

# 一个新混沌系统的分析与控制\*

张学兵

(淮安信息职业技术学院 基础部,江苏 淮安 223003)

摘要:本文提出了一个新的三维连续自治混沌系统,该系统含有3个参数,3个非线性项。通过计算得出混沌系统具有5个平衡点,给定参数 $a, b, c$ 的值,得到了3个实平衡点,经过计算其雅可比矩阵的特征值知 $s_1$ 为不稳定的鞍点, $s_2$ 与 $s_3$ 为不稳定的鞍焦点。接着通过计算得到了混沌系统的3个Lyapunov指数并由此得到了混沌系统的Lyapunov维数,用Matlab软件绘出了系统的吸引子图像,给出了混沌系统的Lyapunov指数谱、对应的分岔图以及Poincaré截面。接着分别用位移反馈控制、增强反馈控制以及加速反馈控制3种不同的反馈控制方法实现了对混沌系统的控制,根据Routh-Hurwitz判据从理论上给予了证明,最后又通过数值仿真的方法验证了控制方法的有效性。

关键词:新的混沌系统;Lyapunov指数;分岔图

中图分类号:TP27;O415.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2012)02-0055-05

自从麻省理工学院的Lorenz于20世纪60年代在数值实验中偶然发现第一个混沌吸引子以来,Lorenz系统<sup>[1]</sup>作为第一个混沌的物理和数学模型,成为后人研究混沌理论的出发点和基石,许多新的自治混沌系统也相继提出并得到了广泛的研究。其中最为著名的是Rossler系统<sup>[2]</sup>,在Lorenz混沌系统反控制中被发现的Chen系统<sup>[3]</sup>、Lü系统<sup>[4]</sup>、Liu系统<sup>[5]</sup>以及Qi系统<sup>[6]</sup>等,特别是Lü系统在Lorenz系统和Chen系统之间架起了一道桥梁,实现了从一个系统到另一个系统的过渡。

混沌控制由于在保密通信、激光物理、化学反应、生物医学等领域的巨大应用潜力,引起了人们的广泛关注。一般来说,有两种策略来实现对连续时间的混沌系统的控制。一个参数摄动的策略,如OGY方法<sup>[7]</sup>与参数谐振方法<sup>[8]</sup>;另一个是状态反馈的策略,如自适应反馈方法<sup>[9]</sup>、时滞反馈方法<sup>[10]</sup>、线性和非线性反馈方法<sup>[11]</sup>、滑模控制方法<sup>[12-13]</sup>等。其中,反馈控制方法较其它控制方法具有鲁棒性、计算方便等优点。

本文建立了一个新的三维自治混沌系统,它具有非常复杂的动力学行为。该混沌系统是一种新型的混沌系统,与Lorenz系统相似,但它与Lorenz不是拓扑等价的。本文通过个反馈控制方法实现了对新的混沌系统的控制。

## 1 新的混沌系统及其动力学特性

本文提出新的三维混沌系统动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) - yz \\ \dot{y} = bx + xz - y \\ \dot{z} = -x - y - z \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x, y, z$ 为状态变量, $a, b, c$ 为实常数。

### 1.1 平衡点及其稳定性

令系统(1)式的右端为零则系统有5个平衡点。

显然, $S_1 = (0, 0, 0)$ 是一个平衡点。令

$$d = \sqrt{(a+b)^2 - 4a}, x_1 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(a-b+d)c}}{a+b+d}$$

$$x_2 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(a-b-d)c}}{a+b-d}, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(a-b+d)c}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(a-b-d)c}, z_1 = \frac{a-b+d}{2}$$

$$z_2 = \frac{a-b-d}{2}$$

则可得到其他4个非零平衡点为

$$S_2 = (x_1, y_1, z_1), S_3 = (-x_1, -y_1, z_1)$$

$$S_4 = (x_2, y_2, z_2), S_5 = (-x_2, -y_2, z_2)$$

该系统共有5个平衡点,而当 $(a-b-d)c < 0$ 时, $x_2$ 与 $y_2$ 是复数,所以只有 $S_1, S_2, S_3$ 为实平衡点。

为了便于讨论,令参数 $a = 10, b = 30, c = 6$ 。

可得到3个平衡点为

$$S_1 = (0, 0, 0), S_2 = (0.1924, 7.6479, 9.7484)$$

$$S_3 = (-0.1924, -7.6479, 9.7484)$$

对于平衡点 $S_1 = (0, 0, 0)$ ,在改点处对系统进行线性化可得雅可比矩阵为

\* 收稿日期:2011-09-19 网络出版时间:2012-03-14 19:27:00

资助项目:国家自然科学基金资助项目(No. 70871056)

