运筹学与控制论
CNKI:50-1165/N.20110917.1359.003

半局部 η-伪线性函数的一些性质*

龙莆均,陈 林,赵 洁
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘要:作为半局部伪线性函数和 η- 伪线性函数的推广,本文利用半可微性提出了一类新的广义凸性函数 — 半局部 η - 伪线性函数。同时,本文建立了 f 在 Γ 上是半局部 η- 伪线性的当且仅当存在 $p:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}$,满足 $p(x,y)>0$, $\forall x, y\in\Gamma$, $f(y)=f(x)+p(x,y)\mathrm{d}f^{+}(x,\eta(y,x))$ 等性质。本文的结果是对文献[2]和[4]中相应结果的改进与推广。

关键词:η- 半可微;半局部 η- 伪线性;半局部伪线性;局部 η- 星形集
中图分类号:O221.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2011)05-0013-03

众所周知,广义凸性理论及其应用是数学规划与最优化理论中十分重要的研究内容。近年来,许多作者提出了凸性概念的多种推广形式[1-7]。1984 年,Chew 和 Choo 介绍了伪线性函数并研究了一阶和二阶特征[1]。1988 年,Kaul 等人提出了半局部伪线性函数并给出了一些性质以及在多目标优化中的应用[2]。1981 年,Hanson 给出了不变凸函数且讨论了这类函数的相关最优性理论[3]。1999 年,Ansrar 等人引入了 η-伪线性函数并研究了一些性质及相应优化问题的解集的一些性质[4]。

本文在文献[2,4]的基础上,结合半局部伪线性函数和 η-伪线性函数,提出了半局部 η-伪线性函数,研究了该类函数的一些性质。

1 预备知识

设 $\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$, $f:\Gamma\to\mathbf{R}$, $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$。

定义 1[8] Γ 在点 $x\in\Gamma$ 称为局部 η- 星型集,如果 $\forall y\in\Gamma$,存在 $0<a_\eta(x,y)\leqslant 1$,使得 $\forall\lambda\in[0,a_\eta(x,y)]$, $x+\lambda\eta(y,x)\in\Gamma$。

$\forall x\in\Gamma$, Γ 在点 x 是局部 η- 星型集,则 Γ 称为局部 η- 星型集。

定义 2[8] Γ 在点 $x\in\Gamma$ 是局部 η- 星型集,f 在点 $x\in\Gamma$ 称为 η- 半可微的,如果 $\forall y\in\Gamma$, $\mathrm{d}f^{+}(x,\eta(y,x))$ 存在且 $\mathrm{d}f^{+}(x,\eta(y,x))=\lim\limits_{\lambda\to0^{+}}\dfrac{1}{\lambda}[f(x+\lambda\eta(y,x))-f(x)]$。

$\forall x\in\Gamma$, f 在点 x 是 η- 半可微的,则称 f 在 Γ 上是 η- 半可微的。

定义 3[9] η 称为满足条件 C,如果 $\forall x,y\in\Gamma$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\ \eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$$

定义 4[10] f 称为半局部伪不变凸的,如果 $\forall x,y\in\Gamma$, $\mathrm{d}f^{+}(x,\eta(y,x))$ 存在且 $\mathrm{d}f^{+}(x,\eta(y,x))\geqslant 0\Rightarrow f(y)\geqslant f(x)$,如果 f 称为半局部伪不变凹的,$-f$ 是半局部伪不变凸的。

注 1 如果 f 是伪不变凸的,则 f 是半局部伪不变凸的。

2 半局部 η- 伪线性函数

假设 Γ 是局部 η- 星型集且记 $\bar{x}=x+\lambda\eta(y,x)$。

---

* 收稿日期:2011-04-07 网络出版时间:2011-09-17 13:59:00
资助项目:重庆市自然科学基金项目(No. CSTC2010BB2090);重庆市教委研究项目(No. KJ100608)
作者简介:龙莆均,男,硕士研究生,研究方向为非光滑优化理论。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110917.1359.201105.13_003.html

