CNKI :50-1165/N. 20110917. 1359. 009

具有随机扰动和比率依赖的 Holling 型捕食系统的正解存在性*

华盈盈，杨志春
(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要：本文在 Holling-$(n+1)$ 功能性反应随机捕食系统正解存在性的已有结论基础上，进一步研究将此模型基于比率依赖理论，讨论对一类基于比率依赖的 Holling-$(n+1)$ 型的随机捕食系统的正解全局存在性。该模型在随机白噪声的干扰环境下，通过借助 Lyapunov 函数方法和伊藤公式，详细得出该系统的正解在有限时间内不会爆破，以及它的正解的全局存在性。

关键词：Holling-$(n+1)$ 型随机捕食系统；Lyapunov 函数方法；伊藤公式；全局存在性
中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2011)05-0041-04

在生物种群动力学中，生物模型中的各类功能性反应捕食系统的研究备受关注。1965 年，Holling 对于不同类型的物种，提出了 3 种不同的功能性反应函数[1]。许多学者相继对 Holling-Ⅰ型、Ⅱ型、Ⅲ型的捕食模型的稳定性、极限环、周期解的存在性等进行了研究[2-12]。

然而，近年来，越来越多的生物、生理学证据表明，在许多情形下，特别是当捕食者不得不搜寻食物时，基于比率依赖的捕食模型更切合实际情况。同时，日本数学家伊藤清(K. Ito)创立的随机微分方程的得到迅速发展，并广泛应用到各个领域中去。借此，本文将考虑在随机白噪声的干扰环境下，一类具有基于比率依赖的 Holling-$(n+1)$ 功能性反应的捕食系统的生物数学模型，利用 Lyapunov 函数的方法和 Ito 公式，详细得出该捕食系统正解全局存在性的条件。

1 模型的准备与建立

设 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 是完备的概率空间，具有流 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足通常条件即单调递增右连续，且 F_0 是包含所有的零测集。$W_i(t)\ (i=1,2)$ 是定义在这个概率空间上的相互独立的标准布朗运动。引进记号 $\mathbf{R}_+^2=\{x\in \mathbf{R}^2: x_i>0, i=1,2\}$，符号 a. s. 表示几乎必然。

具有基于比率依赖的 Holling-$(n+1)$ 型功能性反应函数的食饵 — 捕食系统为[2]

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=\left[x(t)(r_1(t)-a_1(t)x(t))-b_1(t)\cdot\dfrac{x^n(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)\right]\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y(t)=\left[y(t)(r_2(t)-a_2(t)y(t))+b_2(t)\cdot\dfrac{x^n(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)\right]\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1}$$

其中，式中 $x(t)$，$y(t)$ 分别表示食饵与捕食者在 t 时刻的种群密度，$r_i(t)$，$a_i(t)$，$b_i(t)\ (i=1,2)$ 均为 $[0,+\infty)$ 上连续且非负的函数，$r_i(t)\ (i=1,2)$ 为食饵和捕食者的自然增长率(即出生率减去死亡率)，$a_i(t)\ (i=1,2)$ 为食饵和捕食者的种内竞争率，$b_i(t)\ (i=1,2)$ 为食饵与捕食者的种间竞争率。

通过对(1)式作变换：$r_1(t)\to r_1(t)+\sigma_1\dot{w}_1(t)$，$b_2(t)\to b_2(t)+\sigma_2\dot{w}_2(t)$ 后得到具有随机扰动的基于比率依赖的 Holling-$(n+1)$ 型功能性反应函数的捕食系统[3]

---

* 收稿日期：2011-05-27　修回日期：2011-06-30　网络出版时间：2011-09-17 13:59:00
资助项目：国家自然科学基金项目(No. 10971240)；重庆市自然科学基金科研项目(No. CSTC2008BB2364)；重庆市教委科研项目(No. KJ080806)
作者简介：华盈盈，女，硕士研究生，研究方向为微分方程与动力系统。通讯作者：杨志春，E-mail：yangzhch@126. com
网络出版地址：http://www. cnki. net/kcms/detail/50. 1165. N. 20110917. 1359. 201105. 41_009. html

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=[x(t)(r_1(t)-a_1(t)x(t))-b_1(t)\cdot\dfrac{x^n(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)]\mathrm{d}t+\sigma_1x(t)\mathrm{d}w_1(t)\\ \mathrm{d}y(t)=[y(t)(r_2(t)-a_2(t)y(t))+b_2(t)\cdot\dfrac{x^n(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)]\mathrm{d}t+\sigma_2\dfrac{x^n(t)y(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}\mathrm{d}w_2(t)\end{cases}\tag{2}$$

