CNKI :50 - 1165/N. 20110917. 1359. 014

球谐环形振荡势薛定谔方程的精确解*

周 鑫，胡先权
（重庆师范大学 物理与电子工程学院，重庆 400047）

摘要：本文在新的环状非球谐振子势的基础上研究了一种新的非中心势，称之为球谐环状震荡势 $V(r,\theta) = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 + \frac{\hbar^2}{2Mr^2}\left(\frac{\eta + A\cos^2\theta + B\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)$。用 Nikiforov-Uvarov 方法进行了研究，求出了球谐环形振荡势条件下的薛定谔方程的精确解 $K_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im\phi)$。其角向和径向方程的束缚态的解可以用罗德里格斯公式、广义超球多项式和广义拉盖尔多项式来表示，分别为 $H_n = C_n' x^{(1-\tilde{a})/4}(1-x)^{-\tilde{b}/2}F\left(-n, n+\frac{\tilde{a}}{2}+\tilde{b}+1, \frac{\tilde{a}}{2}+1, x\right)$，$y_{n_r}(s) = L_{n_r}^{\mu}(s)$，$B_{n_r} = \frac{1}{2^{n_r}n_r!}$，$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}$。

关键词：非中心势；薛定谔方程；Nikiforov-Uvarov 方法；束缚态
中图分类号：O562.1；O413.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6693（2011）05-0063-05

最近一些年，非中心势成了量子物理研究领域里的重要课题。首先，非中心势中发生的偶然简并和隐藏对称性引起了物理学家的注意。很多基础性研究工作[1-2]列举了一系列导致偶然简并的非中心势。结果表明，非中心势在许多坐标体系中可以进行坐标分离，且其动态对称性会导致薛定谔方程的分离。其次，由于涉及到环状分子模型及变形核子之间相互作用等在量子化学和核物理领域内的应用，人们对非中心势薛定谔方程的精确求解进行了大量的研究。特别是，Hartmann 与他的同事在量子化学中发现的库仑环形势[3-5]和 Quesne 系统研究的环形振荡势[6]导致了一种运用各种方法来求解非中心势薛定谔方程的量子力学观点。

本文在文献[7-10]的基础上研究了一种新的非中心势，它包含谐振子势，径向负 2 次幂和一个新的角变量函数的乘积，共计 4 项势函数，可称之为球谐环形振荡势

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 + \frac{\hbar^2}{2Mr^2}\left(\frac{\eta + A\cos^2\theta + B\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right) \tag{1}$$

其中 M 和 ω 是粒子质量和频率，η，A 和 B 是实常数。

本文运用 Nikiforov-Uvarov（NU）方法[11]推导该非中心势的薛定谔方程，求得束缚态精确解和能量频谱，同时也讨论变角部分对径向部分解的影响。

1 Nikiforov-Uvarov 简介

NU 方法是通过特殊的正交函数求解超几何分布类型的二阶微分方程。对于给定的势，如果薛定谔或类薛定谔方程在球坐标系下，通过适当的坐标变换简化为广义超几何分布类型的方程，系统地求出精确解或特解。能用 NU 方法进行求解的方程通常具有以下形式

$$\Psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\Psi'(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma^2(s)}\Psi(s) = 0 \tag{2}$$

其中 $\tilde{\tau}(s)$ 是不高于一次的多项式，$\sigma(s)$、$\tilde{\sigma}(s)$ 是不高于二次的多项式。要注意的是，在这些系数中能量 E 也可以作为一个参数。把 $\Psi(s) = \phi(s)y(s)$ 代入（1）式，通过一定的数学计算，得到一个简化形式的方程

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0$$

而 $\ln\phi(s)$ 的导数满足以下方程

* 收稿日期：2011-06-05 修回日期：2011-07-10 网络出版时间：2011-09-17 13:59:00
资助项目：国家自然科学基金（No. 10575140013）
作者简介：周鑫，男，硕士研究生，研究方向为量子物理；通讯作者：胡先权，E-mail：huxquan2003@yahoo.com.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110917.1359.201105.63_019.html

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\varphi(s)=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \tag{3}$$

其中 $\pi(s)=\frac{1}{2}(\tau(s)-\tilde{\tau}(s))$。(3) 式最有用的实例是 $\tau(s)=\tilde{\tau}(s)+2\pi(s)$,(2) 式是超几何型方程,它的多项式解 $y_n(s)$ 可由罗德里格斯公式给出

$$y_n(s)=\frac{B_n}{\rho(s)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}(\sigma(s)\rho(s)) \tag{4}$$

