2012 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2012
第 29 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 29 No. 2

DOI:CNKI:50-1165/N.20120314.1927.013

一类与伪 Smarandache 函数相关的函数方程*

陈 斌

(渭南师范学院 数学系,渭南 714000)

摘要:首先研究了著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质,讨论了一类新的包含 Smarandache 对偶函数及其伪 Smarandache 函数方程 $Z(n)+S_*(n)-1=kn,k\geqslant 1$ 的可解性,利用初等数论及组合方法,结合伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的性质,巧妙地构造了一个新方程。结果给出了这一类方程的所有整数解,即当 $k=1$ 时,该方程当且仅当有唯一解 $n=1$;当 $k=2$ 时,仅有解 $n=2^{\alpha},\alpha\geqslant 1$;当 $k\geqslant 3$ 时,无解。从而,本文彻底解决了这类新方程解的问题。

关键词:Smarandache 函数;伪 Smarandache 函数;函数方程;整数解

中图分类号:O156.4 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2012)02-0065-03

1 引言及结论

对于任意正整数 n,著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$。即 $S(n)=\min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m!\}$,它是美籍罗马尼亚著名的数论专家 Smarandache 教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的,并建议人们去研究它的许多性质。由 $S(n)$ 得定义容易推得,如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示正整数 n 的标准分解式,那么 $S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{\alpha_k})\}$。关于函数 $S(n)$ 的算术性质,许多学者都进行了研究,获得了不少有趣的结果[1-6]。在文献[7]中,Sandor 引入了 Smarandache 函数 $S(n)$ 的对偶函数 $S_*(n)$ 如下,对于任意正整数 n,$S_*(n)$ 的定义为最大的正整数 m 使得 $m!\mid n$。即有 $S_*(n)=\max\{m:m\in\mathbf{N},m!\mid n\}$。关于 $S_*(n)$ 的算术性质也有学者进行过研究,取得了一系列研究成果。例如在文献[8]中王妤研究了有关 $S_*(n)$ 的函数方程 $\sum\limits_{d\mid n}SL^*(d)=\sum\limits_{d\mid n}S_*(d)$ 的可解性并得到了一个有趣的结论,即若 $A=\left\{n:\sum\limits_{d\mid n}SL^*(d)=\sum\limits_{d\mid n}S_*(d),n\in\mathbf{N}\right\}$,则对于任意的实数 s,Drichlet 级数 $f(s)=\sum\limits_{\substack{n=1\\n\in A}}\frac{1}{n^s}$ 在 $s\leqslant 1$ 时发散,在 $s>1$ 时收敛,且有恒等式

$$f(s)=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{12^s}\right)$$

其中,$SL^*(n)$ 为 Smarandache LCM 函数的对偶函数且其定义为 $SL^*(n)=\max\{k:[1,2,\cdots,k]\mid n,k\in\mathbf{N}\}$,$\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta-函数。

在文献[9],Sandor 引入了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义如下:对于任意的正整数 n,$Z(n)$ 为最小的正整数 m,使得 $n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.$,即 $Z(n)=\min\left\{m:m\in\mathbf{N},n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.\right\}$。从 $Z(n)$ 的定义可以计算出 $Z(n)$ 的前几个值为:$Z(1)=1$,$Z(2)=3$,$Z(3)=2$,$Z(4)=7$,$Z(5)=4$,$Z(6)=3$,$Z(7)=6$,$Z(8)=15$,$Z(9)=8$,$Z(10)=4$,…。关于 $Z(n)$ 的算术性质,许多学者进行了研究,获得了不少有意义

* 收稿日期:2011-06-15 修回日期:2011-10-10 网络出版时间:2012-03-14 19:27:00
资助项目:国家自然科学基金项目(No. 11071194);陕西省教育厅科研计划项目资助(No. 2010JK538);陕西省科技厅自然科学基金项目(No. 2010JM1009);信息安全国家重点实验室(中国科学院软件研究所)(No. 100190)
作者简介:陈斌,男,讲师,研究方向为数论。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.65_013.html

