运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20120314.1927.003

半-r-预不变凸规划的混合对偶问题*

张 芳, 万 轩, 杜学武
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

摘要:半 r-预不变凸函数是一类新的广义凸函数,它是 r-预不变凸函数和半预不变凸函数的推广。本文对半 r-预不变凸多目标规划问题的混合型对偶进行了研究。首先,给出了在可微的半 r-预不变凸函数的一个性质;然后,利用半 r-预不变凸函数建立了目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题的混合型对偶,证明了目标函数和约束函数在半 r-预不变凸函数条件下的弱对偶,强对偶和严格逆对偶定理;结论具有一般性,推广了涉及预不变凸函数、r-预不变凸函数和半预不变凸函数的文献的结论。

关键词:半连通集;半-r-预不变凸函数;多目标规划;混合型对偶
中图分类号:O221.2 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2012)02-0012-04

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色,有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一。Yang 和 Chen 为研究一类变分不等式,提出半预不变凸函数的概念,这类函数可以看作是对不变凸性函数的推广[1];Tadeusz 给出了 p-不变凸集的定义,并在此基础上给出了 (p,r)-预不变凸函数的定义[2];江维琼讨论了半预不变凸多目标规划问题有效解的充要条件,得到了半预不变凸多目标规划问题 Wolfe 型对偶模型的弱对偶和强对偶定理[3];赵克全等给出了 r-预不变凸函数的一个性质[4];焦合华给出了一类广义凸函数——半 (p,r)-预不变凸函数的概念,讨论了它们的一些性质,并研究了半 (p,r)-预不变凸规划的最优性条件[5-7];赵克全等利用函数的 B-预不变凸性,给出了多目标规划的一些对偶性结果,分别建立了 Mond-Weir 型对偶模型和 Wolfe 型对偶模型的强对偶和弱对偶性结果[8];彭再云等利用 B-(p,r)-预不变凸函数建立了目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题的 Wolfe 型对偶,证明了目标函数和约束函数在 B-(p,r)-预不变凸函数条件下的弱对偶,强对偶和严格逆对偶定理[9]。

本文将在可微半-r-预不变凸性下,讨论一类多目标规划问题的混合对偶问题。

1 预备知识

本文作以下规定,设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T}$。$x=y$ 是指 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x<y$ 是指 $x_i<y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x\leqq y$ 是指 $x_i\leqslant y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x\leqslant y$ 是指 $x\leqq y$,而 $x\neq y$。$\mathbf R_+$ 表示全体非负实数集。若无特别说明,假定非空开集 $X\subseteq\mathbf R^n$,$f:X\to\mathbf R^k$,$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))^{\mathrm T}$,其中 $f_i:X\to\mathbf R$,$i=1,2,\cdots,k$,还规定 $\mathrm e^{(z_1,z_2,\cdots,z_k)^{\mathrm T}}=(\mathrm e^{z_1},\mathrm e^{z_2},\cdots,\mathrm e^{z_k})^{\mathrm T}$,其中 $z_i\in\mathbf R$,$i=1,2,\cdots,k$,$\eta:X\times X\times(0,1)\to\mathbf R^n$,$h:X\to\mathbf R^l$,$h(x)=(h_1(x),h_2(x),\cdots,h_l(x))^{\mathrm T}$,其中 $h_j(x)\in\mathbf R$,$j=1,2,\cdots,l$,$\varepsilon=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}\in\mathbf R^k$。

定义 1[1] 称 X 为半连通集,若对 $\forall x,y\in X$,都存在函数 η 满足 $\forall\alpha\in[0,1]$,有 $y+\alpha\eta(x,y,\alpha)\in X$。

定义 2[5] 设 X 为半连通集,称 h 是 X 上关于 η 的半-r-预不变凸函数,如果 $\forall x,y\in X$,$\forall\alpha\in(0,1)$,有

$$h(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))\leqq\log(\alpha\mathrm e^{rh(x)}+(1-\alpha)\mathrm e^{rh(y)})^{\frac1r},r\neq0$$
$$h(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))\leqq\alpha h(x)+(1-\alpha)h(y),r=0$$

其中 $\log(\alpha\mathrm e^{rh(x)}+(1-\alpha)\mathrm e^{rh(y)})^{\frac1r}$ 为 l 维实值向量函数,它的第 i 个分量函数为

