DOI:CNKI:50-1165/N.20120314.1927.012

一类带有阻尼项的共振问题的周期解*

王少敏
(大理学院 数学与计算机学院,云南 大理 671000)

摘要:文章主要目的是研究一类带有阻尼项 $q(t)\dot{u}(t)$ 的共振问题 $\begin{cases}\ddot{u}(t)+q(t)\dot{u}(t)-A(t)u(t)+\nabla F(t,u(t))=0\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-e^{Q(T)}\dot{u}(T)=0\end{cases}$ 的周期解的存在性。在 F 满足假设(A)及四个新的存在性条件下,通过使用临界点理论中的极大极小方法获得了一个新的存在性定理。

关键词:周期解;极大极小方法;广义山路定理;条件(C)
中图分类号:O177 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2012)02-0060-05

1 引言和主要结果

考虑二阶系统

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)+q(t)\dot{u}(t)-A(t)u(t)+\nabla F(t,u(t))=0\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-e^{Q(T)}\dot{u}(T)=0\end{cases}\quad \text{a. e. } t\in[0,T] \tag{1}$$

其中 $T>0$,$q\in L^1(0,T;\mathbf{R})$,$Q(t)=\int_0^t q(s)\mathrm{d}s$,$A(t)=[a_{ij}(t)]$ 是一个连续的 N 阶对称矩阵,$F:[0,T]\times\mathrm{R}^N\to\mathbf{R}$ 满足如下假设:

(A):$F(t,x)$ 对于每个 $x\in\mathbf{R}^N$ 关于 t 可测,对于 a. e. $t\in[0,T]$ 关于 x 是连续可微的,存在 $a\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$,$b\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$ 使得

$|F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$,$|\nabla F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$,$x\in\mathbf{R}^N$,a. e. $t\in[0,T]$。

$H_T^1=\{u:[0,T]\to\mathbf{R}^N\,|\,u$ 是绝对连续,$u(0)=u(T)$,$\dot{u}\in L^2(0,T;\mathrm{R}^N)\}$ 是一个 Hilbert 空间,具有范数

$\|u\|=\left(\int_0^T e^{Q(t)}(A(t)u(t),u(t))\mathrm{d}t+\int_0^T e^{Q(t)}|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$,$\forall u\in H_T^1$。它等价于如下范数

$$\|u\|_0=\left(\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall u\in H_T^1$$

相应泛函

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}(A(t)u(t),u(t))\mathrm{d}t-\int_0^T e^{Q(t)}F(t,u(t))\mathrm{d}t$$

在 H_T^1 上连续可微且弱下半连续[1]且

$(\varphi'(u),v)=\int_0^T e^{Q(t)}[(\dot{u}(t),\dot{v}(t))+(A(t)u(t),v(t))-(\nabla F(t,u(t)),v(t))]\mathrm{d}t$。$u\in H_T^1$ 是问题(1)的一个解的充要条件是:u 是 φ 的一个临界点[1]。

当 $q(t)\equiv 0$,$t\in[0,T]$ 或 $A(t)$ 是一个零矩阵时,在假设(A)和一些适当的条件下,通过使用最小作用原理和临界点理论中的极大极小方法,人们已经获得了很多存在性结果[2-8]。然而对于本文研究的系统(1)

* 收稿日期:2011-08-15 修回日期:2011-11-23 网络出版时间:2012-03-14 19:27:00
资助项目:云南省科委应用基础项目(No. 2006A0089M);云南省教育厅科学研究基金项目(No. 09Y0367)
作者简介:王少敏,女,副教授,硕士,研究方向为非线性分析。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.60_012.html

是一个全新的系统，本文利用文献[1]给出的能量泛函及变分结构来研究系统(1)的解的存在性，所得结果是全新的。并且它推广了文献[4]中的相应结果。

本文的主要结果如下。

定理1　设 F 满足假设(A)及以下条件：

(Ⅰ) $|x|^2 \leqslant (A(t)x, x) \leqslant 2F(t,x)$，$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$　　(2)

(Ⅱ) $\lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{F(t,x)}{|x|^2} \leqslant \dfrac{d_1}{2d_2}$，a. e. $t \in [0,T]$　　(3)