下面首先引入半局部 η- 伪线性函数的概念。

定义5　f 称为半局部 η- 伪线性的,如果 f 是半局部伪不变凸的且半局部伪不变凹的。

注2　如果 f 是伪线性的,则 f 是半局部 η- 伪线性的。

注3　如果 f 是半局部伪线性的,则 f 是半局部 η- 伪线性的。

下面研究半局部 η- 伪线性函数的一些性质。

定理1　f 是半局部 η- 伪线性的且 η 满足条件 C,则 $\forall x,y \in \Gamma$,$\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$。

证明　由 f 是半局部 η- 伪线性的可得,$\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$。故只需要证明 $f(x) = f(y) = \mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) = 0$ 即可。

假设 $x,y \in \Gamma$,$f(x) = f(y)$,但 $\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) \neq 0$。不妨设 $\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) > 0$。因为 $x,y \in \Gamma$,Γ 是局部 η- 星型集,故存在正数 $a_\eta(x,y) \leqslant 1$,$\forall \lambda \in [0,a_\eta(x,y)]$ 满足 $\bar{x} \in \Gamma$。

考虑函数:$\phi(x,y,\lambda) = f(\bar{x}) - f(x)$。显然,$\phi(x,y,0) = 0$,则

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\phi(x,y,\lambda) - \phi(x,y,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\lambda} = \mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) > 0$$

故存在正数 $e_1(x,y)$,$\forall \lambda \in [0,e_1(x,y)]$,$\phi(x,y,\lambda) > 0$。

令 $e(x,y) = \min[e_1(x,y),a_\eta(x,y)]$,则 $\forall \lambda \in [0,e(x,y)]$,$f(\bar{x}) > f(x)$。

由于 f 是半局部伪不变凸的且 $f(x) = f(y)$,则 $\forall \lambda \in [0,e(x,y)]$,$f(y) < f(\bar{x}) \Rightarrow \mathrm{d}f^+(\bar{x},\eta(y,\bar{x})) < 0$。

类似地,可得

$$\forall k \in [0,e_1(\bar{x},y)],\forall \lambda \in [0,e(x,y)],\mathrm{d}f^+(\bar{x},\eta(y,\bar{x})) < 0 \Rightarrow f(\bar{x} + k\eta(y,\bar{x})) < f(\bar{x})$$

又 $f(\bar{x} + k\eta(y,\bar{x})) = f(x + (k + \lambda - k\lambda)\eta(y,x))$。令 $\lambda \to 0$,则

$$\forall k \in [0,e_1(\bar{x},y)],f(x + k\eta(y,x)) \leqslant f(x)$$

令 $\bar{e}(x,y) = \min[e_1(x,y),e(x,y)]$,则 $\forall k \in [0,\bar{e}(x,y)]$,$f(x + k\eta(y,x)) < f(x)$ 与 $\forall \lambda \in [0,e(x,y)]$,$f(\bar{x}) > f(x)$ 矛盾。

同理,利用 f 的半局部伪不变凹性,可以证明 $\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) < 0$ 也不成立。因此,$\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) = 0$。

证毕

定理2　f 在 Γ 上是半局部 η- 伪线性的当且仅当存在 $p:\Gamma \times \Gamma \to \mathbf{R}$,满足 $p(x,y) > 0$,$\forall x,y \in \Gamma$,$f(y) = f(x) + p(x,y)\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x))$。

证明　令 f 在 Γ 上是半局部 η- 伪线性的。如果 $f(x) = f(y)$,则由定理1可知

$$\forall p(x,y) > 0,f(y) = f(x) + p(x,y)\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x))$$

故只考虑 $f(x) \neq f(y)$ 的情形。

由 f 是半局部伪不变凸的可得,$f(y) > f(x) \Rightarrow \mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) > 0$,又 f 是半局部伪不变凹的,$f(y) < f(x) \Rightarrow \mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) < 0$。

故当 $f(x) \neq f(y)$ 时,取 $p(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x))}$ 即可。

反之,假设存在 $p:\Gamma \times \Gamma \to \mathbf{R}$,满足 $p(x,y) > 0$,$\forall x,y \in \Gamma$,$f(y) = f(x) + p(x,y)\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x))$。

