CNKI:50-1165/N. 20110917. 1359. 010

广义 Fibonacci 数列的和公式*

张福玲
(渭南师范学院 数学与信息科学系,陕西 渭南 714000)

摘要:通过定义广义的 Fibonacci 数列 $\{G_n\}$:$G_{n+1}=uG_n+vG_{n-1}$,$G_0=a$,$G_1=b$,其中 $a,b,u,v\in\mathbf{R}$。利用特征方程得到了数列 $\{G_n\}$ 的通项公式 $G_n=\frac{(\sqrt{u^2+4v}-u)a+2b}{2\sqrt{u^2+4v}}\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n+\frac{(\sqrt{u^2+4v}-u)a-2b}{2\sqrt{u^2+4v}}\left(\frac{u-\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n$。运用数列 $\{G_n\}$ 的递推性质,采用初等方法证明了数列 $\{G_n\}$ 的几个求和公式 $\sum\limits_{k=0}^{n}G_k$、$\sum\limits_{k=0}^{n}G_{2k}$、$\sum\limits_{k=1}^{n}G_{2k-1}$、$\sum\limits_{k=0}^{n}kG_k$、$\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^kG_k$,将广义 Fibonacci 数列的结论进行了推广。

关键词:广义 Fibonacci 数列;递推;求和公式
中图分类号:O157 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2011)05-0045-04

1 研究背景

中世纪欧洲最著名的数学家 Fibonacci 在其著作《Liber Abaci》中提出了一个关于兔子繁殖的问题,从而引出了著名的 Fibonacci 数列,记为 $\{F_n\}$。Fibonacci 数列满足二次线性的递推关系 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$,$F_0=0$,$F_1=1$。这个数列的每一项称为 Fibonacci 数。这个数列在数学的理论研究中有重要的作用,不少学者对这两个数列的一些特性进行了深入细致的研究,并且取得了不少的研究成果,文献[1]中将这个数列进行推广,得到了广义的 Fibonacci 数列。

定义 若数列 $\{G_n\}$ 满足 $G_{n+1}=uG_n+vG_{n-1}$,$G_0=a$,$G_1=b$,其中 $a,b,u,v\in\mathbf{R}$,称该数列 $\{G_n\}$ 为广义的 Fibonacci 数列。

关于广义 Fibonacci 数列,文献[2-4]研究了广义 Fibonacci 数列的 3 个通项表达式,文献[5]研究了在 $u=v=2$ 情况下广义 Fibonacci 数列的求和公式,文献[6]研究了广义 Fibonacci 数列在 $v=1$,$a=0$,$b=1$ 情况下的几个求和公式。文献[7]研究了广义 Fibonacci 数列在 $v=1$,$a=2$,$b=1$ 情况下的几个求和公式。文献[8]研究了广义 Fibonacci 数列在 $a=0$,$b=1$ 情况下的几个求和公式。文献[9-12]研究了广义 Fibonacci 数列连续 n 项和公式,本文继续对该数列进行了研究,得到了一般情况下广义 Fibonacci 数列的通项公式,同时还推导出了 $\sum\limits_{k=0}^{n}G_k$、$\sum\limits_{k=0}^{n}G_{2k}$、$\sum\limits_{k=1}^{n}G_{2k-1}$、$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kG_k$、$\sum\limits_{k=0}^{n}kG_k$ 的计算公式。

2 主要结论及证明

定理 1 $\{G_n\}$ 为广义 Fibonacci 数列,若 $u^2+4v\geqslant 0$,则 $\{G_n\}$ 的通项为

$$G_n=\frac{(\sqrt{u^2+4v}-u)a+2b}{2\sqrt{u^2+4v}}\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n+\frac{(\sqrt{u^2+4v}-u)a-2b}{2\sqrt{u^2+4v}}\left(\frac{u-\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n$$

证明 因为 $\{G_n\}$ 满足递推关系 $\begin{cases}G_{n+1}=uG_n+vG_{n-1}\\G_0=a,G_1=b\end{cases}$,由递推关系的特征方程 $x^2-ux-v=0$ 解得特征