(Ⅲ) $\liminf\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{F(t,x)}{|x|^2} > \dfrac{d_2}{2d_1}(\omega^2 + dN)$　　(4)

其中 $d = \max\limits_{i,j=1,\cdots,N} \{|a_{ij}|\}$，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，$d_1 = \min\limits_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{Q(t)}$，$d_2 = \max\limits_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{Q(t)}$。

(Ⅳ)存在 $r > 2$，$\mu > r-2$，使得

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{F(t,x)}{|x|^r} < \infty \tag{5}$$

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{(\nabla F(t,x), x) - 2F(t,x)}{|x|^\mu} > 0 \tag{6}$$

则问题(1)至少存在一个周期解。

2 定理的证明

存在一个常数 $c_0 > 0$，使得

$$\|u\|_\infty \overset{\Delta}{=} \max_{t\in[0,T]} |u(t)| \leqslant c_0 \|u\|, \qquad \forall u \in H_T^1 \tag{7}$$

令 $\tilde{H}_T^1 = \{u \in H_T^1 \mid \int_0^T u\mathrm{d}t = 0\}$，显然，$\tilde{H}_T^1$ 是 H_T^1 的一个子集，且 $H_T^1 = \mathbf{R}^N \oplus \tilde{H}_T^1$，由命题1.3[3]知

$$\int_0^T |u(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 \mathrm{d}t, \ \forall\ u \in \tilde{H}_T^1 \text{（Wirtinger's 不等式）} \tag{8}$$

因此

$$\|u\|^2 \leqslant \left(1 + \frac{T^2}{4\pi^2}\right) \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{9}$$

为了证明定理1，需要以下结果：

引理1　设 E 是一个实的 Hilbert 空间，且 $E = E_1 \oplus E_2$，$E_2 = E_1^\perp$，假设 $I \in C^1(E,\mathbf{R})$，满足(PS)条件及

(I_5) $I(u) = \dfrac{1}{2}(Lu,u) + b(u)$，其中 $Lu = L_1P_1u + L_2P_2u$，且 $L_i: E_i \to E_i$ ($i = 1,2$) 是有界和自共轭的；

(I_6) b' 是紧的；

(I_7)存在一个子空间 $\tilde{E} \subset E$ 及子集 $S \subset E$，$Q \subset \tilde{E}$，常数 $\alpha > \omega$，使得

(ⅰ) $S \subset E_1$ 且 $I|_S \geqslant \alpha$；

(ⅱ) Q 有界且 $I|_{\partial Q} \leqslant \omega$；

(ⅲ) S 和 ∂Q 环绕。

则 I 具有一个临界值 $c > \alpha$（广义山路定理5.29[11]）。

引理2　如果假设(A)、(5)式及(6)式成立，则 φ 满足条件(C)，即任意序列 $\{u_n\} \subset H_T^1$，如果 $\varphi(u_n)$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\| = 0$，则 $\{u_n\}$ 有一个收敛的子列。

证明　设 $\{u_n\} \subset H_T^1$，$\varphi(u_n)$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\| = 0$，则存在一个常数 $M > 0$，使得

$$|\varphi(u_n)| \leqslant M, \ (1 + \|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\| \leqslant M \tag{10}$$

一方面，由(5)式，存在 $c > 0$，$\delta_1 > 0$，使得

$$F(t,x) \leqslant c\ |x|^r,\ |x| \geqslant \delta_1,\text{a. e. } t \in [0,T] \tag{11}$$

由假设(A)得

$$|F(t,x)| \leqslant \max_{s\in[0,\delta_1]} a(s)b(t),\ |x| \leqslant \delta_1, a.e.\ t \in [0,T],$$