其中 B_n 是归一化常数,$\rho(s)$ 是满足皮尔森方程的加权函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\sigma(s)\rho(s))=\sigma(s)\rho(s) \tag{5}$$

该方法要求的函数 $\pi(s)$ 和参数 λ 定义如下

$$\pi(s)=\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2-\sigma(s)+k\sigma(s)} \tag{6}$$

$$\lambda=k+\pi'(s) \tag{7}$$

$\pi(s)$ 必须是多项式的平方才有平方根,那么唯一的可能是其判别式为 0。因此,$\pi(s)$ 没有平方根。

另一方面,在 $\pi(s)$ 的计算中,k 的取值是关键点。为了找到 k 的值,该表达式必须是某多项式的平方。由于$\rho(s)>0$,$\sigma(s)>0$,则在此方法中,$\tau(s)$ 的导数必须为负值。如果在 (9) 式中的 λ 是

$$\lambda_n=-n\tau'(x)-\frac{1}{2}n[(n-1)\sigma''(x)],\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{8}$$

那么,这个超几何分布型方程有 n 多次幂的特解。

2 薛定谔方程的精确解

2.1 薛定谔方程的分离变量

对于某一粒子,其任意势的薛定谔方程可以写成

$$\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r})+\frac{2M}{\hbar^2}(E-V(\boldsymbol{r}))\Psi(\boldsymbol{r})=0 \tag{9}$$

把(1) 式代入 (9) 式,然后取自然单位($\hbar=M=\omega=1$),在球坐标下,方程变为

$$\left(-\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+V(r,\theta)-E\right)\Psi(r,\theta,\varphi)=0 \tag{10}$$

其中 E 为粒子能量。对于某一特定的势,设波函数 $\Psi(r,\theta,\varphi)=r^{-1}u(r)H(\theta)k(\varphi)$ 代入 (7) 式中,得到一组二阶微分方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)H(\theta)+\left(\Lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{\eta+A\cos^2\theta+B\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)H(\theta)=0 \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}u(r)+\left(2E-r^2-\frac{\Lambda}{r^2}\right)u(r)=0 \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2K(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2K(\phi)=0$$

其中 m^2 和 Λ 是两个分离常数。(16) 式的周期边界条件是 $K(\varphi+2\pi)=K(\varphi)$。那么 (12) 式的解可以立即得出

$$K_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\mathrm{i}m\phi),m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

2.2 角变量方程的解

现在讨论角变量 (11) 式的解。引入一个新的变量

$$x=\cos^2\theta$$

那么 (11) 式可化为如下形式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}H(x)+\frac{1-3x}{2x(1-x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x)+\left(\frac{-(A+B)x^2+x(\Lambda-m^2-A)x-\eta}{4x^2(1-x)^2}\right)H(x)=0 \tag{13}$$

将 (13) 式与 NU 方法中的 (2) 式对照,则可以得到下列表达式

$$\tilde{\tau}(x)=1-3x,\sigma(x)=2x(1-x)$$

$$\tilde{\sigma}(x)=-(A+B)x^2+x(\Lambda-m^2-A)-\eta$$

将上述表达式代入 (6) 式,可以得出 $\pi(x)$ 为

$$\pi(x)=\frac{1-x}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{ax^2+bx+c} \tag{14}$$

其中

$$a=1+4(\Lambda+B)-8k,\ b=8k-4(\Lambda-m^2-A+1/2),\ c=1+4\eta \tag{15}$$

a 和 b 里面的常数 k 由次二次判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 来确定。求解得出 k 的两个根为

$$k_{1,2}=-\frac{\tilde{c}}{2}\pm\frac{1}{2}\tilde{a}\tilde{b} \tag{16}$$

其中

$$\tilde{a}=\sqrt{1+4\eta},\tilde{b}=\sqrt{\eta+m^2+A+B},\ \tilde{c}=2\eta-\Lambda+m^2+A \tag{17}$$