* 收稿日期:2011-05-10 修回日期:2011-06-14 网络出版时间:2011-09-17 13:59:00
资助项目:陕西省科技厅项目(No. 2010JM1009);渭南师范学院科研基金项目(No. 10YKZ64);渭南师范学院基础数学重点学科资助(2008 年)
作者简介:张福玲,女,副教授,硕士,研究方向为数论。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110917.1359.201105.45_010.html

根为 $x_1=\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}$,$x_2=\frac{u-\sqrt{u^2+4v}}{2}$,所以递推关系的通解为

$$G_n=A\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n+B\left(\frac{u-\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n$$

代入初值解得

$$A=\frac{(\sqrt{u^2+4v}-u)a+2b}{2\sqrt{u^2+4v}},B=\frac{(\sqrt{u^2+4v}+u)a-2b}{2\sqrt{u^2+4v}}$$

所以 $\{G_n\}$ 的通项为

$$G_n=\frac{(\sqrt{u^2+4v}-u)a+2b}{2\sqrt{u^2+4v}}\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n+\frac{(\sqrt{u^2+4v}+u)a-2b}{2\sqrt{u^2+4v}}\left(\frac{u-\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n$$

若 $u=v=1$,当 $a=0$,$b=1$,则为 Fibonacci 数列的通项公式 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 当 $a=2$,$b=1$,则为 Lucas 数列的通项公式 $L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$。 证毕

定理2 若 $u+v-1\neq 0$,$\sum_{k=0}^{n}G_k=\frac{G_{n+1}+vG_n-(1-u)a-b}{u+v-1}$。

证明 设 $S=G_0+G_1+G_2+G_3+\cdots+G_n$,则

$$uS=uG_0+uG_1+uG_2+uG_3+\cdots+uG_n,vS=vG_0+vG_1+vG_2+vG_3+\cdots+vG_n$$

根据 $\{G_n\}$ 的递推公式,两相加式可得

$$(u+v)S=uG_0+G_2+G_3+\cdots+G_{n+1}+vG_n=(u-1)G_0-G_1+S+G_{n+1}+vG_n$$

而 $u+v-1\neq 0$,即 $S=\sum_{k=0}^{n}G_k=\frac{G_{n+1}+vG_n-(1-u)a-b}{u+v-1}$。 证华

定理3 若 $u^2-(v-1)^2\neq 0$,$\sum_{k=0}^{n}G_{2k}=\frac{G_{2n+2}-v^2G_{2n}+(u^2+v-1)a-ub}{u^2-(v-1)^2}$。

证明 因为 $\sum_{k=1}^{n}G_{2k+1}=u\sum_{k=1}^{n}G_{2k}+v\sum_{k=1}^{n}G_{2k-1}$,所以有

$$(1-v)\sum_{k=0}^{2n}G_k-(1-v)G_1-(1-v)G_0+G_{2n+1}-vG_1=(u+(1-v))\sum_{k=0}^{n}G_{2k}-(u+(1-v))G_0$$

那么

$$(u+(1-v))\sum_{k=0}^{n}G_{2k}=(1-v)\sum_{k=0}^{2n}G_k-G_1+uG_0+G_{2n+1}$$

由定理2可得

$$(u+(1-v))\sum_{k=0}^{n}G_{2k}=(1-v)\frac{G_{2n+1}+vG_{2n}-(1-u)a-b}{u+v-1}-G_1+uG_0+G_{2n+1}$$

根据 $\{G_n\}$ 的递推公式有 $\sum_{k=0}^{n}G_{2k}=\frac{G_{2n+2}-v^2G_{2n}+(u^2+v-1)a-ub}{u^2-(v-1)^2}$。 证毕

定理4 若 $u^2-(v-1)^2\neq 0$,$\sum_{k=1}^{n}G_{2k-1}=\frac{G_{2n+1}-v^2G_{2n-1}-uva+(v-1)b}{u^2-(v-1)^2}$。

