DOI:CNKI:50-1165/N. 20120314. 1927. 010

离散奇异系统的有限时间控制*

黄 发,吴保卫
(陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062)

摘要:有限时间稳定就是指在一个有限的时间区间内,系统的状态轨线始终保持在预先给定的界限内,它是与通常意义下稳定相互独立的一个概念。本文给出了离散奇异系统有限时间稳定以及有限时间有界的定义,研究了离散奇异系统通过状态反馈的有限时间控制问题。本文当中首先给出了离散奇异系统是有限时间稳定或有限时间有界的充分条件,这些条件可归结为基于线性矩阵不等式的可解性问题。在此基础上又得到了两个充分条件,它们能保证控制器的存在,并且使得闭环系统是有限时间稳定或者是有限时间有界的。然后通过线性矩阵不等式的求解,给出了控制器的设计方法。最后用两个数值算例验证了该方法的有效性。

关键词:离散奇异系统;状态反馈;有限时间稳定;有限时间有界;线性矩阵不等式
中图分类号:O231. 1 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2012)02-0051-04

在控制系统的分析与设计中,系统的稳定性一向是人们首先考虑和解决的问题,其中以渐进稳定研究的最多。通常情况下,渐进稳定能够满足实际工程的要求,但是渐进稳定刻画的是一个系统的稳态性能,它不能反应系统的暂态性能。所以,有时候也会存在一个渐进稳定的系统,具有很坏的暂态性能,因而在工程中造成很坏的影响,甚至根本无法应用。为了研究系统的暂态性能,Peter Dorato 于 1961 年在参考文献[1]中提出了短时间稳定的概念,也就是后来所谓的有限时间稳定的概念,并得到了较为广泛的研究。所谓有限时间稳定就是指在一个有限的时间区间内,系统的状态轨线始终保持在预先给定的界限内,它是与通常意义下稳定相互独立的一个概念。在参考文献[2-5]中,给出了线性离散系统有限时间稳定的定义、判断方法以及控制器的设计;而参考文献[6-7]给出了线性时变奇异系统的有限时间稳定的相关结论。

本文将研究离散奇异系统的有限时间控制问题,目的是找到一个状态反馈控制器使得闭环系统是有限时间稳定或者是有限时间有界的。在本文当中,假设$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是正则的,即存在复数$s$,使得$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq 0$,它能保证文章中所考虑的系统解的存在性以及唯一性。

1 问题描述及准备

考虑如下离散奇异系统

$$\boldsymbol{E}x(k+1)=\boldsymbol{A}x(k) \tag{1}$$

定义 1 给定正数δ、ε,且$\delta<\varepsilon$,以及$N\in\mathbf{N}_+$,正定矩阵$\boldsymbol{R}$,系统(1)关于$(\delta,\varepsilon,\boldsymbol{R},N)$称为有限时间稳定的,若$x^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(0)\leqslant\delta^2\Rightarrow x^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(k)<\varepsilon^2$,$\forall k\in\{1,2,\cdots,N\}$。

考虑如下带有扰动的离散奇异系统

$$\boldsymbol{E}x(k+1)=\boldsymbol{A}x(k)+\omega(k) \tag{2}$$

$$\omega(k+1)=\boldsymbol{F}\omega(k) \tag{3}$$

定义 2 给定正数δ、ε、d,且$\delta<\varepsilon$,以及$N\in\mathbf{N}_+$,正定矩阵$\boldsymbol{R}$,系统(2)(3)式关于$(\delta,\varepsilon,\boldsymbol{R},N,d)$称为有限时间有界的,若$x^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(0)\leqslant\delta^2\Rightarrow x^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(k)<\varepsilon^2$,$\forall\omega(k):\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)\leqslant d$,$\forall k\in\{1,2,\cdots,N\}$。

* 收稿日期:2011-08-10 网络出版时间:2012-03-14 19:27:00
资助项目:国家自然科学基金(No. 10971123);陕西省自然科学基础研究计划项目(No. SJ08A20)
作者简介:黄发,男,硕士研究生,研究方向为控制理论;通讯作者:吴保卫,E-mail:wubw@snnu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.51_010.html