根据 $\pi(x)$ 是一个多项式的性质,可以得出 $\pi(x)$ 的 4 个可能的值

$$\pi(x)=\frac{1}{2}(1-x)\pm\frac{1}{2}((\tilde{a}-2\tilde{b})x-\tilde{a}),$$

$$k_1 = -\frac{1}{2}(\tilde{c} - \tilde{a}\tilde{b}) \tag{18}$$

$$\pi(x) = \frac{1}{2}(1-x) \pm \frac{1}{2}((\tilde{a}+2\tilde{b})x - \tilde{a}),$$

$$k_1 = -\frac{1}{2}(\tilde{c} + \tilde{a}\tilde{b}) \tag{19}$$

由于 $\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$ 且 $\tau(x)$ 的导数为负,所以 $\pi(x)$ 的最终取值为

$$\pi(x) = \frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{2}((\tilde{a}+2\tilde{b})x - \tilde{a})$$

$$k_1 = -\frac{1}{2}(\tilde{c} + \tilde{a}\tilde{b})$$

由此得出

$$\tau(x) = 2 + \tilde{a} - (\tilde{a} + 2\tilde{b} + a)x$$

$$\tau'(x) = -(\tilde{a} + 2\tilde{b} + 4) < 0$$

根据方程(7)、(8)式,可以得到

$$\lambda = -\frac{1}{2}(\tilde{c} + 1 + \tilde{a} + \tilde{a}\tilde{b} + 2\tilde{b})$$

$$\lambda_n = 2n^2 + 2n + n(\tilde{a} + 2\tilde{b})$$

令 $\lambda = \lambda_n$,则可得出 n 与分离常数 Λ 的关系

$$\Lambda = (1 + 2n + \sqrt{\eta + m^2 + A + B})(1 + 2n + \sqrt{\eta + m^2 + A + B} + \sqrt{1 + 4\eta}) + (\eta - B) \tag{20}$$

分离常数 Λ 包含了来自势的变角部分的贡献。当然,可设相关参数为零,消掉势的变角部分,那么 $\Lambda = l(l+1)$,其中 $l = 1 + n + |m|$。

现在,找出角变量方程的特征函数。运用(3)、(5)式,可以得出

$$\varphi(x) = x^{(1+\tilde{a})-4}(1-x)^{\tilde{b}/2}, \rho(x) = x^{\tilde{a}/2}(1-x)^{\tilde{b}} \tag{21}$$

将(21)式代入(4)式中,可得出多项式

$$y_n(x) = B_n 2^n x^{\tilde{a}/2}(1-x)^{-\tilde{b}}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\tilde{a}/2}(1-x)^{n+\tilde{b}}), \tag{22}$$

$$H(x) = B_n 2^n x^{(1-\tilde{a})/4}(1-x)^{-\tilde{b}/2}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\tilde{a}/2}(1-x)^{n+\tilde{b}})$$

另一方面,$y_n(x)$ 也可以用广义超球多项式法[12] $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ 来表达,其中 $\alpha > -1, \beta > -1$。广义超球多项式满足以下方程

$$(1-z^2)y''(z) - (\alpha - \beta + (\alpha+\beta+2)z)y'(z) + n(n+\alpha+\beta+1)y(z) = 0 \tag{23}$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ 的一个等价定义是

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta} \cdot \frac{d^n}{dz^n}((1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta}) \tag{24}$$

然后 $z = 1 - 2x$ 把代入(23)、(24)式,两方程分别变为

$$x(1-x)y''(x) + (\alpha + 1 - (\alpha+\beta+2)x) \cdot y'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)y(x) = 0,$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}(1-x)^{n+\beta}) \tag{25}$$

由于 $P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) = y_n(x)$,对比(22)、(25)式,得出 $\alpha = \frac{\tilde{a}}{2}, \beta = \tilde{b}, B_n = \frac{1}{n!2^n}$。因此,按照超球多项式计算角向波函数 $H(x)$ 为

$$H(x) = C_n x^{(1-\tilde{a})/4}(1-x)^{-\tilde{b}/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$$

其中 C_n 是归一化常数。运用超几何函数和广义超球多项式的关系

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \cdot F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-z}{z}\right)$$

角向波函数 $H(x)$ 可以依照超几何函数表示成

$$H_n = C'_n x^{(1-\tilde{a})/4}(1-x)^{-\tilde{b}/2} \cdot F\left(-n, n+\frac{\tilde{a}}{2}+\tilde{b}+1, \frac{\tilde{a}}{2}+1, x\right)$$