作者简介:张学兵,男,讲师,研究方向为非线性分析、动力系统的建模与控制。

网络出版地址: [http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.55\\_011.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.55_011.html)

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & a-z & -y \\ b+z & -1 & x \\ 0 & 2y & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 30 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

为了得到特征根,令  $|\lambda I - J_1| = 0$ , 则可得3个特征根为  $\lambda_1 = -23.3955 < 0$ ,  $\lambda_2 = 12.3955 > 0$ ,  $\lambda_3 = -6 < 0$ 。可见  $\lambda_2$  大于零,  $\lambda_1$  与  $\lambda_3$  都小于零。所以  $S_1$  是一个不稳定的鞍点。

对于平衡点  $S_2$ , 对系统进行线性化可得雅可比

$$J_2 = \begin{bmatrix} -a & a-z & -y \\ b+z & 0 & x \\ 0 & 2y & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0.2516 & -7.6479 \\ 39.7484 & -1 & 0.1924 \\ 0 & 15.2958 & -6 \end{bmatrix}$$

令  $|\lambda I - J_2| = 0$ , 可得3个特征根为

$$\lambda_1 = -22.9955 < 0, \lambda_2 = 2.9977 + 13.8542i$$

$$\lambda_3 = 2.9977 - 13.8542i$$

$\lambda_1$  小于零, 而  $\lambda_2$  与  $\lambda_3$  是一对共轭的复数且实部都大于零, 因此  $S_2$  是一个不稳定的鞍焦点。

对于平衡点  $S_3$ , 可仿照上述方法得到其雅可比

$$J_3 = \begin{bmatrix} -a & a-z & -y \\ b+z & 0 & x \\ 0 & 2y & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0.2516 & 7.6479 \\ 39.7484 & -1 & -0.1924 \\ 0 & -15.2958 & -6 \end{bmatrix}$$

令  $|\lambda I - J_3| = 0$ , 则可得3个特征根为

$$\lambda_1 = -22.9955 < 0, \lambda_2 = 2.9977 + 13.8542i$$

$$\lambda_3 = 2.9977 - 13.8542i$$

结果显示  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2$  与  $\lambda_3$  时实部大于零的共轭复数, 所以  $S_3$  也是不稳定的鞍焦点。

综上, 系统在3个平衡点处都是不稳定的。

## 1.2 耗散性

因为散度

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - c - 1$$

为了使系统(1)是耗散的, 要求

$$-(a+c+1) < 0 \quad (2)$$

在(2)式的条件下, 系统(1)是耗散的, 并以指数形式

式  $\frac{dV}{dt} = e^{-(a+c+1)t}$  收敛。也就是初始体积为  $V_0$  的体

积元在时刻  $t$  时收缩为体积元  $V_0 e^{-(a+c+1)t}$ 。这就意味着当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨线的每个小体积元以指数速率  $-(a+c+1)$  收缩到零, 所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上, 其渐近运动将被固定在一个吸引子上。这说明了吸引子的存在性。

## 1.3 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数刻画了动力系统轨线的分离与排斥情况, 表征了系统的运动特征。令参数  $a = 10$ ,  $b = 30$ ,  $c = 6$ , 初始值为  $[0.1 \ 0.01 \ 0.2]$ , 则可得系统的 Lyapunov 指数为

