于是新的点

$$(s,b)=(s,b^{(1)*},\cdots,b^{(i-1)*},b^{(i)*}-\frac{\delta}{\sqrt{2NN}},b^{(i+1)*},\cdots,b^{(N)*})\in X_D$$

其中 $\|(s,b)-(s^*,b^*)\|<\delta$ 且 $\theta_D(s,b)<\theta_D(s^*,b^*)$ 与题设矛盾。　　证毕

推论 1　$(s^*,b^*)=(s^*,f^{(1)}(s^*,l^{(1)*}),\cdots,f^{(N)}(s^*,l^{(N)*}))\in X_D$ 是(DSSP)的全局弱 Pareto 解 $\Leftrightarrow(s^*,l^*)\in X$ 是(SSP)的全局弱 Pareto 解。

证明　(必要性)假设存在 $(s,l)\in X$ 使得 $\theta(s,l)<\theta(s^*,l^*)$,于是存在一个序列 $(s_{(k)},l_{(k)})\in X$ 使得 $s_k\to s^*$ 且

$$\theta(s_{(k)},l_{(k)})<\theta(s^*,l^*)\tag{4}$$

对所有的 k 均成立。由于 X 中的离散部分假设的是有限的,故在必要的时候可设所有的 $l_{(k)}=l'$,于是可设 $b'=(f^{(1)}(s^*,l^{(1)'},\cdots,f^{(N)}(s^*,l^{(N)'}))$,由连续性可知

$$\lim_{k\to\infty}(s_{(k)},l_{(k)})=(s^*,l')\tag{5}$$

对于 $b_{(k)}=(f^{(1)}(s_{(k)},l_{(k)}^{(1)}),\cdots,f^{(N)}(s_{(K)},l_{(k)}^{(N)}))$(此处 $b_{(k)}$ 为 mN 维向量,不是 m 乘 N 维矩阵),由其连续性可知 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{(k)}=b'$,又有

$$\sum_{i=1}^{N}(b^{(i)'}-b^{(i)*})=\theta_D(s^*,b')-\theta_D(s^*,b^*)=\theta(s^*,l')-\theta(s^*,l^*)\tag{6}$$

由(4)、(5)式可知 $\lim\limits_{k\to\infty}\theta(s_{(k)},l_{(k)})=\theta(s^*,l')\leqslant\theta(s^*,l^*)$。

由 X 中的两个点 (s^*,l^*) 和 (s^*,l'),可构造一个新的点 $(s,l)\in X$,其中 $s=s^*$,$l^{(j)}=l^{(j)*}(j\neq i)$,$l^{(i)}=l^{(i)'}$。由引理 1,对应于 $(s,l)\in X$,得到相应的点 $(s,b^{(1)*},\cdots,b^{(i-1)*},b^{(i)'},b^{(i+1)*},\cdots,b^{(N)*})\in X_D$ 且 $\theta_D(s,b)<\theta_D(s^*,b^*)$ 与题设矛盾。

(充分性)由 $(s^*,l^*)\in X$ 是(SSP)的全局弱 Pareto 解知,对于任意的 $(s,l)\in X$ 有 $\theta(s^*,l^*)\leqslant\theta(s,l)$,由引理 1 知

$$(s^*,b^*)=(s^*,f^{(1)}(s^*,l^{(1)*}),\cdots,f^{(N)}(s^*,l^{(N)*}))\in X_D$$

且 $\theta_D(s^*,b^*)\leqslant\theta_D(s,b)$,即 $(s^*,b^*)=(s^*,f^{(1)}(s^*,l^{(1)*}),\cdots,f^{(N)}(s^*,l^{(N)*}))\in X_D$ 是(DSSP)的全局弱 Pareto 解。　　证毕

2 混合整数拟分离系统理论

2.1 记号与说明

记全局系统变量 $s\in E^{n_0}$,局部子系统变量 $l^{(i)}=(\overline{l^{(i)}},\hat{l^{(i)}})\in E^{\bar{n}_i}\times Z^{\hat{n}_i}$,$n_i=\bar{n}_i+\hat{n}_i$,$i=1,\cdots,N$。记 $l=(l^{(i)},\cdots,l^{(N)})$ 表示所有的局部变量,$\bar{l}=(\overline{l^{(1)}},\cdots,\overline{l^{(N)}})$ 是连续变量 $\hat{l}=(\hat{l^{(1)}}),\cdots,\hat{l^{N}}))$ 时离散变量,$f(s)$,$g^{(0)}(s)$,$g^{(1)}(s,l^{(1)}),\cdots,g^{(N)}(s,l^{(N)})$ 都是实向量值函数,维数都为 m。