其中 C'_n 是一个新的归一化常数。

2.3 径向方程的解和能量频谱

为了求解(12)式,引入一个新的变量 $s = r^2$,相应的径向方程就变成如下形式

$$\frac{d^2u(s)}{ds^2} + \frac{1}{2s}\frac{du(s)}{ds} + \frac{2Es - s^2 - \Lambda}{(2s)^2}u(s) = 0 \tag{26}$$

将(26)式与(2)式比较,发现 $\tilde{\tau}(s) = 1, \sigma(s) = 2s, \tilde{\sigma}(s) = 2Es - s^2 - \Lambda$。(26)式类似于超几何型方程,可以用 NU 方法求解。重复方程(21)~(26)式的计算步骤,可以得出

$$k_{1,2} = E \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}$$

$$\pi(s) = \frac{1}{2} \pm \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}\right), k_1 = E + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}$$

$$\pi(s) = \frac{1}{2} \pm \left(s - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}\right), k_2 = E - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}$$

其中,$\pi(s)$ 最合适的形式为

$$\pi(s) = \frac{1}{2} - \left(s - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}\right), k_2 = E - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}$$

所以,$\tau(s)$ 和 $\tau'(s)$ 分别为 $\tau(x) = 2 - 2s + \sqrt{1+4\Lambda}, \tau'(x) = -2 < 0$。

根据(6)、(7)式,$\lambda = \lambda_{n_r}$ 得出

$$E = 2n_r + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\Lambda} \tag{27}$$

将(20)式代入(27)式,得到

$$E = 2n_r + 1 + \left(\frac{1}{4} + \eta - B + gh\right)^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

其中,$g = 1 + 2n_r + (\eta + m^2 + A + B)^{\frac{1}{2}}$

$h = 1 + 2n_r + (\eta + m^2 + A + B)^{\frac{1}{2}} + (1 + 4\eta)^{\frac{1}{2}}$

其中 n_r 是径向波函数的节点数,其值为一个大于等于零的整数。能量方程(27)式中的分离常数 Λ 显示了来自该势角向部分的贡献。当设相关参数为零消掉势的角向部分时,该非中心势将会简化为球谐振子势,而其能量(28)式变成 $E = 2n_r + l + \frac{3}{2}$,其中 $l = 1 + n + |m|$。如果定义 $N = 2n_r + l$ 为球谐振子势的主量子数,能量方程(28)式可以写成 $E = N + \frac{3}{2}$。

现在再来寻求径向方程相应的本征函数。运用方程(3)、(4)、(5)式,得到

$$\varphi(s) = e^{-s/2}s^{(1+\sqrt{1+4\Lambda})/4}, \rho(s) = e^s s^{\sqrt{1+4\Lambda}/2}$$

$$y_{n_r}(s) = B_{n_r}2^{n_r}e^s s^{-\sqrt{1+4\Lambda}/2}\frac{d^{n_r}}{dx^{n_r}}\left(e^{-s}s^{n_r+\sqrt{1+4\Lambda}/2}\right)$$

罗德里格斯公式给出 $L_{n_r}^{\mu}(s) = \frac{1}{n_r!}e^s s^{-\mu}\frac{d^{n_r}}{dx^{n_r}}(e^{-s}s^{n_r+\mu})$,因此,可以得到径向方程的本征函数为

$$y_{n_r}(s) = L_{n_r}^{\mu}(s), B_{n_r} = \frac{1}{2^{n_r}n_r!}, \mu = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\Lambda}$$

通过 $u(s) = \phi(s)y(s)$,(26)式的解可以写成 $u_{n_r}(s) = D_{n_r}e^{-s/2}s^{(1+\sqrt{1+4\Lambda})/4}L_{n_r}^{\mu}(s)$,其中,$\mu = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1 + 4\Lambda}$,$D_{n_r}$ 为归一化常数。