注1 若上述定义中 $E = I$,则可以得到参考文献[5]当中的定义1和定义2。

问题1 对于系统

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{4}$$

设计一个形如下式的状态反馈控制器

$$u(k) = Kx(k) \tag{5}$$

使得由(4)、(5)式组成的闭环系统关于 (δ,ε,R,N) 是有限时间稳定的。

问题2 对于系统

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \omega(k) \tag{6}$$

$$\omega(k+1) = F\omega(k) \tag{7}$$

设计一个形如(5)式的状态反馈控制器,使得由(5)~(7)式组成的闭环系统关于 $(\delta,\varepsilon,R,N,d)$ 是有限时间有界的。

2 主要结论

定理1 系统(1)式关于 (δ,ε,R,N) 是有限时间稳定的,若存在对称正定矩阵函数 $P(\cdot)$,使得下列不等式成立

$$A^{\mathrm{T}}P(k+1)A - E^{\mathrm{T}}P(k)E \leqslant 0, k \in \{0,1,\cdots,N-1\} \tag{8}$$

$$EP^{\mathrm{T}}RE \leqslant E^{\mathrm{T}}P(k)E, k \in \{1,2,\cdots,N\} \tag{9}$$

$$P(0) < \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}R \tag{10}$$

证明 构造 $V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(k)$,则有

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}P(k+1)Ex(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(k) =$$
$$x^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}P(k+1)Ax(k) - x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(k) = x^{\mathrm{T}}(k)(A^{\mathrm{T}}P(k+1)A - E^{\mathrm{T}}P(k)E)x(k)$$

由(8)式可知

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leqslant 0 \tag{11}$$

对(11)式从0到 $k-1$ 求和可得 $V(x(k)) - V(x(0)) \leqslant 0$,即 $x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(k) \leqslant x^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}P(0)Ex(0)$。

所以,由(9)、(10)式可知

$$x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}REx(k) \leqslant x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(k) \leqslant x^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}P(0)Ex(0) < \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}x^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}REx(0)$$

若 $x^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}REx(0) \leqslant \delta^2 \Rightarrow x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}REx(k) < \varepsilon^2$,从而有系统(1)式关于 (δ,ε,R,N) 是有限时间稳定的。 证毕

定理2 系统(2)、(3)式关于 $(\delta,\varepsilon,R,N,d)$ 是有限时间有界的,若存在对称正定矩阵函数 $P(\cdot)$、$Q(\cdot)$,使得下列不等式成立

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P(k+1)A - E^{\mathrm{T}}P(k)E & A^{\mathrm{T}}P(k+1) \\ P(k+1)A & P(k+1) + F^{\mathrm{T}}Q(k+1)F - Q(k) \end{pmatrix} \leqslant 0, k \in \{0,1,\cdots,N-1\} \tag{12}$$

$$E^{\mathrm{T}}RE \leqslant E^{\mathrm{T}}P(k)E, k \in \{1,2,\cdots,N\} \tag{13}$$

$$E^{\mathrm{T}}P(0)E \leqslant E^{\mathrm{T}}RE \tag{14}$$

$$\delta^2 + \lambda_{\max}Q(0)d < \varepsilon^2 \tag{15}$$

证明 构造 $V(x(k),\omega(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(k) + \omega^{\mathrm{T}}(k)Q(k)\omega(k)$,则有

$$V(x(k+1),\omega(k+1)) - V(x(k),\omega(k)) = x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}P(k+1)Ex(k+1) +$$
$$\omega^{\mathrm{T}}(k+1)Q(k+1)\omega(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(k) - \omega^{\mathrm{T}}(k)Q(k)\omega(k) =$$
$$x^{\mathrm{T}}(k)(A^{\mathrm{T}}P(k+1)A - E^{\mathrm{T}}P(k)E)x(k) + x^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}P(k+1)\omega(k) +$$
$$\omega^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)Ax(k) + \omega^{\mathrm{T}}(k)(P(k+1) + F^{\mathrm{T}}Q(k+1)F - Q(k))\omega(k) =$$
$$z^{\mathrm{T}}(k)\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P(k+1)A - E^{\mathrm{T}}P(k)E & A^{\mathrm{T}}P(k+1) \\ P(k+1)A & P(k+1) + F^{\mathrm{T}}Q(k+1)F - Q(k)k \end{pmatrix}z(k)$$

