DOI:CNKI:50-1165/N.20120314.1927.009

关于不定方程 $x^3+27=139y^2$ *

熊 川,罗 明
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘要:利用 Pell 方程,递归数列,同余式和平方剩余几种初等方法证明了不定方程 $x^3+27=139y^2$ 仅有整数解$(-3,0)$,$(13,\pm4)$;在证明该结论的过程中,同时证明了不定方程 $x^3+1=417y^2$ 仅有整数解$(x,y)=(-1,0)$,从而给出了不定方程 $x^3+27=139y^2$ 的全部整数解。

关键词:不定方程;整数解;递归数列
中图分类号:O156 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2012)02-0047-04

关于不定方程 $x^3\pm27=Dy^2(D>0)$ 已有不少研究工作。当 D 无 $6k+1$ 形的素因数时,其全部整数解已由柯召、孙琦、曹珍富等人得到[1-4]。但是当 D 含有 $6k+1$ 形的素因数时,方程的求解比较困难。本文运用 Pell 方程,递归数列及同余的方法证明了当 $D=139$ 时,不定方程 $x^3+27=Dy^2$ 仅有整数解$(-3,0)$,$(13,\pm4)$。

引理 1[3] 不定方程 $4x^4-3y^2=1$ 仅有整数解$(x,y)=(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$。

引理 2[3] 不定方程 $x^2-108y^4=1$ 仅有整数解$(x,y)=(\pm1,0)$。

引理 3[3] 不定方程 $x^4-3y^2=1$ 仅有整数解$(x,y)=(\pm1,0)$。

引理 4[3] 不定方程 $x^2-27y^4=1$ 仅有整数解$(x,y)=(\pm1,0)$。

引理 5[5] 不定方程

$$x^3+1=417y^2 \tag{1}$$

仅有整数解$(x,y)=(-1,0)$。

证明 因为$(x+1,x^2-x+1)=1$ 或 3,故方程(1)式给出下列 4 种可能的分解[7-9]。

1)$x+1=417u^2,x^2-x+1=v^2,y=uv,(u,v)=1$;

2)$x+1=3u^2,x^2-x+1=139v^2,y=uv,(u,v)=1$;

3)$x+1=139u^2,x^2-x+1=3v^2,y=uv,(u,v)=1$;

4)$x+1=u^2,x^2-x+1=417v^2,y=uv,(u,v)=1$。

以下分别讨论这 4 种情形所给的(1)式的整数解。

1)解分解 1)的第二式得 $x=0$ 或 1,代入 $x+1=417u^2$ 均不成立,所以该情形无(1)式的整数解。

2)将分解 2)的第二式化为$(2x-1)^2-139(2v)^2=-3$,把分解 2)的第一式代入得 $9(2u^2-1)^2-139(2v)^2=-3$,所以 $3\mid v$,从而有 $9\mid3$,矛盾。所以该情形无(1)式的整数解。

3)将分解 3)的第二式化为$(2x-1)^2-3(2v)^2=-3$,把分解 3)的第一式代入得$(278u^2-3)^2-3(2v)^2=-3$,所以 $3\mid u$。令 $u=3w$,则有$(2v)^2-3(834w^2-1)^2=1$,从而有

$$|2v|+(834w^2-1)\sqrt{3}=x_n+y_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n,n\in\mathbf{Z}$$

其中 $2+\sqrt{3}$ 为 Pell 方程 $X^2-3Y^2=1$ 的基本解,所以有 $834w^2=y_n+1$。当 $2\mid n$ 时,$2\mid y_n$,则 $y_n+1\equiv1\pmod 2$,而 $834w^2\equiv0\pmod 2$,矛盾。所以 $n\equiv\pm\pmod 4$。

当 $n=4m-1$ 时,有

$$834w^2=y_{4m-1}+1=-x_{4m}+2y_{4m}+1=-(1+6y_{2m}^2)+4x_{2m}y_{2m}+1=2y_{2m}(2x_{2m}-3y_{2m})=2y_{2m}x_{2m-1}$$