$$L_1 = 1.9303 \quad L_2 = 0.0013 \quad L_3 = -18.9068$$

根据 Kaplan-Yorke 猜想公式, 新混沌系统(1)的 Lyapunov 维数为

$$D_L = j + \frac{1}{|L_{j+1}|} \sum_{i=1}^j L_i = 2.102$$

可见, 新系统混沌吸引子的分形维数是分数维的。于是可以确定新系统在所选参数下的确处于混沌状态。系统的混沌吸引子如图1所示。

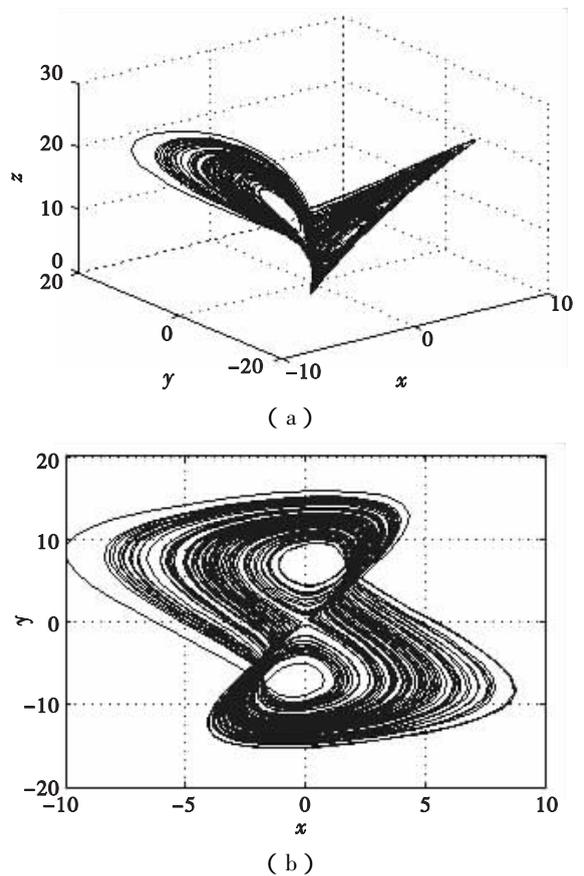


图1  $a = 10$ ,  $b = 30$ ,  $c = 6$  时, 系统的混沌吸引子

## 1.4 分岔图与 Poincaré 截面

分岔图可以清晰地显示系统在周期状态与混沌状态之间的转换, 固定参数  $a = 10$ ,  $b = 30$ , 让  $c$  在区间  $(0, 16)$  内变化, 系统的分岔图如图2所示, 而系统的3个 Lyapunov 指数关于参数  $c$  的变化如图3所示, 从中可以看出随着  $c$  的变化, 系统由倍周期分岔进入混沌状态, 然后又有混沌状态进入周期状态。

Poincaré 截面也是研究混沌的一个重要工具, 当参数  $a = 10$ ,  $b = 30$ ,  $c = 6$ , 分别选取  $x = 0$  与  $y = 0$  平面进行截面, 得 Poincaré 截面如图4所示。由图4可以看出, Poincaré 截面上有一些成片的具有分形结构的密集点, 吸引子的叶片清晰可见, 进一步说

