运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N. 20120704. 1115. 002

强 G-预不变凸函数的性质及应用*

彭再云[1]，周选林[1]，赵　勇[2]
(1. 重庆交通大学 理学院，重庆 400074；2. 重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要:在已有文献基础上继续讨论强 G-预不变凸函数。首先用另外的例子来说明强 G-预不变凸函数的存在性;然后给出了在上、下半连续性条件下 f 是强 G-预不变凸函数的两个充要条件,借助于函数 f 的上图 $E(f)$,讨论了强 G-预不变凸函数的一个刻画及强 G-预不变凸函数簇的上确界性质;最后还获得了强 G-预不变凸函数分别在两类数学规划问题中的应用,推广了已有文献的结果。

关键词:不变凸集; G-预不变凸函数; 强 G-预不变凸函数; 数学规划

中图分类号:O221.1　　　　**文献标志码:**A　　　　**文章编号:**1672-6693(2012)04-0012-06

凸性和广义凸性在数理经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色,有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一。在 1981 年,Craven[1] 提出了一类广义凸函数—不变凸函数。1988 年,Wear 和 Mond[2] 提出预不变凸函数的概念,它是不变凸函数的推广。1995 年,Mohan 和 Neogy[3] 证明了在条件 C 下,不变凸函数是预不变凸函数,不变拟凸函数是预不变拟凸函数。2005 年,颜和刘[4] 提出了一类特殊的预不变凸函数—强预不变凸函数,讨论了它与强不变凸函数的关系,并给出了它的一些基本性质。而后文献[5-6]对强预不变凸函数进行了进一步研究。2007 年,T. Antczak[7-8] 又提出了另一类广义凸函数—G-预不变凸函数,它是预不变凸函数的推广,并给出了 G-预不变凸函数的一些性质和判定方法。最近,文献[9]提出了一类新的广义凸函数—强 G-预不变凸函数,它是强预不变凸函数的推广。举例说明了强 G-预不变凸函数的存在性,并说明它区别于 G-预不变凸函数、严格 G-预不变凸函数;给出了强 G-预不变凸函数的几个基本性质,并得到强 G-预不变凸函数的一个充分条件。

本文在已有文献基础上继续讨论强 G-预不变凸函数,给出另外的例子来说明强 G-预不变凸函数的存在性。得到在上、下半连续性条件下 f 是强 G-预不变凸函数的两个充要条件,借助于函数 f 的上图 $E(f)$,讨论了强 G-预不变凸函数的刻画及强 G-预不变凸函数簇的上确界性质。最后还得到了强 G-预不变凸函数在两类数学规划问题中的重要应用。

1 基本定义与例子

为了后面的研究需要,先给出下面的定义。

定义 1[1-4,10-11]　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$,如果存在向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$,则称集合 K 是关于 η 的不变凸集。

令 H 是 Hilbert 空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$和$\|\cdot\|$分别为其上的内积与范数,$K$ 是 H 的非空子集,$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数,$\eta:K\times K\to H$ 为向量映射。在本文中,$I_f(K)$表示 f 在 K 下的像,G^{-1}表示 G 的逆。

定义 2[7-8,12]　令 K 是一个关于 η 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 称为 K 上关于 η 的(严格)G-预不变凸函数,若存在连续的实值增函数 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$ 和向量映射 $\eta:K\times K\to H$,$\forall x,u\in K,x\neq y$,$\forall\lambda\in[0,1]$($\lambda\in(0,1)$),s.t.

* **收稿日期:**2012-02-19　　**网络出版时间:**2012-07-04　11:15:00
资助项目:国家青年基金(No. 11001287);重庆市科委研究项目(No. CSTC2011AC6104;No. 2010BB9254);重庆市教委资助课题(No. KJ120401)
作者简介:彭再云,男,讲师,研究方向为最优化理论与应用。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120704.1115.201204.12_002.html

$$f(u+\lambda\eta(x,u))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(u)))(<)。$$

定义 3[9]　令 K 是关于 η 的不变凸集，函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 称为 K 上关于 η 的强 G-预不变凸函数，若存在连续增函数 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$，映射 $\eta:K\times K\to H$ 和常数 $\beta>0$，对 $\forall x,u\in K,\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(u+\lambda\eta(x,u))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(u))-\lambda(1-\lambda)\beta\|\eta(x,u)\|^2]。$$

关于强 G-预不变凸函数的存在性问题，文献[9]中作者给出实例进行验证。下面给出另外的例子来说明强 G-预不变凸函数是大量存在的。

例 1　令 $K=[-1,1]$，$f(x)=\ln\left[(|x|-1)^2+\dfrac{3}{2}\right]$，$G(t)=e^t$，$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y, x\geqslant0,y\geqslant0 \text{ 或 } x<0,y<0\\ -x-y, x\geqslant0,y<0 \text{ 或 } x\leqslant0,y>0\end{cases}$，则存在 $\beta=1$ 使得 f 是关于 η 的强 G-预不变凸函数。

分析　不难验证，对于 $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in[0,1]$，当 $\beta=1$ 时有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]。$$