即 $417w^2=y_{2m}x_{2m-1}$。由于

$$(y_{2m},x_{2m-1})=(y_{2m},2x_{2m}-3y_{2m})=(y_{2m},2x_{2m})=(y_{2m},2)=2$$

* 收稿日期:2011-08-29 网络出版时间:2012-03-14 19:27:00
作者简介:熊川,女,硕士研究生,研究方向为代数数论;通讯作者:罗明,E-mail:luoming1958@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.47_009.html

所以有下列情形之一成立:a) $y_{2m}=834a^2$,$x_{2m-1}=2b^2$;b) $y_{2m}=2a^2$,$x_{2m-1}=834b^2$;c) $y_{2m}=6a^2$,$x_{2m-1}=278b^2$;d) $y_{2m}=278a^2$,$x_{2m-1}=6b^2$。其中 $w=2ab$。

由 a) 得 $4b^4-3y_{2m-1}^2=1$,由引理1可知 $y_{2m-1}=\pm 1$,则 $m=0$ 或1。当 $m=0$ 时,得 $y_{2m}=0$,$a=0$,$w=0$,得到(1)式的平凡解 $(x,y)=(-1,0)$。当 $m=1$ 时,得 $y_{2m}=4$ 代入 $y_{2m}=834a^2$ 不成立。

由 b) 得 $834^2b^4-3y_{2m-1}^2=1$,从而有 $3\mid 1$,这不可能。

由 c) 得 $x_{2m}^2-108a^4=1$,由引理2可知 $x_{2m}=\pm 1$,则 $m=0$,得到(1)式的平凡解 $(x,y)=(-1,0)$。

由 d) 得 $36b^4-3y_{2m-1}^2=1$,从而有 $3\mid 1$,这不可能。

从而 $n=4m-1$ 时得到(1)式的平凡解 $(x,y)=(-1,0)$。

当 $n=4m+1$ 时,可得 $417w^2=y_{2m+1}x_{2m}$。由于

$$(y_{2m+1},x_{2m})=(x_{2m}+2y_{2m},x_{2m})=(2y_{2m},x_{2m})=(y_{2m},x_{2m})=1$$

所以有下列情形之一成立:e) $y_{2m+1}=417a^2$,$x_{2m}=b^2$;f) $y_{2m+1}=a^2$,$x_{2m}=417b^2$;g) $y_{2m+1}=3a^2$,$x_{2m}=139b^2$;h) $y_{2m+1}=139a^2$,$x_{2m}=3b^2$。其中 $w=ab$。

由 e) 得 $b^4-3y_{2m}^2=1$,由引理3可知 $y_{2m}=0$,则 $m=0$,将 $y_{2m+1}=1$ 代入前式,这不可能。

由 f) 得 $417^2b^4-3y_{2m}^2=1$,从而有 $3\mid 1$,不成立。

由 g) 得 $x_{2m+1}^2-27a^4=0$,由引理4得 $x_{2m+1}=1$,则 $m=0$。当 $m=0$ 时,代入 $x_{2m}=139b^2$ 不成立。

由 h) 得 $9b^4-3y_{2m}^2=1$,从而有 $3\mid 1$,不成立。从而当 $n=4m+1$ 时方程(1)式无解。

故情形3)得到(1)式的整数解 $(x,y)=(-1,0)$。

4)由 $x^2-x+1=417v^2$ 得 $(2x-1)^2-417(2v)^2=-3$,把 $x+1=u^2$ 代入得 $(2u^2-3)^2-417(2v)^2=-3$。若 $u^2=1$,则 $x=0$,此时(1)式无整数解。所以不妨设 $u^2\geqslant 2$,则 $2u^2-3>0$。从而有

$$2u^2-3+2v\sqrt{417}=x_n+y_n\sqrt{417}=(11\,313+554\sqrt{417})(u_n+v_n\sqrt{417})=$$
$$(11\,313+554\sqrt{417})(85\,322\,647+4\,178\,268\sqrt{417})^n,\ n\in\mathbf{Z} \tag{2}$$