先考虑(SSP)模型中的一种特殊情况,问题(ISV)

$$\min_{s,l}\quad f(s)$$
$$\text{s.t.}\quad g^{(0)}(s)\leqslant 0,g^{(i)}(s,l^{(i)})\leqslant 0,i=1,\cdots,N$$

分化后的问题为(Upper level)(DISV)

$$\min_{s}\quad f(s)$$
$$\text{s.t.}\quad g^{(0)}(s)\leqslant 0,\mu^{(i)}(s)\leqslant 0,i=1,\cdots,N$$

其中 $\mu^{(i)}(s)$ 是第 i 个(Lower level)问题(DISV)的最优解,$i=1,\cdots,N$

$$\min_{l^{(i)}}\quad \mu^{(i)}$$

$$\text{s.t.}\quad \max_{1\leqslant j\leqslant m}\left(g_j^{(i)}(s,l^{(i)}-\mu_j^{(i)}\right)\leqslant 0$$

设 X 表示(ISV)的可行集,(DISV)的可行集则记为 $X_D=\{s/(s,l)\}\in X$,对于某个 $l\}$

2.2 相关的定义与定理

定义2 $(s^*,l^*)\in X$ 是(ISV)的局部弱 Pareto 解,如果存在开球 $B((s^*,\overline{l^*},\delta)$,不存在 $(s,l)\in X$,$(s,\bar{l}\in B((s^*,\overline{l^*}),\delta)$ 使得 $f(s)<f(s^*)$。

定理2 如果 s^* 是(DISV)的局部弱 Pareto 解,则存在 l^* 使得 (s^*,l^*) 是(ISV)的局部弱 Pareto 解。

证明 假设不存在这样的 l^* 使得 (s^*,l^*) 是(ISV)的局部弱 Pareto 解,即对于所有的 l^*,(s^*,l^*) 都不是(ISV)的局部弱 Pareto 解,于是对于任意的开球 $B((s^*,\overline{l^*})$,存在 $(s,l)\in X$,$(s,\bar{l})\in B((s^*,\overline{l^*}))$ 使得

$$f(s)<f(s^*)\tag{7}$$

因为 s^* 是(DISV)的局部弱 Pareto 解,则存在 $\varepsilon>0$,使得对于所有的点 $s\in X_D\cap B(s^*,\varepsilon)$,至少存在一个 $1\leqslant j_0\leqslant m$,使得 $f_{j_0}(s^*)\leqslant f_{j_0}(s)$。

由 $s^*\in X_D$ 知,存在 l^* 使得 $(s^*,l^*)\in X$;因为 $\|s-s^*\|_2\leqslant\|(s,\bar{l})-(s^*,\overline{l^*})\|_2$,故由 $(s,l)\in X$,$(s,\bar{l})\in B((s^*,\overline{l^*}))$ 可知 $s\in X_D\cap B(s^*,\varepsilon)$,于是至少存在一个 $1\leqslant j_0\leqslant m$,使得 $f_{j_0}(s^*)\leqslant f_{j_0}(s)$,与(7)式矛盾。 证毕

推论2 s^* 是(DISV)的全局弱 Pareto 解 $\Leftrightarrow$ 存在 l^* 使得 (s^*,l^*) 是(ISV)的全局弱 Pareto 解。

2.3 记号与说明

下面来讨论一般的(SSP)的模型。记全局系统变量 $s\in E^{n_0}$,局部子系统变量 $l^{(i)}=(\overline{l^{(i)}},\hat{l^{(i)}})\in E^{\bar{n}_i}\times\mathbf{Z}^{\hat{n}_i}$,$n_i=\overline{n_i}+\hat{n}_i$,$i=1,\cdots,N$;$n=n_0+n_1+\cdots+n_N$,其中 N 为子系统的个数。

记 $l=(l^{(1)},\cdots,l^{(N)})$ 表示所有的局部变量,$\bar{l}=(\overline{l^{(1)}},\cdots,\overline{l^{N}})$ 是连续变量,$\hat{l}=(\hat{l^{(1)}},\cdots,\hat{l^{(N)}})$ 是离散变量,$f^{(0)}(s)$,$f^{(1)}(s,l^{(1)}),\cdots,f^{(N)}(s,l^{(N)})$ 与 $g^{(0)}(s)$,$g^{(1)}(s,l^{(1)}),\cdots,g^{(N)}(s,l^{(N)})$)都是实向量值函数,维数都为 m。