所以对一切 $x \in \mathrm{R}^N$,a. e. $t \in [0,T]$,有

$$|F(t,x)| \leqslant \max_{s\in[0,\delta_1]} a(s)b(t) + c\ |x|^r \tag{12}$$

由(10)、(12)式及 Holder 不等式,有

$$\frac{1}{2}\ \|u_n\|^2 = \varphi(u_n) + \int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}F(t,u_n)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}\ |u_n|^2\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}(A(t)u_n,u_n)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$M + c_1 + cd_2\int_0^T |u_n|^r\mathrm{d}t + \frac{d_2 - d_1}{2}\int_0^T |u_n|^2\mathrm{d}t \leqslant M + c_1 + cd_2\int_0^T |u_n|^r\mathrm{d}t + \frac{d_2 - d_1}{2}T^{\frac{(r-2)}{r}}\left(\int_0^T |u_n|^r\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{r}} \tag{13}$$

其中 $c_1 = d_2 \max\limits_{s\in[0,\delta_1]} a(s)\int_0^T b(t)\mathrm{d}t$。

另一方面,由(6)式,存在常数 $c_2 > 0$,$\delta_2 > 0$,使得

$$(\nabla F(t,x),x) - 2F(t,x) \geqslant c_2\ |x|^\mu > 0,\ |x| \geqslant \delta_2$$

由假设(A),有

$$|(\nabla F(t,x),x) - 2F(t,x)| \leqslant c_3 b(t),\ |x| \leqslant \delta_2$$

其中 $c_3 = (2+\delta_2)\max\limits_{s\in[0,\delta_2]} a(s)$,所以有

$(\nabla F(t,x),x) - 2F(t,x) \geqslant c_2(|x|^\mu - \delta_2^\mu) - c_3 b(t)$。于是,对任意 $x \in \mathbf{R}^N$,a. e. $t \in [0,T]$,有

$$3M \geqslant 2\varphi(u_n) - (\varphi'(u_n),u_n) = \int_0^T \mathrm{e}^{Q(t)}[(\nabla F(t,u_n),u_n) - 2F(t,u_n)]\mathrm{d}t \geqslant$$

$$\mathrm{c}_2 d_1\int_0^{\mathrm{T}} |u_n|^\mu\mathrm{d}t - Tc_2\delta_2^\mu d_2 - \mathrm{c}_3 d_2\int_0^T b(t)\mathrm{d}t$$

所以 $\int_0^T |u_n|^\mu\mathrm{d}t$ 有界。

如果 $\mu > \mathrm{r}$,由(13)式及 Holder 不等式得

$$\int_0^T |u_n|^r\mathrm{d}t \leqslant T^{\frac{\mu-r}{\mu}}\left(\int_0^T |u_n|^\mu\mathrm{d}t\right)^{\frac{\mu}{r}}$$

则 $\|u_n\|$ 有界。

如果 $\mu \leqslant r$,由(7)式,则

$$\int_0^T |u_n|^r\mathrm{d}t = \int_0^T |u_n|_{r-\mu}\ |u_n|^\mu\mathrm{d}t \leqslant \|u_n\|_\infty^{r-\mu}\int_0^T |u_n|^\mu\mathrm{d}t \leqslant c_0^{r-\mu}\ \|u_n\|^{r-\mu}\int_0^T |u_n|^\mu\mathrm{d}t$$

所以,由(13)式及 $r-\mu < 2$,知道 $\|u_n\|$ 有界。

综上所述,$\|u_n\|$ 有界。正如命题4.3[3]的证明,可以证明 $\{u_n\}$ 有一个收敛的子列,从而 φ 满足条件(C)。

定理1的证明 Tao[4]一文中指出 利用(C)条件代替(PS)条件后引理1仍然成立,现证明 φ 满足引理1的其他条件。事实上,只须证明

(l_1) $\inf\limits_{u\in S}\varphi(u) \geqslant b > 0$;

(l_2) $\sup\limits_{u\in\partial Y}\varphi(u) \leqslant 0$。

由(3)式,存在一个常数 $\delta_0 \in (0,\delta_1)$,使得

$$F(t,x) \leqslant \frac{d_1}{2d_2}\ |x|^2,\ |x| \leqslant \delta_0 \tag{14}$$

由假设(A),有

$$|F(t,x)| \leqslant \max_{s\in[\delta_0,\delta_1]} a(s)b(t),\ \delta_0 \leqslant |x| \leqslant \delta_1 \tag{15}$$