其中 $(11\,313+554\sqrt{417})$ 给出 Pell 方程 $X^2-417Y^2=-3$ 的最小正整数解,$85\,322\,647+4\,178\,268\sqrt{417}$ 为 Pell 方程 $X^2-417Y^2=1$ 的基本解。对(2)式取模9得到

$$2u^2-3+2v\sqrt{417}\equiv 5\sqrt{417}\pmod 9$$

即得 $2u^2-3\equiv 0\pmod 9$,则 $u^2\equiv 6\pmod 9$,这不可能。所以该情形无(1)式的整数解。

综合4种情形的讨论结果知,方程(1)式仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。 证毕

定理 不定方程

$$x^3+27=139y^2 \tag{3}$$

仅有整数解 $(x,y)=(-3,0)$,$(13,\pm 4)$。

证明 当 $3\mid x$ 时,可知 $9\mid y$,设 $x=3x_1$,$y=9y_1$,则(3)式化为 $x_1^3+1=417y_1^2$。由引理5知 $x_1=-1$,$y_1=0$,故 $x=-3$,$y=0$。

当 $3\nmid x$ 时,将方程(3)式化为 $(x+3)(x^2-3x+9)=139y^2$,易知 $(x+3,x^2-3x+9)=1$,故不定方程(3)式有下列可能的分解[6]。

1) $x+3=139u^2$,$x^2-3x+9=v^2$,$y=uv$;

2) $x+3=u^2$,$x^2-3x+9=139v^2$,$y=uv$。

以下分别讨论这情形所给出的(3)式的整数解。

1)由 $x^2-3x+9=v^2$ 得 $(2x-3)^2-(2v)^2=-27$,解得 $x=-5,8,0,3$,均不满足 $x+3=139u^2$,故该情形无不定方程(3)式的解。

2)将 $x^2-3x+9=139v^2$ 化为 $(2x-3)^2-139(2v)^2=-27$,易知方程 $X^2-139Y^2=-27$ 的全部整数解由以下4个非结合类给出。

$$x_n+y_n\sqrt{139}=\pm(23+2\sqrt{139})(u_n+v_n\sqrt{139})=\pm(23+2\sqrt{139})(77\,563\,250+6\,578\,829\sqrt{139})^n \tag{4}$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{139}=\pm(-23+2\sqrt{139})(u_n+v_n\sqrt{139})=\pm(-23+2\sqrt{139})(77\,563\,250+6\,578\,829\sqrt{139})^n \tag{5}$$

$$x_n'+y_n'\sqrt{139}=\pm(672+57\sqrt{139})(u_n+v_n\sqrt{139})=\pm(672+57\sqrt{139})(77\,563\,250+6\,578\,829\sqrt{139})^n \tag{6}$$

$$\bar{x}_n'+\bar{y}_n'\sqrt{139}=\pm(-672+57\sqrt{139})(u_n+v_n\sqrt{139})=\pm(-672+57\sqrt{139})(77\,563\,250+6\,578\,829\sqrt{139})^n \tag{7}$$

其中 $n\in\mathbf{Z}$,$77\,563\,250+6\,578\,829\sqrt{139}$是 Pell 方程 $X^2-139Y^2=1$ 的基本解,因此有 $2x-3$ 可能取 $\pm x_n$,$\pm\bar{x}_n$,$\pm x_n'$,$\pm\bar{x}_n'$,但易验证 $\bar{x}_n=-x_n$,$\bar{x}_n'$,$\bar{x}_n'=-x_n'$,故 $2x-3$ 可能取 x_n,$\bar{x}_n$,x_n',$\bar{x}_n'$。由 $x+3=u^2$ 得

$$2u^2=x_n+9 \tag{8}$$

$$2u^2=\bar{x}_n+9 \tag{9}$$

$$2u^2=x_n'+9 \tag{10}$$

$$2u^2=\bar{x}_n'+9 \tag{11}$$

但对于(10)、(11)式,由(6)、(7)式可得 $3\mid u$,而 $x+3=u^2$,从而 $3\mid x$,与 $3\nmid x$ 矛盾。所以只需考虑(8)、(9)式。显然必须 $x_n\geqslant-9$,$\bar{x}_n\geqslant-9$,从而(4)、(5)式只需取自

$$x_n+y_n\sqrt{139}=(23+2\sqrt{139})(u_n+v_n\sqrt{139})=(23+2\sqrt{139})(77\,563\,250+6\,578\,829\sqrt{139})^n,\ n\geqslant0 \tag{12}$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{139}=(-23+2\sqrt{139})(u_n+v_n\sqrt{139})=(-23+2\sqrt{139})(77\,563\,250+6\,578\,829\sqrt{139})^n,\ n\geqslant0 \tag{13}$$