的结果[10-17]。同时得到了 $Z(n)$ 一些简单性质：

a) 对于任意正整数 α 及奇素数 p，$Z(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - 1$；

b) 对于任意正整数 α，$Z(2^{\alpha}) = 2^{\alpha+1} - 1$。

本文的主要目的是研究函数方程

$$Z(n) + S_{*}(n) - 1 = kn, k \geqslant 1 \tag{1}$$

的可解性，这个问题至少目前还没有人研究，张文鹏教授建议研究这一类方程的整数解的情况，这对进一步研究函数 $S_{*}(n)$ 与 $Z(n)$ 的性质及它们之间的关系将奠定一定的理论基础，最重要的是可以解决与它相关的级数的敛散性等问题，得到一些较好的特殊结果，从而填补这一研究领域的一点空白。故笔者利用初等及组合的方法获得了这个方程的所有正整数解。亦即证明了下面的定理。

定理1 函数方程(1)当 $k = 1$ 时，当且仅当只有唯一的解 $n = 1$；当 $k = 2$ 时，当且仅当 $n = 2^{\alpha}, \alpha \geqslant 1$ 满足方程(1)；当 $k \geqslant 3$ 时，方程(1)无解。

2 定理的证明

证明 利用初等及组合的方法可以直接给出定理的证明如下：为了简单起见，不妨设 $S_{*}(n) = m$。当 $k = 1$ 时，显然 $n = 1$ 满足(1)式。所以 $n = 1$ 是方程(1)的一个解。

下面假定 $n > 1$ 且满足方程(1)。由伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的定义知

$$Z(n)(Z(n) - 1) + mZ(n) = nZ(n)$$

由此式并结合 $Z(n)$ 的定义立刻可以推出 n 整除 $mZ(n)$，注意到 $m \mid n$，所以可以设 $mZ(n) = qn$，或者 $Z(n) = \frac{qn}{m}$。将此式代入(1)式可得 $\frac{qn}{m} + m - 1 = n$。而由 $S_{*}(n) = m$ 的定义知 $m! \mid n$，从而可设 $n = m! n_1$，此时，上式可化为

$$q(m - 1)! n_1 + m - 1 = m! n_1 \tag{2}$$

在(2)式中有两项显然可以被 $(m - 1)$ 整除，所以由整除的性质易得(2)式中的第三项 $m - 1$ 也能被 $(m - 1)$ 整除。显然 $(m - 1)$ 整除 $m - 1$ 当且仅当 $m = 1, 2, 3$。当 $m = 1$ 时，由(2)式可知 $q = 1$，此时有 $Z(n) = n$，由函数 $Z(n)$ 的定义及性质可得，没有正整数 $n > 1$ 满足 $Z(n) = n$。当 $m = 2$ 时，由(1)式知 $Z(n) = n - 1$ 且 $n > 1$，此时，$n = p^{\alpha}, \alpha \geqslant 1$，$p$ 为奇素数，但经检验知 $n = p^{\alpha}, \alpha \geqslant 1$ 不是(1)式的解。当 $m = 3$ 时，即 $S_{*}(n) = m = 3$，则 $n = 6$，经验证 $n = 6$ 不满足(1)式。所以，当 $k = 1$ 时，正整数 n 满足(1)式当且仅当 $n = 1$。当 $k = 2$ 时，显然 $n = 1$ 不满足(1)式。

同理，假定 $n > 1$ 且满足方程(1)。根据 $Z(n)$ 的定义知此时有

$$Z(n)(Z(n) - 1) + mZ(n) = 2nZ(n)$$

立刻可以推出 n 整除 $mZ(n)$，注意到 $m \mid n$，可以设 $mZ(n) = q'n$，或者 $Z(n) = \frac{q'n}{m}$。将此式代入(1)式可得 $\frac{q'n}{m} + m - 1 = 2n$。而由 $S_{*}(n) = m$ 的定义知 $m! \mid n$，从而可设 $n = m! n_2$，此时，上式可化为