证明 因为 $\sum_{k=1}^{2n}G_k=\sum_{k=1}^{n}G_{2k}+\sum_{k=1}^{n}G_{2k-1}$,所以 $\sum_{k=1}^{n}G_{2k-1}=\sum_{k=1}^{2n}G_k-\sum_{k=1}^{n}G_{2k}$,根据 $\{G_n\}$ 的递推公式有,由定理2和定理3可得

$$\sum_{k=1}^{n}G_{2k-1}=\frac{G_{2n+1}+vG_{2n}-(1-u)a-b}{u+v-1}-\frac{G_{2n+2}-v^2G_{2n}+(u^2+v-1)a-ub}{u^2-(v-1)^2}$$

即 $\sum_{k=1}^{n} G_{2k-1} = \dfrac{G_{2n+1} - v^2 G_{2n-1} - uva + (v-1)b}{u^2 - (v-1)^2}$。　　证毕

定理 5　若 $u - v + 1 \neq 0$，$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k G_k = \dfrac{(-1)^n G_{n+1} + (-1)^{n+1} vG_n + (1+u)a - b}{u - v + 1}$。

证明　设 $S = G_0 - G_1 + G_2 - G_3 + \cdots + (-1)^n G_n$，则

$uS = uG_0 - uG_1 + uG_2 - uG_3 + \cdots + (-1)^n uG_n$，$-vS = -vG_0 + vG_1 - vG_2 + vG_3 + \cdots + (-1)^{n+1} vG_n$

根据 $\{G_n\}$ 的递推公式，两式相加可得

$$(u - v)S = (1 + u)G_0 - G_1 - S + (-1)^n G_{n+1} + (-1)^{n+1} vG_n$$

而 $u - v + 1 \neq 0$，即 $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k G_k = \dfrac{(-1)^n G_{n+1} + (-1)^{n+1} vG_n + (1+u)a - b}{u - v + 1}$。　　证毕

定理6　若 $u + v - 1 \neq 0$，$\sum_{k=1}^{n} kG_k = \dfrac{(n(u+v-1) - (1-v))(G_{n+1} + vG_n) + (u+v-1)vG_n + (2-u)va + (1+v)b}{(u+v-1)^2}$。

证明　由定理 2 可知 $\sum_{k=1}^{n} G_k = \dfrac{G_{n+1} + vG_n - va - b}{u + v - 1}$。

$$G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_n = \frac{G_{n+1} + vG_n - va - b}{u + v - 1}$$

$$G_2 + G_3 + \cdots + G_n = \frac{G_{n+1} + vG_n - va - b}{u + v - 1} - G_1$$

$$\square = \square$$

$$G_n = \frac{G_{n+1} + vG_n - va - b}{u + v - 1} - G_1 - G_2 - G_3 + \cdots + G_{n-1}$$

将以上各式相加为

$$\sum_{k=1}^{n} kG_k = n\frac{G_{n+1} + vG_n - va - b}{u + v - 1} - \left[\frac{G_2 + vG_1 - va - b}{u + v - 1} + \frac{G_3 + vG_2 - va - b}{u + v - 1} + \cdots + \frac{G_n + vG_{n-1} - va - b}{u + v - 1}\right] =$$

$$n\frac{G_{n+1} + vG_n - va - b}{u + v - 1} - \left[(1 + v)\sum_{k=1}^{n} G_k - \frac{vG_n - (n-1)va - nb}{u + v - 1}\right] =$$

$$n\frac{G_{n+1} + vG_n - va - b}{u + v - 1} - \left[(1 + v)\frac{G_{n+1} + vG_n - va - b}{(u + v - 1)^2} - \frac{vG_n - (n-1)va - nb}{u + v - 1}\right] =$$

$$\frac{[n(u + v - 1) - (1 + v)](G_{n+1} + vG_n) + (u + v - 1)vG_n + (2 - u)va + (1 + v)b}{(u + v - 1)^2}$$

若 $u = v = 2$，$v = 1$、$a = 0$、$b = 1$，$v = 1$、$a = 2$、$b = 1$，$a = 0$、$b = 1$ 时，以上定理分别为参考文献[3-6]中的结论。