明了此时系统的运动是混沌的。

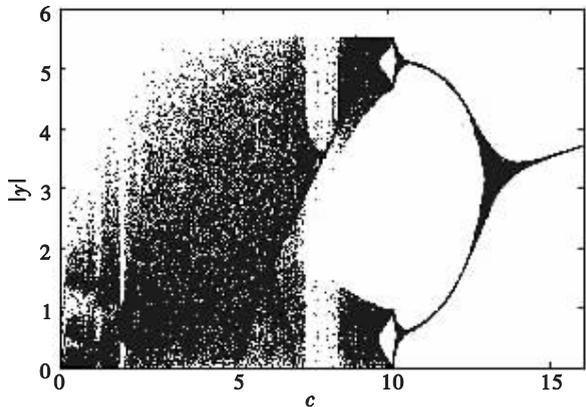


图 2 系统关于 c 的分岔图

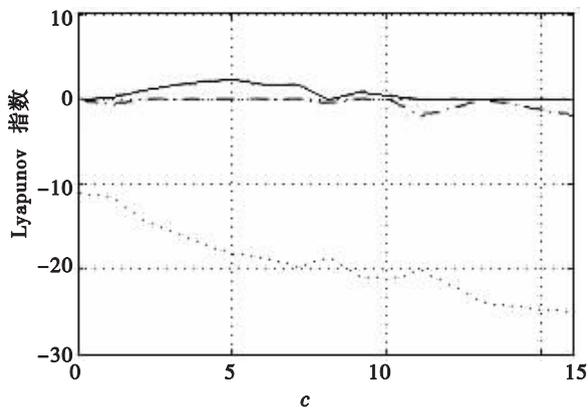


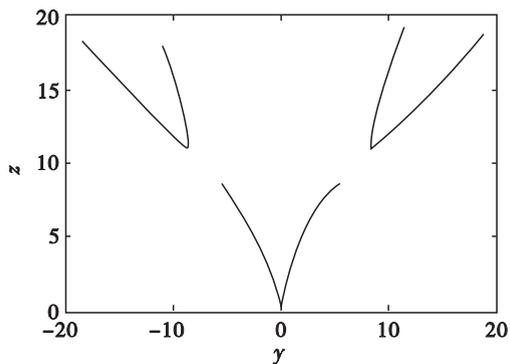
图 3 系统的 Lyapunov 指数谱

## 2 混沌系统的控制

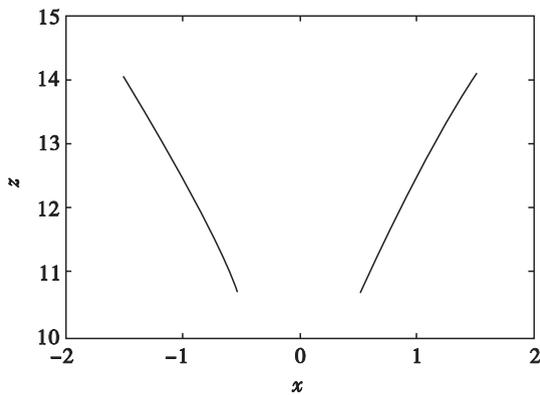
设受控的混沌系统(1)为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) - yz + u_1 \\ \dot{y} &= bx + xz - y + u_2 \\ \dot{z} &= -cz + y^2 - ky + u_3 \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $u_i (i = 1, 2, 3)$  是要设计的控制器。



(a) 在  $x=0$  平面上



(b) 在  $y=0$  平面上  
图 4 Poincaré 截面

### 2.1 混沌系统的位移反馈控制

对于一般反馈控制,系统变量通常是乘以一个反馈增益系数然后添加到该状态变量方程中。如果把这样的反馈控制器添加到另一个状态变量的方程中,那么这种控制方法被称作位移反馈控制<sup>[14]</sup>。

定理 1 对于受控系统(3),若  $u_1 = 0, u_2 = kx, u_3 = 0$ , 其中  $k$  反馈增益系数,当  $k > b - 1$  时系统(2)将渐进稳定到平衡点  $S_1 = (0, 0, 0)$ 。

证明 将系统(3)在平衡点  $S_1 = (0, 0, 0)$  处线性化,可得雅可比矩阵为

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & a-z & -y \\ b+z-k & -1 & x \\ 0 & 2y & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

由此可得特征方程为

$$(\lambda + c)(\lambda^2 + (a+1)\lambda + a + a(k-b)) = 0$$

当  $a+1 > 0, a + a(k-b) > 0$  时,有  $k > b - 1$  根据 Routh-Hurwitz 定理可知此时特征根  $\lambda$  的实部是负的,因此受控系统(2)在平衡点  $S_1(0, 0, 0)$  处是一致渐进稳定的。证毕

数值仿真的结果如图 5 所示。

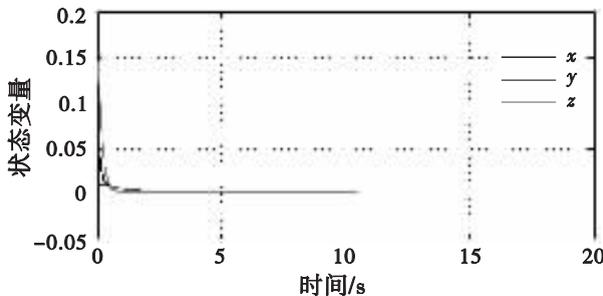


图 5 当  $k=30$  时,受控系统(3)的状态变量相图

### 2.2 混沌系统的增强反馈控制

仅仅通过一个状态变量的反馈区控制复杂的混沌系统往往是比较困难的,因此反馈增益系数往往需要取得非常大,才能达到控制的效果。所以考虑

使用多个状态变量乘以反馈增益系数来控制混沌系统,这种方法称为增强反馈控制。

**定理2** 对于受控系统(3),若  $u_1 = 0, u_2 = -ky, u_3 = -kz$ , 其中  $k$  是反馈增益系数,当  $k > b - 1$  时,受控系统(3)将渐进稳定到平衡点  $S_1 = (0 \ 0 \ 0)$ 。

**证明** 将系统(3)在平衡点  $S_1 = (0 \ 0 \ 0)$  处线性化,可得雅可比矩阵为

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & a-z & -y \\ b+z-k & -1 & x \\ 0 & 2y & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

由此可得特征方程为

$(\lambda + k + c)(\lambda^2 + (a + 1 + k)\lambda - ab + a(k + 1)) = 0$  当  $-k - c < 0, a + 1 + k > 0, -ab + a(k + 1) > 0$ , 有  $k > b - 1$ , 根据 Routh-Hurwitz 定理可知此时特征根  $\lambda$  的实部是负的,因此受控系统(3)在平衡点  $S_1(0 \ 0 \ 0)$  处是一致渐进稳定的。数值仿真的结果如图6所示。 证毕