* 收稿日期:2011-10-13 网络出版时间:2012-03-14 19:27:00
资助项目:国家自然科学基金(No. 10971241;No. 11171363);重庆师范大学自然科学基金(No. 08XLR022)
作者简介:张芳,女,硕士研究生,研究方向为最优化理论应用;通讯作者:杜学武,E-mail:duxuewu@cqnu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.12_003.html

$$\log\left(\alpha e^{rh_i(x)}+(1-\alpha)e^{rh_i(y)}\right)^{\frac{1}{r}},i=1,2,\cdots,l$$

若上面不等式当 $x\neq y$ **时为严格不等式,则称** h **是** X **上关于** η **的严格半-r-预不变凸函数。**

定义 3[10]　**考虑问题(P)′**

$$\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))^{\mathrm{T}},x\in Y$$

其中 Y **是(P)′的可行域。设** x^* **是问题(P)′的一个可行解,即** $x^*\in Y$**。若不存在(P)′的可行解** x**,使** $f(x)<f(x^*)$ **成立,则称** x^* **为该问题的弱有效解。若问题(P)′中的** min **改为** max**,则** $f(x)<f(x^*)$ **应改为** $f(x)>f(x^*)$

本文考虑多目标规划问题

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))^{\mathrm{T}}\\ \text{s. t.}\quad g_j(x)\leqq 0,j=1,2,\cdots,m\\ \qquad x\in X\end{cases}$$

其中 $f_i:X\to\mathbf{R},i=1,2,\cdots,k$ **和** $g_j:X\to\mathbf{R},j=1,2,\cdots,m$ **都是** X **上的可微函数。记(P)的可行域为**

$$D=\{x\in X:g_j(x)\leqq 0,j=1,2,\cdots,m\},\ g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x))^{\mathrm{T}}$$

问题(P)的混合型对偶模型为

$$(\mathrm{MD})\begin{cases}\max f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)\varepsilon\\ \text{s. t.}\ \lambda^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla g(y)=0\\ \qquad \mu^{\mathrm{T}}g(y)\geqq 0,y\in X\\ \qquad \lambda\in\mathbf{R}_+^k,\lambda^{\mathrm{T}}\varepsilon=1,\mu\in\mathbf{R}_+^{m}\end{cases}$$

记问题(MD)的可行域为

$$W=\{(\lambda,\mu,y)\in\mathbf{R}_+^k\times\mathbf{R}_+^m\times X:\lambda^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla g(y)=0,\mu^{\mathrm{T}}g(y)\geqq 0,\lambda^{\mathrm{T}}\varepsilon=1,\lambda\in\mathbf{R}_+^k,\lambda^{\mathrm{T}}\varepsilon=1,\mu\in\mathbf{R}_+^m\}$$

2 主要结论及其证明

引理 1　**设** $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ **为连续可微函数。若** $h:X\to\mathbf{R}^l$ **是** X **上的一个关于** η **的半-r-预不变凸可微函数,则**

$$\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq\frac{1}{r}\left(e^{r(h(x)-h(y))}-\varepsilon\right),r\neq 0$$

$$\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq h(x)-h(y),r=0$$

证明　**当** $r\neq 0$ **时,由** h **在** X **上是关于** η **的半-r-预不变凸函数,则**

$$h(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))\leqq\log\left(\alpha e^{rh(x)}+(1-\alpha)e^{rh(y)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

于是,当 $r>0$ **时,有**
$$\frac{e^{rh(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))}-e^{rh(y)}}{\alpha}\leqq e^{rh(x)}-e^{rh(y)}$$

因为 h **是可微函数,则** $F(x)=e^{rh(x)}$ **也是可微函数,上式可化为**

$$\frac{F(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))-F(y)}{\alpha}\leqq F(x)-F(y)$$

令 $\alpha\to 0^+$**,则由于**　$F(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))=F(y)+\alpha\nabla F(y)\eta(x,y,0)+o(\alpha)$

故有 $\nabla F(y)\eta(x,y,0)\leqq F(x)-F(y)$**,又**

$$\nabla F(y)=r\cdot\begin{pmatrix}e^{rh_1(y)}&&&\\&e^{rh_2(y)}&&\\&&\cdots&\\&&&e^{rh_l(y)}\end{pmatrix}\cdot\nabla h(y)$$

则有 $r\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq e^{r(h(x)-h(y))}-\varepsilon$**,即** $\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq\frac{1}{r}\left(e^{r(h(x)-h(y))}-\varepsilon\right)$**。**

当 $r<0$ **时,同理可得** $\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq\frac{1}{r}\left(e^{r(h(x)-h(y))}-\varepsilon\right)$**。**

当 $r=0$ **时,类似可得** $\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq h(x)-h(y)$**。**　**证毕**