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1\text{；}\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1\text{；}\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k F_k = (-1)^n F_{n+1} + (-1)^{n+1} F_n - 1\text{；}\sum_{k=1}^{n} kF_k = (n-2)F_{n+2} + F_n + 2$$

当 $a = 2$，$b = 1$，以上定理分别为 Lucas 数列的求和公式

$$\sum_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1\text{；}\sum_{k=0}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} + 1\text{；}\sum_{k=1}^{n} L_{2k-1} = L_{2n} - 2$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_k = (-1)^n L_{n+1} + (-1)^{n+1} L_n + 3\text{；}\sum_{k=1}^{n} kL_k = (n-2)L_{n+2} + L_n + 4$$

证毕

参考文献：

[1] 吴振奎. 世界数学名题欣赏—斐波那契数列[M]. 沈阳：辽宁教育出版社,1995.

[2] 陈淑贞,曾庆年. 广义 Fibonacci 数列的通项及性质[J]. 海军工程大学学报,2008,20(3):11-14.

[3] 陈淑贞,曾庆年. 广义 Fibonacci 数列的通项及性质[J]. 海军工程大学学报,2008,20(3):11-14.

[4] 马巧云. 广义 Fibonacci 数列的通项[J]. 西安联合大学学报,2004,7(5):30-32.

[5] 陈淑贞. 一类广义 Fibonacci 数列的研究[J]. 海南师范大学学报:自然科学版,2010,23(1):1-3 .

[6] Xi G W,Liu M X. The Some Sum Formulas for Generalized Fibonacci numbers [J]. Chin Quart J of Math,2007,22(2):258-2665.

[7] 张福玲. 关于广义 Lucas 数列的一些恒等式[J]. 西南民族大学学报:自然科学版,2010,26(2):177-181.

[8] 席高文. 广义 Fibonacci 数的一些恒等式[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(3):420-426 .

[9] 张福玲,王琳. 广义 Fibonacci 数列连续 n 项和公式[J]. 吉林师范大学学报:自然科学版,2010,31(3):111-113.

[10] 吴茂念. 广义 Fibonacci 数列一些前 n 项和式[J]. 贵州大学学报:自然科学版,2005,22(4):343- 347.

[11] 郜舒竹,张翠. 广义 Fibonacci 等矩子列连续几项和的统一公式[J]. 首都师范大学学报:自然科学版,2008,29(3):16-18.

[12] 王玉彬,郜舒竹. 对广义 Fibonacci 等距子列连续 n 项和公式的改进[J]. 首都师范大学学报:自然科学版,2009,30(5):1-2.

The Finite Sum Formula for Generalized Fibonacci Numbers

ZHANG Fu-ling

(College of Mathematics and Information Science, Weinan Teacher's College, Weinan Shaanxi 714000, China)

Abstract: In this paper, defining the Generalized Fibonacci Sequences $\{G_n\}$: $G_{n+1} = uG_n + vG_{n-1}$, $G_0 = a$, $G_1 = b$, where $a,b,u,v \in \mathbf{R}$. The general formula of Generalized Fibonacci Sequences $G_n = \frac{(\sqrt{u^2+4v}-u)a+2b}{2\sqrt{u^2+4v}}\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n + \frac{(\sqrt{u^2+4v}-u)a-2b}{2\sqrt{u^2+4v}}\left(\frac{u-\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)^n$ is given by using characteristic equation. Using the recurrence property of generalized Fibonacci Sequences, this article provides the some finite sum formulas which are $\sum_{k=0}^{n} G_k$、$\sum_{k=0}^{n} G_{2k}$、$\sum_{k=1}^{n} G_{2k-1}$、$\sum_{k=0}^{n} kG_k$、$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k G_k$ for generalized Fibonacci Sequences $\{G_n\}$,promoting the conclusion of Generalized Fibonacci Sequences.

Key words: generalized Fibonacci numbers; recurrence; sum formula

(责任编辑 黄 颖)