其中 $z(k)=\begin{pmatrix}x(k)\\ \omega(k)\end{pmatrix}$。

由(12)式可知
$$V(x(k+1),\omega(k+1))-V(x(k),\omega(k))\leqslant 0 \tag{16}$$
对(16)式从 0 到 $k-1$ 求和可得 $V(x(k),\omega(k))-V(x(0),\omega(0))\leqslant 0$,即
$$x^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{E}x(k)+\omega^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{Q}(k)\omega(k)\leqslant x^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{E}x(0)+\omega^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Q}(0)\omega(0)$$
所以,由(13)、(14)式可知
$$\begin{aligned}x^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(k)&\leqslant x^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{E}x(k)\leqslant x^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{E}x(k)+\omega^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{Q}(k)\omega(k)\leqslant\\ &x^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{E}x(0)+\omega^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Q}(0)\omega(0)\leqslant x^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(0)+\omega^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Q}(0)\omega(0)\leqslant\\ &x^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(0)+\lambda_{\max}\boldsymbol{Q}(0)d\end{aligned}$$
由(15)式可知,若 $x^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(0)\leqslant\delta^2\Rightarrow x^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}x(k)\leqslant\delta^2+\lambda_{\max}\boldsymbol{Q}(0)d<\varepsilon^2$,从而有系统(2)、(3)式关于 $(\delta,\varepsilon,\boldsymbol{R},N,d)$ 是有限时间有界的。　　证毕

定理 3　问题 1 是可解的,若存在对称正定矩阵函数 $\boldsymbol{P}(\cdot)$ 和矩阵 $\boldsymbol{K}$,使得(9)、(10)式以及下列不等式成立
$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{E} & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{P}^{-1}(k+1)\end{pmatrix}\leqslant 0,k\in\{0,1,\cdots,N-1\} \tag{17}$$
证明　由(4)、(5)式组成的闭环系统为
$$\boldsymbol{E}x(k+1)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})x(k) \tag{18}$$
由定理 1 可知,系统(18)式关于 $(\delta,\varepsilon,\boldsymbol{R},N)$ 是有限时间稳定的充分条件为,存在对称正定矩阵函数 $\boldsymbol{P}(\cdot)$,使得(9)、(10)式以及下列不等式成立
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k+1)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})-\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{E}\leqslant 0,k\in\{0,1,\cdots,N-1\} \tag{19}$$
对(17)式使用 Schur 补即可得到(19)式成立。　　证毕

定理 4　问题 2 是可解的,若存在对称正定矩阵函数 $\boldsymbol{P}(\cdot)$、$\boldsymbol{Q}(\cdot)$ 和矩阵 $\boldsymbol{K}$,使得(13)(15)式以及下列不等式成立
$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{E} & 0 & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\\ 0 & \boldsymbol{F}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}(k+1)\boldsymbol{F}-\boldsymbol{Q}(k) & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{P}^{-1}(k+1)\end{pmatrix}\leqslant 0,k\in\{0,1,\cdots,N-1\} \tag{20}$$
证明　由(5)(7)式组成的闭环系统为
$$\boldsymbol{E}x(k+1)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})x(k)+\omega(k) \tag{21}$$
$$\omega(k+1)=\boldsymbol{F}\omega(k) \tag{22}$$
由定理 2 可知,系统(21)、(22)式关于 $(\delta,\varepsilon,\boldsymbol{R},N,d)$ 是有限时间有界的充分条件为,存在对称正定矩阵函数 $\boldsymbol{P}(\cdot)$、$\boldsymbol{Q}(\cdot)$ 使得(13)(15)式以及下列不等式成立
$$\begin{pmatrix}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k+1)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})-\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{E} & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k+1)\\ \boldsymbol{P}(k+1)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{P}(k+1)+\boldsymbol{F}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}(k+1)\boldsymbol{F}-\boldsymbol{Q}(k)\end{pmatrix}\leqslant 0,k\in\{0,1,\cdots,N-1\}$$
即
$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{E} & 0\\ 0 & \boldsymbol{F}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}(k+1)\boldsymbol{F}-\boldsymbol{Q}(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}(k+1)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{I})\leqslant 0,k\in\{0,1,\cdots,N-1\} \tag{23}$$
对(20)式使用 Schur 补即可得到(23)式成立。　　证毕