本文考虑的拟分离子系统问题和前面给出的模型一样,记为(SSP),分化后的问题模型也和前面一样,记为(DSSP)。

设 X 和 X_D 分别表示(SSP)和(DSSP)的可行集,假设可行离散集 $\{\hat{l}/(s,l)\in X\}$ 是有限集。记 $\theta(s,\bar{l},\hat{l})$ 为(SSP)的目标函数,$\theta_D(s,b)$ 为(DSSP)的(Upper level)的目标函数。

引理2[1] 若 (s,l) 是(SSP)的可行解,则 $(s,b)=(s,b^{(1)},\cdots,b^{(N)})=(s,f^{(1)}(s,l^{(1)}),\cdots,f^{(N)}(s,l^{(N)}))$ 是(DSSP)的可行解。

定义3 $(s^*,l^*)\in X$ 是(SSP)的局部弱 Pareto 解,如果存在开球 $B((s^*,\overline{l^*}),\delta)$,不存在 $(s,l)\in X$,$(s,\bar{l})\in B((s^*,\overline{l^*}),\delta)$ 使得 $\theta(s,\bar{l},\hat{l})<\theta(s^*,\overline{l^*},\hat{l^*})$。

定理3 如果 $(s^*,b^*)=(s^*,f^{(1)}(s^*,l^{(1)*}),\cdots,f^{(N)}(s^*,l^{(N)*}))\in X_D$ 是(DSSP)的局部弱 Pareto 解,则 $(s^*,l^*)\in X$ 是(SSP)的局部弱 Pareto 解。

证明 假设对于任意的开球 $B((s^*,\overline{l^*}),\delta)$ 使得 $\theta(s,\bar{l},\hat{l})<\theta(s^*,\overline{l^*},\hat{l^*})$,于是存在一个序列 $(s_{(k)},l_{(k)})\in X$ 使得 $(s_{(k)},\overline{l_{(k)}})\to(s^*,\overline{l^*})$ 且

$$\theta(s_{(k)},\overline{l_{(k)}},\hat{l_{(k)}})<\theta(s^*,\overline{l^*},\hat{l^*})\tag{8}$$

对所有的 k 均成立。由于 X 中的离散部分假设的是有限的,故在必要的时候可设所有的 $\hat{l_{(k)}}=\hat{l}'$,定义 $l'=(\overline{l'},\hat{l}')$,其中 $\overline{l'}=\overline{l^*}$,$\hat{l_{(k)}}=\hat{l}'$。令 $b'=(f^{(1)}(s^*,l^{(1)\prime}),\cdots,f^{(N)}(s^*,l^{(N)\prime}))$ 由连续性可知 $\lim\limits_{k\to\infty}(s_{(k)},l_{(k)})=(s^*,l')\in X$。

可以看到,在 $\|s_{(k)}-s^*\|<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ 时,$b_{(k)}=(f^{(1)}(s_{(k)},l_{(k)}^{(1)}),\cdots,f^{(N)}(s_{(k)},l_{(k)}^{(N)}))$ 不在开球 $B(b^*,\dfrac{\delta}{\sqrt{2}})$ 内,

否则由已知条件知，至少存在一个 $1 \leqslant j_0 \leqslant m$，使得

$$\theta_{j_0}(s_{(k)}, \overline{l_k}, \hat{l}_{(k)}) = \theta_{Dj_0}(s_{(k)}, b_{(k)}) \geqslant \theta_{Dj_0}(s^*, b^*) = \theta_{j_0}(s^*, \overline{l^*}, \hat{l}^*)$$

与(8)式矛盾。由 $b_{(k)}$ 的连续性可知 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{(k)} = b'$ 也不在开球 $B(b^*, \frac{\delta}{\sqrt{2}})$ 内，由定理 2 的证明过程，类似的可得到，存在某个 $b^{(i)'} \leqslant b^{(i)*} - \frac{\delta}{\sqrt{2NN}}$。

由 X 中的两个点 (s^*, l^*) 和 (s^*, l')，可构造一个新的点 $(s, l) \in X$，其中 $s = s^*$，$\bar{l} = \overline{l^*}$，$l^{\hat{(j)}} = l^{\hat{(j)}*}(j \neq i)$，$l^{\hat{(i)}} = l^{\hat{(i)}'}$。由引理 2，对应于 $(s, l) \in X$，相应的点 $(s, b^{(1)*}, \cdots, b^{(i-1)*}, b^{(i)'}, b^{(i+1)*}, \cdots, b^{(N)*}) \in X_D$，于是新的点 $(s, b) = (s, b^{(1)*}, \cdots, b^{(i-1)*}, b^{(i)*} - \frac{\delta}{\sqrt{2NN}}, b^{(i+1)*}, \cdots, b^{(N)*}) \in X_D$，其中 $\| (s, b) - (s^*, b^*) \| < \delta$ 且 $\theta_D(s, b) < \theta_D(s^*, b^*)$ 与题设矛盾。　　证毕