定理1 (弱对偶)假设x和(λ,μ,y)分别是问题(P)和(MD)的可行解,$x\neq y$,$\lambda^{\mathrm{T}}f+\mu^{\mathrm{T}}g$是$X$上关于$\eta$的连续半-$r$-预不变可微凸函数,则$f(x)\not< f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)\varepsilon$。

证明 用反证法。假设$f(x)<f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)\varepsilon$,由$\lambda^{\mathrm{T}}\varepsilon=1$,有$\lambda^{\mathrm{T}}f(x)<\lambda^{\mathrm{T}}f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)$,因为$x$是问题(P)的可行解,则有

$$\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+\mu^{\mathrm{T}}g(x)<\lambda^{\mathrm{T}}f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y) \tag{1}$$

于是,由半-r-预不变凸函数定义及引理1可知,对问题(P)的可行解$x(x\neq y)$,当$r\neq 0$时,有

$$\eta(x,y,0)^{\mathrm{T}}[\lambda^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla g(y)]\leqq\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+\mu^{\mathrm{T}}g(x)-\lambda^{\mathrm{T}}f(y)-\mu^{\mathrm{T}}g(y))}-\varepsilon)$$

又因为(λ,u,y)是问题(MD)的可行解,有$\lambda^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla g(y)=0$,故

$$\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+\mu^{\mathrm{T}}g(x)-\lambda^{\mathrm{T}}f(y)-\mu^{\mathrm{T}}g(y))}-\varepsilon)\geqq 0$$

则$\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+\mu^{\mathrm{T}}g(x)\geqq\lambda^{\mathrm{T}}f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)$,与(1)式矛盾,故此时$f(x)\not< f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)\varepsilon$。

当$r=0$时,有

$$\eta(x,y,0)^{\mathrm{T}}[\lambda^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla g(y)]\leqq\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+\mu^{\mathrm{T}}g(x)-\lambda^{\mathrm{T}}f(y)-\mu^{\mathrm{T}}g(y)$$

又因为$\lambda^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla g(y)=0$,故

$$\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+\mu^{\mathrm{T}}g(x)\geqq\lambda^{\mathrm{T}}f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)$$

与(1)式矛盾,故此时$f(x)\not< f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)\varepsilon$。 证毕

引理2[10] 假设x^*是问题(P)的弱有效解,则存在$\lambda^*\in\mathbf{R}_+^k$,$\lambda^{*\mathrm{T}}\varepsilon=1$,$\mu^*\in\mathbf{R}_+^m$,使得下列结论成立:1)$\lambda^{*\mathrm{T}}\nabla f(x^*)+\mu^{*\mathrm{T}}\nabla g(x^*)=0$;2)$\mu^{*\mathrm{T}}g(x^*)=0$。

定理2 (强对偶)假设x^*是问题(P)的弱有效解,且对$\forall\lambda\in\mathbf{R}_+^k$,$\forall\mu\in\mathbf{R}_+^m$,$\lambda^{\mathrm{T}}f+\mu^{\mathrm{T}}g$均为$X$上关于$\eta$的半-$r$-预不变连续可微凸函数,则存在$\lambda^*\in\mathbf{R}_+^k$,$\mu^*\in\mathbf{R}_+^m$,使$(\lambda^*,\mu^*,x^*)$是问题(MD)的弱有效解。

证明 因为x^*是问题(P)的弱有效解,可知存在$\lambda^*\in\mathbf{R}_+^k$,$\mu^*\in\mathbf{R}_+^m$,使得引理2的结论成立,从而可知$(\lambda^*,\mu^*,x^*)$是问题(MD)的可行解。又由定理1可知,对于问题(MD)的可行解(λ,μ,y),$y\neq x^*$,有$f(x^*)\not< f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)\varepsilon$,再结合引理2的结论2),有$f(x^*)+\mu^{*\mathrm{T}}g(x^*)\varepsilon\not< f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)\varepsilon$,所以由定义3可知,$(\lambda^*,\mu^*,x^*)$是问题(MD)的弱有效解。 证毕

定理3 (逆对偶)假设(λ^*,μ^*,y^*)是问题(MD)的弱有效解且$y^*\in D$,对于$\forall\lambda\in\mathbf{R}_+^k$,$\forall\mu\in\mathbf{R}_+^m$,$\lambda^{\mathrm{T}}f+\mu^{\mathrm{T}}g$均为$X$上关于$\eta$的半-$r$-预不变连续可微凸函数,则$y^*$是问题(P)的弱有效解。