先讨论(9)式,由(13)式易得递推关系

$$\bar{x}_{n+2}=155\,126\,500\bar{x}_{n+1}-\bar{x}_n,\ \bar{x}_0=-23,\ \bar{x}_1=44\,959\,712 \tag{14}$$

由(14)式易知 $n\equiv0\pmod 2$,但对(14)式取模 3,当 $n\equiv0\pmod 2$ 时,$\bar{x}_n\equiv1\pmod 3$,故 $2u^2\equiv1\pmod 3$,这不可能。

下面再来讨论(8)式,由(12)式易得递推关系

$$x_{n+2}=155\,126\,500x_{n+1}-x_n,\ x_0=23,\ x_1=3\,612\,869\,212 \tag{15}$$

$$u_{n+2}=155\,126\,500u_{n+1}-u_n,\ u_0=1,\ u_1=77\,563\,250 \tag{16}$$

$$v_{n+2}=155\,126\,500v_{n+1}-v_n,\ v_0=0,\ v_1=6\,578\,829 \tag{17}$$

$$x_n=23u_n+278v_n,\ u_{n+2kt}\equiv(-1)^t u_n\pmod{u_k},\ v_{n+2kt}\equiv(-1)^t v_n\pmod{u_k} \tag{18}$$

$$u_{2n}=u_n^2+139v_n^2,\ v_{2n}=2u_nv_n,\ u_n^2-139v_n^2=1 \tag{19}$$

由(15)式易知 $n\equiv0\pmod 2$,对递归数列(15)式分两步取模。

第一步:取模 5,其剩余类周期为 4,排除 $n\equiv2\pmod 4$,故剩下 $n\equiv0\pmod 4$。取模 30 631,其剩余类周期为 8,结合 $n\equiv0\pmod 4$,排除 $n\equiv4\pmod 8$,故 $n\equiv0\pmod 8$。再分别取模 31,863,其剩余类周期均为 32,分别排除 $n\equiv8,16,24\pmod{32}$,故剩下 $n\equiv0\pmod{32}$。

第二步:取模 11,其剩余类周期为 6,可得 $n\equiv0,4\pmod 6$。取模 13,其剩余类周期为 12,可得 $n\equiv0,10\pmod{12}$,结合 $n\equiv0\pmod 4$ 有 $n\equiv0\pmod{12}$。取模 17,19,其剩余类周期为 18,可得 $n\equiv0\pmod{18}$。取模 41,109,151,其剩余类周期为 10,可得 $n\equiv0,4\pmod{10}$,又 $n\equiv0\pmod{18}$ 有 $n\equiv0,54\pmod{90}$。取模 1 889,其剩余类周期为 90,得到 $n\equiv0\pmod{90}$。

结合上面两步,由孙子定理可得 $n\equiv0\pmod{5\times9\times2^5}$,从而 $n\equiv0\pmod{5\times2^5}$。

若 $n\neq0$,可设 $n=2\times5\times l\times2^r$,其中 $r\geqslant4$ 且 $2\nmid l$。若记 $n=2kml$,其中 k 为奇数,则有

$$x_n=x_{2m+(kl-1)2m}\equiv\pm x_{2m}\pmod{u_{2m}}$$

又 $u_m\equiv1\pmod 8$,$v_m\equiv0\pmod 8$,从而 $u_{2m}\equiv u_m^2+139v_m^2\equiv1\pmod 8$。

若 $x_n\equiv x_{2m}\pmod{u_{2m}}$,令 $m\begin{cases}2^r, & r\equiv1,3,5\pmod 6\\ 5\times2^r, & r\equiv0,2,4\pmod 6\end{cases}$,于是有

$$\left(\frac{2(x_n+9)}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2(23u_{2m}+278v_{2m})+18}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{64u_m^2+4\times278u_mv_m+2\,892v_m^2}{u_{2m}}\right)=$$

$$\left(\frac{-5\,004v_m^2+4\times278u_mv_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{139v_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{2u_m-9v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2u_m-9v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2u_m-9v_m}{u_m^2+139v_m^2}\right)=$$

$$\left(\frac{u_m-\frac{9}{2}v_m}{u_m^2+139v_m^2}\right)=\left(\frac{u_m^2+139v_m^2}{u_m-\frac{9}{2}v_m}\right)=\left(\frac{637}{u_m-\frac{9}{2}v_m}\right)=-\left(\frac{2u_m-9v_m}{637}\right)$$