3 数值算例

在这一部分中,将通过 2 个具体的例子来验证文章中给出的方法的是有效的。

例 1　考虑形如(4)式的离散奇异系统,其中 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-0.1\\ -1\end{pmatrix}$,对于给定

的$\delta=1$,$\varepsilon=2$,$N=8$,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$,可以找到$\boldsymbol{P}(k)=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{K}=(1 \quad 1)$,使得定理3当中的条件成立,从而有闭环系统关于$(1,2,\boldsymbol{I},8)$是有限时间稳定的。

例2 考虑形如(6)、(7)式带有干扰的离散奇异系统,其中$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -0.3 & -0.4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$,对于给定的$\delta=1$,$\varepsilon=2$,$N=5$,$d=0.5$,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$,可以找到$\boldsymbol{P}(k)=\begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}(k)=\begin{pmatrix} 2k+2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{K}=(-2 \quad -2)$,使得定理4当中的条件成立,从而有闭环系统关于$(1,2,\boldsymbol{I},5,0.5)$是有限时间有界的。

参考文献:

[1] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems [J]. Proc IRE Int Conv Rec,1961,4:83-87.

[2] Amato F,Carbone M,Ariola M,et al. Finite-time stability of discrete-time systems[C]. Boston MA,USA:American Control Conference,2004:1440-1444.

[3] Amato F,Ariola M. Finite-time control of discrete-time linear systems[J]. Automatic Control,2005,50:724-729.

[4] Amato F,Ariola M,Cosentino C. Finite-time control of discrete-time linear systems:Analysis and design conditions [J]. Automatica,2010,46:919-924.

[5] Wang K,Shen Y,Liu W,et al. Finite-time control for a class of discrete-time linear system[C]. Xuzhou,China:22nd Chinese Control and Decision Conference,2010:546-549.

[6] Zhao S W,Sun J T,Liu L. Finite-time stability of linear time-varying singular systems with impulsive effects[J]. International Journal of Control,2008,81(11):1824-1829.

[7] Xu J,Sun J. Finite-time stability of linear time-varying singular impulsive systems[J]. IET Control Theory and Applications,2010,4(10):2239-2244.

[8] Zhang G M,Xia Y Q,Shi P. New bounded real lemma for discrete-time singular systems[J]. Automatica,2008,44:886-890.

[9] Dai L. Singular control systems[M]. Berlin Heidelberg:Springer-Verlag,1989.

[10] Iwasaki T,Skelton R E. All controller for the general problems:LMI existence conditions and state formulas[J]. Automatica,1994,30:1307-1317.

[11] Amato F,Ariola M,Cosentino C. Finite-time stablilization via dynamic output feedback[J]. Automatica,2006,42:337-342.

[12] Amato F,Ariola M,Cosentino C. Finite-time stability of linear time-varying systems:analysis and controller design [J]. Automatic Control,2010,55:1003-1008.

Finite-time Control of Discrete-time Singular Systems

HUANG Fa, *WU Bao-wei*

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract:Finite-time stability means that the state paths of the systems keep in the given boundaries in a finite-time interval. It's different from the common stability. The problem of finite-time control of discrete-time singular systems is studied in this paper. First the definitions of finite-time stability and finite-time boundary of discrete-time singular systems are given. Then two sufficient conditions are devised, which can guarantee the existence of controllers and stabilize the closed-loop systems. By solving linear matrix inequalities, the design of controllers is stated. Then, two numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words:discrete-time singular systems;state feedback;finite-time stability;finite-time boundedness;linear matrix inequlities

(责任编辑 黄 颖)