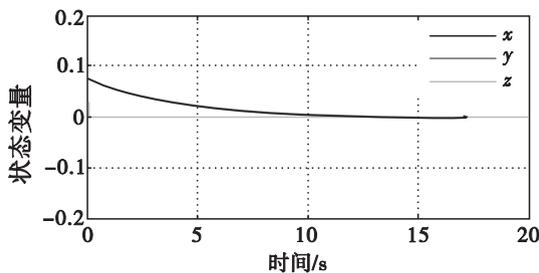


图6 当  $k = 30$  时,受控系统(3)的状态变量相图

### 2.3 混沌系统的加速反馈控制

一般的反馈控制方法总是将模型中的某一个变量乘上控制增益加到系统中的某个方程上,而加速反馈控制<sup>[15]</sup>是将系统中的某个变量的导数乘上控制增益加到系统中的另一个变量的方程上,从而加快了控制速度。

**定理3** 对于受控系统(3),若  $u_1 = 0, \mu_2 = -k\dot{x}, \mu_3 = 0$ , 其中  $k$  是反馈增益系数,当  $k > 0.79$ , 受控系统(3)将渐进稳定到平衡点  $S_2 = (0.192 \ 4, 7.647 \ 9 \ 9.748 \ 4)$ 。

**证明** 令  $x_1 = x - x_0, y_1 = y - y_0, z_1 = z - z_0$ , 从而系统(2)可以转化为如下的方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1) - y_1 z_1 - a(y_0 - x_0) - \\ &\quad y_1 z_0 - y_0 z_1 - y_0 z_0 \\ \dot{y}_1 &= b(x_1 + x_0) + (x_1 + x_0)(z_1 + z_0) - \\ &\quad y_1 - y_0 + k a(z_1 + z_0) - k(y_1 + y_0)^2 \\ \dot{z}_1 &= -c(z_1 + z_0) + (y_1 + y_0)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

将系统(4)在平衡点  $S_1 = (0 \ 0 \ 0)$  处线性化,可得雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a - z_0 & -y_0 \\ b + z_0 & -2ky_0 - 1 & x_0 + kc \\ 0 & 2y_0 & -c \end{bmatrix}$$

从而可得特征方程为  $\lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad c_1 &= 1 + 2ky_0 + a + c \\ c_2 &= ac + 1 + 2ky_0 - 2y_0(k + c + x_0) \\ c_3 &= a c(1 + 2ky_0) + 2y_0^2(b + z_0) + \\ &\quad (z_0 - a)(b + z_0 + ak)c \end{aligned}$$

显然,当  $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$  与  $c_1 c_2 - c_3 > 0$  时,根据 Routh-Hurwitz 定理可知此时特征根  $\lambda$  的实部是负的,系统(4)在平衡点  $S_1 = (0 \ 0 \ 0)$  处是渐进稳定的,即受控系统(3)在平衡点  $S_2(x_0 \ y_0 \ z_0)$  处是渐进稳定的。令  $a = 10, b = 30, c = 6$ , 可得  $k > 0.79$ 。

证毕

数值仿真的结果如图7所示。

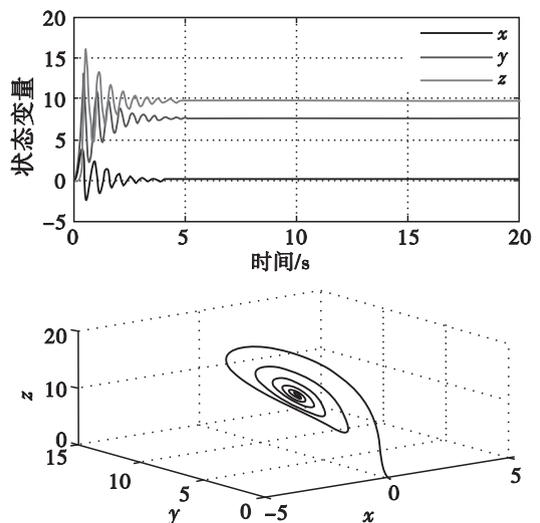


图7 受控系统(3)的相图( $k=1$ )

类似地,受控系统(3)可以稳定到平衡点  $S_3(-0.192 \ 4, -7.647 \ 9 \ 9.748 \ 4)$ ,但是需要指出的是受控系统(3)用加速反馈控制的方法不能渐进稳定到平衡点  $S_1(0 \ 0 \ 0)$ 。