对 $\{2u_m-9v_m\}$ 取模 637,得到周期为 168 的剩余类序列,对 $\{2^r\}$ 取模 168,得周期为 6 的剩余类序列。由表 1 易得 $\left(\frac{2(x_n+9)}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{2u_m-9v_m}{637}\right)=-1$,矛盾。

若 $x_n\equiv -x_{2m}(\bmod u_{2m})$,令 $m=\begin{cases}2^r, r\equiv 0,2,4(\bmod 6)\\ 5\times 2^r, r\equiv 1,3,5(\bmod 6)\end{cases}$,类似有

$$\left(\frac{2(x_n+9)}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2(-23u_{2m}-278v_{2m})+18}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-28u_m^2-4\times278u_mv_m-64\times139v_m^2}{u_{2m}}\right)=$$

$$\left(\frac{-36\times139v_m^2-4\times278u_mv_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-139v_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{2u_m+9v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2u_m+9v_m}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{2u_m+9v_m}{637}\right)$$

同理可得表 2

表 1 周期为 168 的 $\{2u_m-9v_m\}$ 序列

$r(\bmod 6)$	0	1	2	3	4	5
$m(\bmod 168)$	152	128	104	8	80	32
$2u_m-9v_m$	107	289	471	562	16	380

表 2 周期为 168 的 $\{2u_m+9v_m\}$ 序列

$r(\bmod 6)$	0	1	2	3	4	5
$m(\bmod 168)$	64	136	88	40	16	160
$2u_m+9v_m$	471	380	16	289	107	562

由表 2 易得 $\left(\frac{2(x_n+9)}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{2u_m+9v_m}{637}\right)=-1$,矛盾。

所以 $n=0$,有 $2u^2=x_0+9=23+9=32$,则 $u^2=16$,所以 $x=13$,$y=\pm4$。

综合上述各种情形讨论的结果,不定方程 $x^3+27=139y^2$ 仅有整数解 $(-3,0)$,$(13,\pm4)$。 证毕

参考文献:

[1] 柯召,孙琦.关于丢番图方程 $x^3+1=3Dy^2$ [J].中国科学,1981,12:1453-1457.

[2] 柯召,孙琦.关于丢番图方程 $x^3+1=Dy^2$ [J].四川大学学报:自然科学版,1981,2:1-6.

[3] 曹珍富.丢番图方程引论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989:273-275.

[4] 柯召,孙琦.数论讲义[M].北京:高等教育出版社,1987:214-231.

[5] 李双志,罗明.关于不定方程 $x^3+1=201y^2$ [J].西南大学学报:自然科学版,2010,35(1):11-14.

[6] 李双娥.关于不定方程 $x^3+27=26y^2$ [J].西南大学学报:自然科学版,2008,33(1):1-4.

[7] 罗明.关于不定方程 $x^3+1=7y^2$ [J].重庆师范大学学报:自然科学版,2003,20(1)5-7.

[8] 陈友艳.关于不定方程 $x^3-1=434y^2$ [J].重庆工商大学学报:自然科学版,2005,28(5):463-466.

[9] 喻朝阳.关于不定方程 $x^3-1=13y^2$ [J].重庆工学院学报,2006,20(11):132-133.

On the Diophantine Equation $x^3+27=139y^2$

XIONG Chuan, LUO Ming

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: By using the elementary method of recurrent sequence, congruent formula and quadratic residue, the authors prove that the diophantine equation $x^3+27=139y^2$ has only the integer solutions $(x,y)=(-3,0)$, $(13,\pm4)$. In the process of proving the conclusion, the authors also prove that the diophantine equation $x^3+1=417y^2$ has only the integer solution $(x,y)=(-1,0)$, and then give all integer solutions of $x^3+27=139y^2$.

Key words: diophantine equation; integer solution; recurrent sequence

（责任编辑　黄　颖）