则由(11)、(14)、(15)式,对一切 $x \in \mathbf{R}^N$,a. e. $t \in [0,T]$,有

$$F(t,x) \leqslant (\max_{s \in [\delta_0,\delta_{11}]} a(s) b(t) \delta_0^{-r} + c) \ |x|^r + \frac{d_1}{2d_2} \ |x|^2 \tag{16}$$

由(2)、(7)、(9)式及(16)式,对任意 $u \in H_T^1$,有

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)} (|\dot{u}(t)|^2 + (A(t)u,u)) dt - \int_0^T e^{Q(t)} F(t,u(t)) dt \geqslant$$

$$\frac{1}{2}d_1 \int_0^T (|\dot{u}(t)|^2 dt + \frac{d_1}{2}\int_0^T |u|^2 dt - \max_{s \in [\delta_0,\delta_{11}]} a(s)\delta_0^{-r} d_2 \int_0^T b(t) dt \ \|u\|_\infty^r - cd_2 \int_0^T |u|^r dt - \frac{d_1}{2d_2} d_2 \int_0^T |u|^2 dt \geqslant$$

$$\frac{1}{2}d_1 \left(1 + \frac{T^2}{4\pi^2}\right) \|u\|^2 - c_0^r c_1 \delta_0^{-r} \ \|u\|^r - cTc_0^r d_2 \ \|u\|^r \tag{17}$$

因此,存在 $b > 0$,$\rho \in (0,1)$,使得

$$\varphi(u) \geqslant b,\ \forall u \in H_T^1 \text{ 且 } \|u\| = \rho。$$

令 $S = H_T^1 \cap \partial B_\rho$,则有

$\inf\limits_{u \in S} \varphi(u) \geqslant b > 0$,从而证明了($\mathrm{I}_1$)。

由(4)式,取 $\varepsilon_0 = \inf\limits_{t \in [0,T]} \liminf\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{F(t,x)}{|x|^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{d_2}{d_1}(\omega^2 + dN) > 0$,则存在 $\delta_3 > 0$ 使得

$$F(t,x) \geqslant \left(\frac{d_2\omega^2}{2d_1} + \frac{d_2}{2d_1}dN + \varepsilon_0\right)|x|^2,\ \forall\ |x| \geqslant \delta_3,\ \text{a. e. } t \in [0,T] \tag{18}$$

因此,对任意的 $x \in \mathbf{R}^N$,$t \in [0,T]$ 有

$$F(t,x) \geqslant \left(\frac{d_2\omega^2}{2d_1} + \frac{d_2}{2d_1}dN + \varepsilon_0\right) |x|^2 - \left(\frac{d_2\omega^2}{2d_1} + \frac{d_2}{2d_1}dN + \varepsilon_0\right)\delta_3^{\ 2} \tag{19}$$

令 $G_T^1 = \mathbf{R}^N \oplus \operatorname{span}\{z\}$,其中 $z = z_1\sin(\omega t)$,$z_1 = (1,0,\cdots,0) \in \mathbf{R}^N$。通过计算知 $\|z\|_0 \geqslant 1$。又因为 $\dim(G_T^1) < +\infty$,因此存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_0^T |u|^2 dt \geqslant \delta \ \|u\|_0^2,\ \forall\ u \in G_T^1 \tag{20}$$

令 $Y = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| \leqslant T^{-\frac{1}{2}} r_1\} \oplus \{sz \mid 0 \leqslant s \leqslant r_1\}$,其中 $r_1 = \max\{1,(\delta\varepsilon_0 d_1)^{-\frac{1}{2}} c_4^{\frac{1}{2}}\}$,$c_4 = \left(\dfrac{\omega^2 d_2}{2d_1} + \dfrac{d_2 dN}{2d_1} + \varepsilon_0\right)\delta_3^2\, Td_2$,则对任意 $x + sz \in Y$,由(19)、(20)式,有

$$\varphi(x + sz) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)} (|s\dot{z}|^2 + (A(t)(x + sz),x + sz)) dt - \int_0^T e^{Q(t)} F(t,x + sz) dt \leqslant$$

$$\frac{d_2}{2}\omega^2 \int_0^T |x + sz|^2 dt + \frac{d_2 dN}{2}\int_0^T |x + sz|^2 dt - d_1\left(\frac{d_2\omega^2}{2d_1} + \frac{d_2 dN}{2d_1} + \varepsilon_0\right)\int_0^T |x + sz|^2 dt + c_4 =$$

$$-\varepsilon_0 d_1 \int_0^T |x + sz|^2 dt + c_4 \leqslant -\varepsilon_0 \delta d_1 (\|x\|_0^2 + s^2 \ \|z\|_0^2) + c_4 \tag{21}$$