式中 $W_i(t)$ 为独立的白噪声且 $W_i(t)=0,t\geqslant 0,i=1,2,\sigma_i^2,i=1,2$ 代表白噪声的强度。满足初值 $(x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^2,w_i(t)$ 为标准独立的布朗运动。

假设 A 不失一般生物学意义,总是假设系统(2)式满足(A):$r_i(t)\succ 0,a_i(t)\succ 0,b_i(t)\succ 0(i=1,2)$ 且有界。

设 $f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^+\rightarrow\mathbf{R}^n$ 和 $g:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^+\rightarrow\mathbf{R}^{n\times m}$ 都是 Borel 可测的。考虑伊藤式的 n 维随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t)\mathrm{d}t+g(x(t),t)\mathrm{d}w(t),0\leqslant t<\infty\tag{3}$$

设(3)式具有初值 $x(0)=x_0$,其中 x_0 是 $\{F_0\}$ 上可测的 $\mathbf{R}^n$ 值的随机变量满足 $E[x_0^2]<\infty$,那么这个方程就等价于随机积分方程 $x(t)=x_0+\int_0^tf(x(s),s)\mathrm{d}s+\int_0^tg(x(s),s)\mathrm{d}w(s),0\leqslant t<\infty$。

引理[4-5] (伊藤公式)设 $x(t)(t\geqslant 0)$ 是方程(3)的解,$V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$,则 $V(x(t),t)$ 仍是伊藤过程,且具有随机微分

$$\mathrm{d}V(x(t),t)=\{V_t(x(t),t)+V_x x(t),t)f(t)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}(g^{\mathrm{T}}(t)V_{xx}(x(t),t)g(t))\}\mathrm{d}t+V_x(x(t),t)g(t)\mathrm{d}w(t)\ \text{a.s.}$$

下面将借助构造 Lyapunov 函数的方法并应用 Ito 公式,当假设 A 满足时,方程(2)式不仅存在正解,而且该正解不会在有限时间内爆破。

2 模型的正解

定理 假设 A 成立,则对任意给定的初值 $(x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^2$。则方程(2)式存在唯一正解 $(x(t),y(t))\in\mathbf{R}_+^2\ (t\geqslant 0)$ a.s.。

证明 显然方程(2)式系数是局部 Lipschitz 连续的,对任意给定初值 $(x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^2$,则方程(2)式存在唯一的局部解 $(x(t),y(t))(t\in[0,\tau_e))$,其中 τ_e 是爆破时间[6-7],那么要这个解全局存在,只需要证明 $\tau_e=\infty$,a.s.[8-10]。

设 $k_0>0$ 足够大,使 $(x(0),y(0))$ 的每一个分量都落在 $[\frac{1}{k_0},k_0]$ 中,定义停时 $\tau_k=\inf\{t\in[0,\tau_e]:x(t)\notin(\frac{1}{k},k)$ 或 $y(t)\notin(\frac{1}{k},k)\}$,其中 $k\geqslant k_0$,令 $\inf\varnothing=\infty$($\varnothing$ 为空集),显然当 $k\rightarrow\infty$ 时,τ_k 单调递增,令 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\rightarrow\infty}\tau_k$,则 $\tau_\infty\leqslant\tau_e$,a.s.。如果能够证明 $\tau_\infty=\infty$,a.s.,则 $\tau_e=\infty$,a.s.。也就是 $(x(t),y(t))\in\mathbf{R}_+^2\ (t\geqslant 0)$,a.s.。换句话说也就是要证明 $\tau_\infty=\infty$,a.s.。若不然,则存在常数 $T>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$,使 $P\{\tau_\infty\leqslant T\}>\varepsilon$,则存在 $k_1\geqslant k_0$,当 $k\geqslant k_1$ 时有

$$P\{\tau_\infty\leqslant T\}\leqslant\varepsilon\tag{4}$$

因此定义一个 C^2 函数 $V:\mathbf{R}_+^2\rightarrow\mathbf{R}_+,V(x,y)=(x-1-\ln x)+(y-1-\ln y)$,其中当 $u\succ 0$ 时,$u-1-\ln u\geqslant 0$,故 $V(x,y)$ 为非负函数。