推论 3　$(s^*, b^*) = (s^*, f^{(1)}(s^*, l^{(1)*}), \cdots, f^{(N)}(s^*, l^{(N)*})) \in X_D$ 是(DSSP)的全局弱 Pareto 解 $\Leftrightarrow (s^*, l^*) \in X$ 是(SSP)的全局弱 Pareto 解。

证明　(必要性) 假设对于任意的开球 $B((s^*, \overline{l^*}), \delta)$ 使得 $\theta(s, \bar{l}, \hat{l}) < \theta(s^*, \overline{l^*}, \hat{l}^*)$，于是存在一个序列 $(s_{(k)}, l_{(k)}) \in X$ 使得 $(s_{(k)}, \overline{l_{(k)}}) \to (s^*, \overline{l^*})$ 且

$$\theta(s_{(k)}, \overline{l_{(k)}}, \hat{l}_{(k)}) < \theta(s^*, \overline{l^*}, \hat{l}^*) \tag{9}$$

对所有的 k 均成立。由于 X 中的离散部分假设的是有限的，故在必要的时候可设所有的 $\hat{l}_{(k)} = \hat{l}'$，定义 $l' = (\overline{l'}, \hat{l}')$，其中 $\overline{l'} = \overline{l^*}$，$\hat{l}_{(k)} = \hat{l}'$。令 $b' = (f^{(1)}(s^*, l^{(1)'}), \cdots, f^{(N)}(s^*, l^{(N)'}))$ 由连续性可知 $\lim\limits_{k\to\infty}(s_{(k)}, l_{(k)}) = (s^*, l') \in X$。对于 $b_{(k)} = (f^{(1)}(s_{(k)}, l_{(k)}^{(1)}), \cdots, f^{(N)}(s_{(k)}, l_{(k)}^{(N)}))$ 由其连续性可知 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{(k)} = b'$，由 X 中的两个点 (s^*, l^*) 和 (s^*, l')，可构造一个新的点 $(s, l) \in X$，其中 $s = s^*$，$\bar{l} = \overline{l^*}$，$l^{\hat{(j)}} = l^{\hat{(j)}*}(j \neq i)$，$l^{\hat{(i)}} = l^{\hat{(i)}'}$。由引理 2，对应于 $(s, l) \in X$，得到相应的新的点 $(s, b^{(1)*}, \cdots, b^{(i-1)*}, b^{(i)'}, b^{(i+1)*}, \cdots, b^{(N)*}) \in X_D$ 且 $\theta_D(s, b) < \theta_D(s^*, b^*)$ 与题设矛盾。

(充分性) 由 $(s^*, l^*) \in X$ 是(SSP)的全局弱 Pareto 解知，对于任意的 $(s, l) \in X$ 有 $\theta(s^*, l^*) \leqslant \theta(s, l)$，由引理 2 知

$$(s^*, b^*) = (s^*, f^{(1)}(s^*, l^{(1)*}), \cdots, f^{(N)}(s^*, l^{(N)*})) \in X_D$$

且 $\theta_D(s^*, b^*) \leqslant \theta_D(s, b)$，即 $(s^*, b^*) = (s^*, f^{(1)}(s^*, l^{(1)*}), \cdots, f^{(N)}(s^*, l^{(N)*})) \in X_D$ 是(DSSP)的全局弱 Pareto 解。　　证毕

2.4 数值算例

例　考虑带有实数和整数子系统变量 $(l^{(i)}, m^{(i)}) \in E^2 \times \mathbf{Z}^2$ 的原则设计优化(MDO)问题。目标函数为 $\theta(s, l) = \sum\limits_{i=1}^{10}(s^{(i)} + 0.1 l^{(i)})$，约束条件为 $s^{(i)} = 8\| l^{(i)} \|^2 (1 - \frac{\| l^{(i)} \|}{\sqrt{2}})^2 m^{(i)} + \frac{\| l^{(i)} \|^2}{2}(2 - \frac{\| l^{(i)} \|}{\sqrt{2}})^2 (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - m^{(i)})$，$0 \leqslant l_j^{(i)} \leqslant 0.75$，$m_j^{(i)} \in \{0, 1\}$，$i = 1, \cdots, 10$，$j = 1, 2$。其中 $s^{(i)} = (s_1^{(i)}, s_2^{(i)})^{\mathrm{T}}$，$l^{(i)} = (l_1^{(i)}, l_2^{(i)})^{\mathrm{T}}$。