由(21)式,对每一个 $x + sz \in Y$,其中 $|x| = T^{-\frac{1}{2}} r_1$,有

$$\varphi(x + sz) \leqslant -\varepsilon_0 d_1 \delta \ \|x\|_0^2 + c_4 \leqslant -\varepsilon_0 d_1 \delta r_1^2 + c_4 \leqslant 0 \tag{22}$$

由(21)式和 $\|z\|_0 \geqslant 1$,对任意 $x + r_1 z \in Y$ 有

$$\varphi(x + r_1 z) \leqslant -\varepsilon_0 \delta d_1 \cdot r_1^2 \ \|z\|_0^2 + c_4 \leqslant 0 \tag{23}$$

如果 $s = 0$,对任意 $x \in \mathbf{R}^N$,由(2)式,有

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)} ((A(t)x,x) - 2F(t,x)) dt \leqslant 0 \tag{24}$$

所以由(2124)式,得到 $\sup\limits_{u \in \partial Y} \varphi(u) \leqslant 0$。从而证明了($\mathrm{I}_2$)。

因此问题(1)至少存在一个非零的 T-周期解。 证毕

参考文献：

[1] Xian W, Chen S X, Kaimin T. On variational methods for a class of damped Vibration problems[J]. Nonlinear Anal, 2008, 68: 1432-1441.

[2] Rabinowitz P H. On subharmonic solutions of Hamiltonian systems[J]. Comm Pure Appl Math, 1980, 33: 609-633.

[3] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. Berlin/New York: Springer-Verlag, 1989.

[4] Tao Z L, Tang C L. Periodic and subharmonic solutions of second order Hamiltonian systems[J]. J Math Amal Appi, 2004, 293: 435-445.

[5] Tang C L, Wu X P. Periodic solutions for a class of non-autonomous subquadratic second order Hamiltonltonian systems[J]. J Math Anal Appi, 2002, 275: 870-882.

[6] Tang C L. Periodic solutions for non-autonomous second order systems with sublinear nonlinearity [J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126: 3263-3270.

[7] Tang C L, Wu X P. Periodic solutions for second order systems with not uniformly coercive potential[J]. J Math Anal Appl, 2001, 259: 386-397.

[8] Wu X P, Tang C L, Periodic solutions of class of non-autonomous second order systems [J]. J Math Anal Appl, 1999, 236: 227-235.

[9] 张守贵. 二维 Laplace 方程 Nenmann 问题直接边界积分方程的 Galerkin 解法[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版, 2009, 26(4): 67-69.

[10] 李玉环. 刘盈盈, 穆存米. 动态边界条件下一类强阻尼波动方程解的爆破[J]. 西南大学学报：自然科学版, 2011, 33(7): 10-15.

[11] Rabinowz P H. Minimax methods in point theory with applications to differential equations[C]//CBMS Reg Conf: Ser In Math, American Mathematical Society, Providence. RI. 1986, 65: 86-87.

Periodic Solutions for a Class of Damped Vibration Problem

WANG Shao-min

(Dept. of Mathematics and Computer, Dali University, Dali Yunnan 671000, China)

Abstract: The purpose of this paper is to study the existence of periodic solutions for the following vibration problem with damping term $q(t)\dot{u}(t)$

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)+q(t)\dot{u}(t)-A(t)u(t)+\nabla F(t,u(t))=0\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-e^{Q(T)}\dot{u}(T)=0\end{cases}$$

When F satisfies assumption (A) and four new existence conditions, One new existence theorem is obtained by the minimax methods in critical point theory.

Key words: periodic solutions; the minimax methods; generalized mountain pass theorem; condition (C)

(责任编辑　游中胜)