3 结论和启示

本文求解了一个非中心势薛定谔方程。求解过程中发现,在球坐标下,该模型势的薛定谔方程是分离的。能量本征值和相应的本征函数可以用 NU 方法精确求得。同时薛定谔方程的角向部分可以用罗德里格斯公式,广义超球多项或超几何函数来表示。径向方程的本征函数可以依据广义拉盖尔多项式来表示,讨论了变角部分对径向部分解的影响。可以看出 NU 方法是一种用来解决非中心势薛定谔和类薛定谔方程的有效方法。此外,它也指出了获得的非中心势精确解在很多不同领域的应用。例如,这些应用可以用来解释量子化学中某些轴对称体系,同时该模型势可以证明在核物理中的一些赝自旋对称性。另外,从(1)式表达式看出,这个势是典型的非中心势,当 $\gamma = 0$,$\alpha = 2\alpha_0\varepsilon_0\eta\sigma^2$ 和 $\beta = -q\varepsilon_0\alpha_0\sigma^2\eta^2$ 时,这个势退化为 Hartmann 势[13];当 $\gamma = 0$,$\beta = 0$ 和 $\alpha = -ze^2$,这个势退化为库仑势,通过拉普拉斯变换方法和数学技巧,即可获得归一化的径向波函数和角向波函数,同时,自然就获得了能谱方程。

参考文献:

[1] Kibler M,Negadi T. Motion of a particle in a ring-shaped potential:an approach via a nonbijective canonical transformation[J]. Int J Quantum Chem,1984,26:405-409.

[2] Kibler M,Negadi T. Coulombic and ring-shaped potential treated in a unified way via a nonbijective canonical transformation[J]. Theor Chim Acta,1984,66:31-36.

[3] Hartmann H. Die bewegung eines körpers in einemringförmigen potentialfeld[J]. Theor Chrim Acta 1972,24:201-205.

[4] Hartmann H,Schuck R,Radtke J. Die diamagnetische suszeptibilitat eines nicht kugelsymmetrischen systems[J]. Theor Chim Acta,1976,46:1-4.

[5] Hartmann H,Schuch D. Spin-orbit coupling for the motion of a particle in a ring-shaped potential[J]. Int J Quant Chem,1980,18:125-128.

[6] Quesne C. Anew ring-shaped potential and its dynamical invariance algebra[J]. Journal of Physics(A):Mathematics and General,1988,21:3093-3103.

[7] 胡先权,王帮美,崔立鹏. 新环状非球谐振子势的 Dirac 方程束缚态解[J]. 原子与分子物理学报,2009,26:429-433.

[8] Hu X Q,Luo G,Wu Z M,et al. Solving dirac equation with new ring-shaped non-spherical harmonic oscillator[J]. Commun Theor,2010,53:205-208.

[9] 李小红,程新路,焦荣珍,等. 用变分法对 Hellmann 势本征态的研究[J]. 四川大学学报:自然科学版,2001,38:518-521.

[10] 王帮美,胡先权. 非球谐环形振子势的 Schrödinger 方程的解析解[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2008,25:62-66.

[11] Nikiporov A F,Uvarov V B. Special Functions of Mathematical Physics[M]. NewYork:Academic,1988.

[12] Liu S K,Liu S D. Special Function[M]. 2nd ed. Beijing:Meteorology Press,2000.

[13] Chen C Y,Dong S H. Exactly complete solutions of the coulomb potential plus a new ring-shaped potential[J]. Phys Lett A,2005,335:374-376.

Exact Solutions of the Schrodinger Equation with a Spherical Harmonic Oscillatory Ring Shaped Potential

ZHOU Xin, *HU Xian-quan*

(College of Physics and Electronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: According to the idea of introducing non-spherical ring shaped oscillator potential in the Schrödinger equation, we study a new non-central potential which is called the spherical harmonic oscillatory ring shaped potential. $V(r,\theta)=\frac{1}{2}Mr^2\omega^2+\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\left(\frac{\eta+A\cos^2\theta+B\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)$. The exact solutions of Schrödinger equation with this potential are investigated by using Nikiforov-Uvarov method $K_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\mathrm{i}m\phi)$. The bound-state solutions of both the angular and radial equations are expressed in terms of the Rodrigues formula or the generalized Ultraspheri polynomials and the generalized Laguerre polynomials, which are $H_n=C'_n x^{(1-\tilde{a})/4}(1-x)^{-\tilde{b}/2}F\left(-n,n+\frac{\tilde{a}}{2}+\tilde{b}+1,\frac{\tilde{a}}{2}+1,x\right)$, $y_{n_r}(s)=L_{n_r}^{\mu}(s)$, $B_{n_r}=\frac{1}{2^{n_r}n_r!}$, $\mu=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\Lambda}$.

Key words: non-central potential; Schrodinger equation; Nikiforov-Uvarov method; bound state

（责任编辑　欧红叶）