因此,$\forall x,y \in \Gamma$,若 $\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) \geqslant 0$,则 $f(y) \geqslant f(x)$,即 f 是半局部伪不变凸的。$\forall x,y \in \Gamma$,若 $\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) \leqslant 0$,则 $f(y) \leqslant f(x)$,即 f 是半局部伪不变凹的。故 f 在 Γ 上是半局部 η- 伪线性的。　证毕

定理3　f 在 Γ 上是半局部 η- 伪线性的且 η 满足条件 C,则对 $\forall x,y \in \Gamma$,存在正数 $d_\eta(x,y)$ 使得 $\forall \lambda \in [0,d_\eta(x,y)]$,$\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) = 0 \Rightarrow f(x) = f(\bar{x})$。

证明　f 在 Γ 上是半局部 η- 伪线性的。设 $x,y \in \Gamma$ 满足 $\mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x)) = 0$。由于 Γ 是局部 η- 星形集,故存在正数 $d_\eta(x,y) \leqslant 1$ 满足 $\forall \lambda \in [0,d_n(x,y)]$,$\bar{x} \in \Gamma$。

因为 η 满足条件 C,则由文献[11]可得

$$\mathrm{d}f^+(x,\eta(\bar{x},x)) = \mathrm{d}f^+(x,\lambda\eta(y,x)) = \lambda \mathrm{d}f^+(x,\eta(y,x))$$

故 $\mathrm{d}f^+(x,\eta(\bar{x},x)) = 0$。

因此，由定理 1 可得，$\forall \lambda \in [0, d_\eta(x,y)]$，$f(x) = f(\bar{x})$。 证毕

参考文献：

[1] Chew K L, Choo E U. Pseudolinearity and efficiency[J]. Math Prog, 1984, 28: 226-239.

[2] Kaul R N, Lyall V, Kaur S. Semilocal pseudolinearity and efficiency[J]. Eur J Oper Res 1988, 36: 402-410.

[3] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions [J]. J Math Anal Appl, 1981, 80: 545-550.

[4] Ansari Q H, Schaible S, Yao J C. η-pseudolinearity[J]. Riv Mat Sci Econ Soc, 1999, 22: 31-39.

[5] Lalitha C S, Mehta M. A note on pseudolinearity in terms of bifunctions[J]. Asia Pac J Oper Res, 2007, 24: 83-91.

[6] Rapcsfak T. On pseudolinear functions [J]. Eur J Oper Res, 1991, 50: 353-360.

[7] 刘晓玲，龚海林，袁德辉. 局部(Hp, r, α)-预不变凸函数及其性质[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2008，32(1): 36-38.

[8] Mishra S K, Wang S Y, Lai K K. Multiple objective fractional programming involving semilocally type I-preinvex and related functions[J]. J Math Anal Appl, 2005, 310: 626-640.

[9] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 1995, 189: 901-908.

[10] Preda V. Optimality conditions and duality in multiple objective programming involving semilocally convex and related functions[J]. Optimization, 1996, 36: 219-230.

[11] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Criteria for generalized invex monotonicities[J]. Eur J Oper Res, 2005, 164: 115-119.

Operations Research and Cybernetics

Some Characterizations of Semilocal η-Pseudolinear Functions

LONG Pu-jun, CHEN Lin, ZHAO Jie

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: As a generalization of the semilocally pseudolinear functions and η-pseudolinear functions, we proposed a new class of generalized convexity—the semilocally η-pseudolinear functions. Also, we established some properties including that f is semilocally η-pseudolinear if and only if there exists a function $p: \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{R}$ such that $p(x,y) > 0$ and $\forall x,y \in \Gamma$, $f(y) = f(x) + p(x,y)\mathrm{d}f^{+}(x, \eta(y,x))$. Our results improved and extended the results in references [2] and [4].

Key words: η-semidifferentiable; semilocal η-pseudolinearity; semilocal pseudolinearity; η-locally starshaped set

（责任编辑 黄 颖）