当 $(x(t),y(t))\in\mathbf{R}_+^2\ (t\geqslant 0)$ 时,由伊藤公式得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(x(t),y(t))=&(1-x^{-1}(t))[x(t)(r_1(t)-a_1(t)x(t))-b_1(t)]\cdot\frac{x^n(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t))\mathrm{d}t+\\&\sigma_1x(t)\mathrm{d}w_1(t)]+(1-y^{-1}(t))[y(t)(r_2(t)-a_2(t)y(t))+b_2(t)\cdot\frac{x^n(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t))\mathrm{d}t+\\&\sigma_2\frac{x^n(t)y(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}\mathrm{d}w_2(t)]+0.5x^{-2}(t)x^2(t)\sigma_1^2\mathrm{d}t+0.5y^{-2}(t)[\frac{x^n(t)y(t)}{m^ny^n(t)+x^n(t)}]^2\sigma_2^2\mathrm{d}t=\\&[-a_1(t)x^2(t)+r_1(t)x(t)+a_1(t)x(t)-a_2(t)y^2(t)+r_2(t)y(t)+a_2(t)y(t)-b_1(t)\cdot\end{aligned}$$

$$\frac{x^n t}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)+b_1(t)\cdot\frac{x^{n-1}(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)+b_2(t)\cdot\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)-$$

$$b_2(t)\cdot\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}+0.5\sigma_1^2+0.5\Big[\frac{x^n(t)y(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\Big]^2\sigma_2^2-r_1(t)-r_2(t)\Big]\mathrm{d}t+(\sigma_1 x(t)-\sigma_1)\mathrm{d}w_1(t)+$$

$$\Big[\sigma_2\frac{x^n(t)y(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\Big]-\sigma_2\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\Big]\mathrm{d}w_2(t)=F(x(t),y(t))\mathrm{d}t+(\sigma_1 x(t)-\sigma_1)\mathrm{d}w_1(t)+$$

$$\Big[\sigma_2\frac{x^n(t)y(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\Big]-\sigma_2\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\Big]\mathrm{d}w_2(t)$$

其中　$F(x(t),y(t))=-a_1(t)x^2(t)+r_1(t)x(t)+a_1(t)x(t)-a_2(t)y^2(t)+r_2(t)y(t)+a_2(t)y(t)-$

$$b_1(t)\cdot\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)+b_1(t)\cdot\frac{x^{n-1}(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)+b_2(t)\cdot\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\cdot y(t)-$$

$$b_2(t)\cdot\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}+0.5\sigma_1^2+0.5\Big[\frac{x^n(t)y(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\Big]^2\sigma_2^2-r_1(t)-r_2(t)$$

记 $x(t)=x,y(t)=y,r_i(t)=r_i,a_i(t)=a_i,b_i(t)=b_i,i=1,2$，易得

$$F(x,y)\leqslant -a_1x^2+r_1x+a_1x-a_2y^2+r_2y+a_2y+\frac{b_1x^{n-1}y}{m^ny^n+x^n}+\frac{b_2x^ny}{m^ny^n+x^n}+0.5\sigma_1^2+0.5\sigma_2^2-r_1-r_2=$$

$$-a_1x^2-a_2y^2+(r_1+a_1)x+\Big(r_2+a_2+\frac{b_1x^{n-1}}{m^ny^n+x^n}+\frac{b_2x^n}{m^ny^n+x^n}\Big)y+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-r_1-r_2$$

显然 $F(x,y)$ 有上界，设为 $K\succ 0$，则

$$\mathrm{d}V(x,y)\leqslant K\mathrm{d}t+(\sigma_1 x(t)-\sigma_1)\mathrm{d}w_1(t)+\Big[\sigma_2\frac{x^n(t)y(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}-\sigma_2\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\Big]\mathrm{d}w_2(t)$$

对上式从 0 到 $T\wedge\tau_k$（表示 $\min(T,\tau_k)$）积分得到

$$\int_0^{T\wedge\tau_k}\mathrm{d}V(x(t),y(t))\leqslant\int_0^{T\wedge\tau_k}K\mathrm{d}t+\int_0^{T\wedge\tau_k}\{(\sigma_1x(t)-\sigma_1)\mathrm{d}w_1(t)+$$

$$\Big[\sigma_2\frac{x^n(t)y(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}-\sigma_2\frac{x^n(t)}{m^n y^n(t)+x^n(t)}\Big]\mathrm{d}w_2(t)\}$$

因为 $x(T\wedge\tau_k)\in\mathbf{R}_+^n$ 对上式两边取期望得

$$E[V(x(T\wedge\tau_k),y(T\wedge\tau_k))]\leqslant V(x(0),y(0))+KE(T\wedge\tau_k)\leqslant V(x(0),y(0))+KT$$