$$k(m - 1)! n_2 + m - 1 = 2m! n_2 \tag{3}$$

在(3)式中有两项显然可以被 $(m - 1)$ 整除，所以由整除的性质易得(3)式中的第三项 $m - 1$ 也能被 $(m - 1)$ 整除。显然 $(m - 1)$ 整除 $m - 1$ 当且仅当 $m = 1, 2, 3$。当 $m = 1$ 时，由(3)式可知 $k = 2$，此时有 $Z(n) = 2n$，由函数 $Z(n)$ 的定义及性质可得，没有正整数 $n > 1$ 满足 $Z(n) = 2n$。当 $m = 2$ 时，由(1)式知 $Z(n) = 2n - 1$ 且 $n > 1$，所以，$n = 2^{\alpha}, \alpha \geqslant 1$，经检验知 $n = 2^{\alpha}, \alpha \geqslant 1$ 是(1)式的解。当 $m = 3$ 时，即 $S_{*}(n) = m = 3$，则 $n = 6$，经验证 $n = 6$ 不满足(1)式。综上，当 $k = 2$ 时，正整数 n 满足(1)式当且仅当 $n = 2^{\alpha}, \alpha \geqslant 1$。

当 $k \geqslant 3$ 时，由以上两种情况的证明同理可以容易推得，没有正整数 $n > 1$ 满足 $Z(n) = kn$，和 $Z(n) =$

$kn-1$，且 $n=6$ 也不满足(1)式。故方程(1)此时无解。

综上所述，便完成了定理的证明。 证毕

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicageo: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 潘承洞，潘承彪. 初等数论[M]. 北京大学出版社，1992.

[3] 易媛，亢小玉. Smarandache 问题研究[M]. [S. L.]: High American Press，2006.

[4] 乐茂华. 两个有关伪 Smarandache 函数的方程[J]. 吉林化工学院学报，2004，21(4): 96-104.

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报，2006，49(5): 1009-1012.

[6] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想[J]. 纯粹数学与应用数学，2007，23(2): 205-208.

[7] Sandor J. On certain generalizations of the Smarandache function[J]. Notes Number Theory and Discrete Mathematics，1999，5(2): 41-51.

[8] 王妤. 一个包含 Smarandache LCM 对偶函数的方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2008，25(5): 23-27.

[9] Sandor J. On a dual of the P seudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002，13: 18-23.

[10] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[11] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[12] Lou Y B. On the Pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2007，3(4): 48-50.

[13] Zheng Y N. On the Pseudo Smarandache function and its two conjectures[J]. Scientia Magna, 2007，3(4): 50-53.

[14] 李梵蓓. 一个与 Smarandache 函数有关的函数方程及其正整数解[J]. 西北大学学报：自然科学版，2008，38(6): 892-893.

[15] 黄炜，赵教练. 关于 Smarandache 平方根部分数列 $a_2(n)$ 和 $b_2(n)$[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(6): 1-3.

[16] 段辉明，关于丢番图方程 $x^3+1=57y^2$[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(3): 41-44.

[17] 张福玲，广义 Fibonacci 数列的和公式[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，28(5): 45-48.

A Function Equation Related to the Pseudo Smarandache Function

CHEN Bin

(College of Mathematics and Information Science, Weinan Normal University, Weinan Shaanxi 714000, China)

Abstract: First of all, this paper studied the properties of the well-known F. Smarandache function $S(n)$, then studied the positive integer solutions of a new function equation $Z(n)+S_*(n)-1=kn$, $k\geqslant 1$ involving both of the Pseudo Smarandache function and the dual Smarandache function. Used the elementary number theory and combinational method while the property of the Pseudo Smarandache function $Z(n)$, a new equation was made easily. As a result, all positive integer solutions are given for the equation, that was the equation hold if and only if solution $n=1$ when $k=1$, and if $k=2$, it hold solutions $n=2^\alpha$, $\alpha\geqslant 1$, it was no solution if $k\geqslant 3$. So, all the positive integer solutions of this new function equation was solved completely.

Key words: the Smarandache function; the Pseudo Smarandache function; function equation; integer solution

(责任编辑 游中胜)