显然可见,加速反馈控制的反馈增益系数  $k$  要远小于一般的反馈控制。

## 3 结论

本文提出了一个新的混沌系统,该系统具有丰富而复杂的动力学行为。通过位移反馈控制、增强反馈控制与加速反馈控制实现了对混沌系统进行控制,根据 Routh-Hurwitz 判据对受控系统进行了稳定性分析,结果表明加速反馈方法能使受控系统快速稳定到非零平衡点,但不能稳定到零平衡点,并与另

外两种反馈控制方法相比较,显示了其优越性。

### 参考文献:

- [ 1 ] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow[ J ]. Journal of the atmospheric sciences ,1963 ,20 :130-141.
- [ 2 ] Rossler O E. An equation for continuous chaos[ J ]. Physics Letters A ,1976 ,57 :397-398.
- [ 3 ] Chua L O ,Komuro M ,Matsumoto T. The double scroll family[ J ]. IEEE Transactions on Circuits and Systems ,1986 ,33 :1073-1118.
- [ 4 ] Chen G ,Ueta T. Yet another chaotic attractor[ J ]. International Journal of Bifurcation and Chaos ,1999 ,9 :1465-1466.
- [ 5 ] Chen J L G. A new chaotic attractor coined[ J ]. International Journal of Bifurcation and Chaos 2002 ,12 :659-661.
- [ 6 ] Qi G ,Chen G ,Du S ,et al. Analysis of a new chaotic system [ J ]. Physica A 2005 ,352 :295-308.
- [ 7 ] Ott E ,Grebogi C ,Yorke J A. Controlling chaos[ J ]. Phys Rev Lett ,1990 ,64 :1196-1199.
- [ 8 ] Hernandez-Tenorio C , Belyaeva T L , Serkin V N. Parametric resonance for solitons in the nonlinear Schrödinger equation model with time-dependent harmonic oscillator potential[ J ]. Physica B ,Condensed Matter ,2007 ,398 :460-463.
- [ 9 ] Sun H ,Cao H. Chaos control and synchronization of a modified chaotic system[ J ]. Chaos , Solitons & Fractals 2008 ,37 :1442-1455.
- [ 10 ] Niu B ,Wei J. Stability and bifurcation analysis in an amplitude equation with delayed feedback[ J ]. Chaos ,Solitons & Fractals 2008 ,37 :1362-1371.
- [ 11 ] Boukroune A ,Chekireb M ,Tadjine M ,et al. An adaptive feedback controller with observer for linearizable chaotic systems[ J ]. Control and Intelligent Systems ,2007 ,35 :162-168.
- [ 12 ] Nazzari J M ,Natsheh A N. Chaos control using sliding-mode theory[ J ]. Chaos , Solitons & Fractals ,2007 ,33 :695-702.
- [ 13 ] 舒永录 ,孔昭毅. 一个新超混沌系统的自适应滑模变结构控制[ J ]. 重庆理工大学学报 :自然科学版 ,2010 ,24 ( 11 ) :109-112.
- [ 14 ] Tao C. Dislocated feedback synchronization of Lorenz chaotic system[ J ]. Physics Letters A 2006 ,348 :201-209.
- [ 15 ] Tao C ,Yang C ,Luo Y ,et al. Speed feedback control of chaotic system[ J ]. Chaos , Solitons & Fractals ,2005 ,23 :259-263.

## Analysis and Control of a New Chaotic System

ZHANG Xue-bing

( Dept. of Basic Course , Huai 'an College of Information Technology , Huai 'an Jiangsu 223003 , China )

**Abstract :** In this paper , a new three-dimensional autonomous chaotic system is presented. There are three control parameters and three different nonlinear terms in the governed equations. Through the calculation we obtain five equilibrium points. Then fix parameters , we obtain three real equilibrium points .According to the eigenvalues of Jacobian matrix ,we know that  $s_1$  is a saddle point and  $s_2$ 、 $s_3$  are saddle-focus points. Then Lyapunov exponents , Lyapunov dimension , Bifurcation diagram and Poincare map are shown through matlab software. And then three different methods , the dislocated feedback control method , the enhancing feedback control method and the speed feedback control method , are used to control the new chaotic system. On the basis of the Routh-Hurwitz theorem , the conditions of stabilization are discussed , and they are also proved theoretically. Numerical simulations show the effectiveness of the three different methods.

**Key words :** new chaotic system ; Lyapunov exponents ; bifurcation diagram ; control

( 责任编辑 黄 颖 )