证明 用反证法。假设y^*不是问题(P)的弱有效解,则存在$x^*\in D$,$x^*\neq y^*$,使得$f(x^*)<f(y^*)$。于是$\lambda^{*\mathrm{T}}f(x^*)<\lambda^{*\mathrm{T}}f(y^*)$。又因为$(\lambda^*,\mu^*,y^*)$是问题(MD)的弱有效解且$y^*\in D$及$x^*\in D$,所以,$\mu^{*\mathrm{T}}f(x^*)\geqq 0$,$g_j(y^*)\leqq 0$,$g_j(x^*)\leqq 0$,$j=1,2,\cdots,m$,$\mu^*\in\mathbf{R}_+^m$,于是有$\mu^{*\mathrm{T}}g(y^*)=0$,$\mu^{*\mathrm{T}}g(x^*)\leqq 0$,从而

$$\lambda^{*\mathrm{T}}f(x^*)+\mu^{*\mathrm{T}}g(x^*)<\lambda^{*\mathrm{T}}f(y^*)+\mu^{*\mathrm{T}}g(y^*) \tag{2}$$

于是由半-r-预不变凸函数定义及引理1可知,对于问题(P)的可行解$x^*(x^*\neq y^*)$,有

$$[\lambda^{*\mathrm{T}}\nabla f(y^*)+\mu^{*\mathrm{T}}\nabla g(y^*)]\eta(x^*,y^*,0)\leqq\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(\lambda^{*\mathrm{T}}f(x^*)+\mu^{*\mathrm{T}}g(x^*)-\lambda^{*\mathrm{T}}f(y^*)-\mu^{*\mathrm{T}}g(y^*))}-\varepsilon)$$

又因为(λ^*,u^*,y^*)是问题(MD)的可行解,有$\lambda^{*\mathrm{T}}\nabla f(y^*)+\mu^{*\mathrm{T}}\nabla g(y^*)=0$,所以

$$\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(\lambda^{*\mathrm{T}}f(x^*)+\mu^{*\mathrm{T}}g(x^*)-\lambda^{*\mathrm{T}}f(y^*)-\mu^{*\mathrm{T}}g(y^*))}-\varepsilon)\geqq 0$$

则$\lambda^{*\mathrm{T}}f(x^*)+\mu^{*\mathrm{T}}g(x^*)\geqq\lambda^{*\mathrm{T}}f(y^*)+\mu^{*\mathrm{T}}g(y^*)$,与(2)式矛盾,所以$y^*$是问题(P)的弱有效解。

证毕

参考文献:

[1] Yang X Q,Chen G Y. A Class of nonconvex functions and prevariational inequalities[J]. Jorunal of Mathematical Analysis and Applications,1992,169(2):359-373.

[2] Tadeusz A. (p,r)-Invex sets and functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2001,263(2):

355-379.

[3] 江维琼. 半预不变凸多目标规划的最优性条件及 Wolfe 型对偶定理[J]. 华东师范大学学报:自然科学版,2006,3:32-36.

[4] Zhao K Q,Long P J,WAN X. A characterization for r-preinvex function[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science,2011,28(2):1-5.

[5] 焦合华. 半(p,r)-预不变凸函数及其规划的最优性条件[J]. 云南民族大学学报:自然科学版,2007,165-99.

[6] 焦合华. 半(p,r)-不变凸多目标分式规划的 Wolfe 型对偶[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2011,34(5):659-662.

[7] 焦合华. B-(p,r)-不变凸规划的最优性条件及 Wolfe 型对偶[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2008,31(1):88-92.

[8] 赵克全,陈哲. B-预不变凸函数在多目标规划中的对偶问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2008,25:1-3.

[9] 彭再云,万轩. B-(p,r)-预不变凸规划的 Wolfe 对偶问题与极小化问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27:1-6.

[10] 林锉云,董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春:吉林教育出版社,1992.

Operations Research and Cybernetics

Mixed Duality for Programming with Semi-r-preinvexity Functions

ZHANG Fang, *WAN Xuan*, *DU Xue-wu*

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, we introduced a new class of generalized convex function, called semi-r-preinvex function, which generalized r-preinvex function and semi-preinvex function. We investigated mixed type duality involving semi-r-preinvex function. Firstly, a characterization about differentiable semi-r-preinvex function is presented; secondly, we established dual model of a class of multiobjective programming involving differentiable constraint and objective function and proved the corresponded weak duality, strong duality and strictly inverse duality, which generalized the corresponded result of preinvex function, r-preinvex function and semi-preinvex function.

Key words: semi-connected sets; semi-r-preinvex functions; multiobjective programming; mixed type duality

(责任编辑 黄 颖)