知道在点 $(s, l, m) \in E^{20} \times E^{20} \times \{0, 1\}^{20}$ 处有 2^{10} 个局部弱 Pareto 解，并且每一个三元数组 $(s_j^{(i)}, l_j^{(i)}, m_j^{(i)})$，$i = 1, \cdots, 10$，$j = 1, 2$ 为 $(0, 0, 0)$ 或 $(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}, 1)$，类似于文献[1]中的例 2，可以得到目标函数为 $\theta_D(s, b) = \sum\limits_{i=1}^{10}(s^{(i)} + b^{(i)})$ 的可分化问题(DSSP)，且可分化问题(DSSP)有唯一的局部弱 Pareto 解 $(s, b) = (0, 0)$。

参考文献：

[1] Haftka R T,Watson L T. Decomposition theory for multidisciplinary design optimization problems with mixed integer quasi-separable sub-systems[J]. Optim Eng,2006,7:135-149.

[2] Haftka R T,Watson L T. Multidisciplinary design optimization with quasi-separable subsystems[J]. Optim Engrg,2005(6):9-20.

[3] Kroo I. MDO for large-scale design[C]//Alexandrov N M, Hussaini M Y. Multidisciplinary design optimization. Philadelphia,PA:SIAM,1997:22-44.

[4] Dantzig G B,Wolfe P. The decomposition principle for linear programs[J]. Operations Research,1960,8:101-111.

[5] Sobieszczanski-Sobieski J. Optimization by decomposition:A step from hierarchic to nonhierarchic systems[C]//Second NASA/Air force Symp on Recent Advances in Multidisciplinary Analysis and Optimization Hampton,1998.

[6] Wujek B A,Renaud J E,Batill S M. A concurrent engineering approach for multidisciplinary design in a distributed computing environment[C]//Alexandrov N M,Hussaini M Y. Multidisciplinary Design Optimization. Philadelphia PA: SIAM,1997:189-208.

[7] Rodr′iguez J F,Renaud J E,Watson L T. Convergence of trust region augmented Lagrangian methods using variable fidelity approximation data[J]. Structural Optim,1998b,15:141-156.

[8] Giunta A A,Balabanov V,Haim D,et al. Multidisciplinary optimisation of a supersonic transport using design of experiments theory and response surface modelling[J]. Aeronautical J,1997a,101(1008):347-356.

[9] Giunta A A,Balabanov V,Kaufman M,et al. Variable-complexity response surface design of an HSCT configuration [C]//Alexandrov N M,Hussaini M Y. Multidisciplinary design optimization. Philadelphia, PA:SIAM,1997b:348-367.

[10] Hosder S,Watson L T,Grossman B,et al. Polynomial response surface approximations for the multidisciplinary design optimization of a high speed civil transport[J]. Optim Engrg,2001(2):431-452.

[11] Schutte J,Haftka R T,Watson L T. Decomposition and two-level optimization of structures with discrete sizing variables [C]//Proc AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 45th Structures, Structural Dynamics,and Materials Conf AIAA Paper 2004-1541. CA:Palm Springs,2004.

Operations Research and Cybernetics

Decomposition Theory in the Vector-Valued Optimization with Mixed Integer Quasi-Separable Subsystems

WANG Lei[1,2], *BAI Fu-sheng*[2]

(1. Jiangxi Jiujiang No.3 Middle School, Jiujiang Jiangxi, 332000;

2. College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Numerous hierarchical and nonhierarchical decomposition strategies for the optimization of large scale systems, comprised of interacting subsystems, have been proposed. With a few exceptions, all of these strategies are essentially heuristic in nature. Recent work considered a class of optimization problems, called quasi-separable $\min_{s,l} f^{(0)}(s)+\sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(s,l^{(i)})$, s.t. $g^{(0)}(s)\leqslant 0$, $g^{(i)}(s,l^{(i)})\leqslant 0, i=1,\cdots,N$, narrow enough for a rigorous decomposition theory, yet general enough to encompass many large scale engineering design problems. With the literature [1] in solving real-value of objective function is different, in this paper we solve more general objective function—vector-valued objective function using decomposition methods, and extend the necessary conditions for local weak Pareto solution and the necessary and sufficient conditions for global Pareto solution.

Key words: decomposition; global/local optimization; vector-valued optimization; mixed integer programming; multidisciplinary design; quasi-separable subsystems; weak Pareto solution

(责任编辑 黄 颖)