式中及下面 $E(f)$ 表示 f 的数学期望。

令 $\Omega_k=\{\tau_k\leqslant T\}(k\geqslant k_1)$，则(4)式可写成 $P(\Omega_k)\geqslant\varepsilon$。对每一个 $\omega\in\Omega_k$，由停时的定义存在 $x(\tau_k,\omega)$ 或 $y(\tau_k,\omega)$ 等于 k 或 $\frac{1}{k}$，从而 $V(x(T\wedge\tau_k),y(T\wedge\tau_k))$ 不小于 $k-1-\ln k$ 或 $\frac{1}{k}-1-\ln\frac{1}{k}=\frac{1}{k}-1+\ln k$，即总有

$$V(x(T\wedge\tau_k),y(T\wedge\tau_k))\geqslant[k-1-\ln k]\wedge\Big[\frac{1}{k}-1+\ln k\Big]$$

由此知

$$V(x(0),y(0))+KT\geqslant\varepsilon[1_{\Omega_k}(\omega)V(x(T\wedge\tau_k),y(T\wedge\tau_k))]\geqslant\varepsilon\{[k-1-\ln k]\wedge\Big[\frac{1}{k}-1+\ln k\Big]\}$$

其中 $1_{\Omega_k}(\omega)$ 表示 Ω_k 的特征函数。令 $k\to\infty$，则 $\infty>V(x(0),y(0))+KT=\infty$。所以 $\tau_\infty=\infty$，a. s.。证毕

此定理说明了随机扰动下的具有比率依赖的 Holling-$(n+1)$ 型的食饵—捕食系统，在满足假设 A 的条件下存在唯一的正解，而且无论白噪声的强度多大，即 $\sigma_i(i=1,2)$ 有多大，该系统都存在唯一的全局正解。

参考文献：

[1] 马知恩.种群生态学的数学模型与研究[M].合肥:安徽教育出版社,1994.

[2] 申素慧,原三领,罗建梅,等.一类基于比率的Holling-($n+1$)型捕食系统的定性分析[J].上海理工大学学报,2009,31(1):11-13.

[3] 赵雷.在随机扰动下的具有Holling-($n+1$)型功能反应函数的捕食模型解的研究[J].南京工业职业技术学院学报,2009,14(9):6-18.

[4] Fima C K. Introduction to stochastic calculus with applications[M]. London:Imperial College Press,2004:90-100.

[5] Elworthy K D. Stochastic differential equations on manifolds[M]. Cambridge:Cambridge Uni Press,1982:30-40.

[6] Arnold L. Stochastic differential equations:theory and applications[M]. New York:Whiley,1972:8-28.

[7] Friedman A. Stochastic differential equations and their applications[M]. New York:Academic Press,1972:10-30.

[8] Li Y Q,Gao H L. Existence,uniquencess and global asymptotic stability of positive solutions of a predator-prey system with Holling-II functional response with random perturbation[J]. Non Ana,2008,68:1694-1705.

[9] 鲁铁军,王美娟,刘妍.一类基于比率的捕食-食饵系统的全局稳定性分析[J].上海理工大学学报,2008,30(2):107-111.

[10] 孟笑莹,邓飞其,彭云建.具有随机扰动的食饵-捕食系统的稳定性[J].系统工程与电子技术,2011,33(3):85-89.

[11] 任丽萍,李波.具有Holling-Ⅲ型功能性捕食模型的定性分析[J].四川师范大学学报:自然科学版,2009,32(6):757-762.

[12] 唐小平,李靖云,高文杰.食饵被开发并具有Holling-Ⅲ型的捕食系统周期解的存在性[J].四川师范大学学报:自然科学版,2008,31(2):164-167.

The Existence of Positive Solutions of a Random Perturbations of the Ratio of Holling-rely on ($n+1$) Type Predator-Prey Systems

HUA Ying-ying, *YANG Zhi-chun*

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, previous studies Holling-($n+1$) random predator functional response system, the existence of positive solutions on the basis of further study this model is based on ratio-dependent theory, a class discussion based on the ratio-dependent Holling-($n+1$) of random-type predator-prey system global existence of positive solutions. This model in random white noise interference environment, Lyapunov function method and through the help of formula ITO, detailed positive solutions that the system in a limited time, and it won't blast positive solution to the global existence.

Key words: Holling-($n+1$) stochastic predator-prey system; Lyapunov function method; ITO formula; global existence

(责任编辑　黄　颖)