由强 G-预不变凸函数的定义，显然 f 是 K 上关于 η 的强 G-预不变凸函数。

注 1　当 $G(t)=t$ 时，强 G-预不变凸函数就退化为强预不变凸函数[4-6]。

定义 4　设 $S\subseteq\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$，如果存在单调增函数 G，映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 和常数 $\gamma>0$，对 $\forall(x,\alpha),(y,\beta)\in S$ 有

$$(y+\lambda\eta(x,y),G^{-1}[\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\beta)-\gamma(1-\gamma)\|\eta(x,y)\|^2])\in S,\forall\lambda\in[0,1]，$$

则称 S 为强 G-η-不变凸集。

条件 C[3,10]　令 $\eta:K\times K\to H$，对 $\forall x,u\in K,\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$\eta(u,u+\lambda\eta(x,u))=-\lambda\eta(x,u),\eta(x,u+\lambda\eta(x,u))=(1-\lambda)\eta(x,u)，$$

则称 η 满足条件 C。

2 强 G-预不变凸函数的性质与刻画

在这一部分，将给出强 G-预不变凸函数的几个重要性质。为了后面讨论的需要，首先给出下面的稠密性结果。

引理 1　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，η 满足条件 C，若 $f:K\to\mathbf{R}$ 满足 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$，$\forall x,y\in K$，且存在常数 $\beta>0,\alpha\in(0,1)$ 使得

$$f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\alpha G(f(x))+(1-\alpha)G(f(y))-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2]。\tag{1}$$

则集合 $A=\{\lambda\in[0,1]\,|\,f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda\|\eta(x,y)\|^2)],\forall x,y\in K\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密。

证明　因为 $f(y)\leqslant f(y)$ 和 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$，所以 $\lambda=0$ 和 $\lambda=1$ 在集合 A 中。

现假设集合 A 在 $[0,1]$ 中不稠密，那么存在一个 $\lambda_0\in(0,1)$ 和 λ_0 的一个邻域 $N(\lambda_0)$，使得

$$N(\lambda_0)\cap A=\varnothing。\tag{2}$$

令

$$\lambda_1=\inf\{\lambda\in A\,|\,\lambda\geqslant\lambda_0\}，\tag{3}$$

$$\lambda_2=\sup\{\lambda\in A\,|\,\lambda\leqslant\lambda_0\}，\tag{4}$$

所以 $0\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1\leqslant1$。又因为 $\alpha,(1-\alpha)\in(0,1)$，选取 $u_1,u_2\in A$，使得

$$u_1\geqslant\lambda_1,u_2\leqslant\lambda_2 \text{ 且 } \max\{\alpha,(1-\alpha)\}(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2。\tag{5}$$

于是 $u_2\leqslant\lambda_2<\lambda_1\leqslant u_1$。令 $\bar\lambda=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2$，由条件 C 可得

$$y+u_2\eta(x,y)+\alpha\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))=y+\bar\lambda\eta(x,y),\forall x,y\in K。$$

又由 $u_1,u_2\in A$，可得

$$\begin{aligned}f(y+\bar\lambda\eta(x,y))=&f[y+u_2\eta(x,y)+\alpha\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))]\leqslant\\ &G^{-1}[\alpha G(f(y+u_1\eta(x,y)))+(1-\alpha)G(f(y+u_2\eta(x,y)))-\\ &\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))\|^2]\leqslant\\ &G^{-1}[\alpha u_1G(f(x))+\alpha(1-u_1)G(f(y))-\alpha\beta u_1(1-u_1)\|\eta(x,y)\|^2+\\ &(1-\alpha)u_2G(f(x))+(1-\alpha)(1-u_2)G(f(y))-(1-\alpha)\beta u_2(1-u_2)\|\eta(x,y)\|^2-\\ &\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))\|^2]=G^{-1}[\bar\lambda G(f(x))+(1-\bar\lambda)G(f(y))-\end{aligned}$$

$$(\alpha\beta u_1(1-u_1)\|\eta(x,y)\|^2+(1-\alpha)\beta u_2(1-u_2)\|\eta(x,y)\|^2+\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))\|^2)]。$$

由条件 C,有 $\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))=\eta(y+u_2\eta(x,y)+(u_1-u_2)\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))=$

$$\eta\left(y+u_2\eta(x,y)+\frac{u_1-u_2}{1-u_2}\eta(x,y+u_2\eta(x,y)),y+u_2\eta(x,y)\right)=$$

$$\frac{u_1-u_2}{1-u_2}\eta(x,y+u_2\eta(x,y))=(u_1-u_2)\eta(x,y)。$$

于是 $$\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))\|^2=\beta\alpha(1-\alpha)(u_1-u_2)^2\ \|\eta(x,y)\|^2。$$

还可以得到

$$\alpha\beta u_1(1-u_1)\|\eta(x,y)\|^2+(1-\alpha)\beta u_2(1-u_2)\|\eta(x,y)\|^2+\beta\alpha(1-\alpha)(u_1-u_2)^2\ \|\eta(x,y)\|^2=$$
$$\beta\|\eta(x,y)\|^2[\alpha u_1(1-u_1)+(1-\alpha)u_2(1-u_2)+\alpha(1-\alpha)(u_1-u_2)^2]=\beta\|\eta(x,y)\|^2\ \bar\lambda(1-\bar\lambda),$$

于是有 $$f(y+\bar\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\bar\lambda G(f(x))+(1-\bar\lambda)G(f(y))-\beta\bar\lambda(1-\bar\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]。$$

所以得到$\bar\lambda\in A$。

若$\bar\lambda\geqslant\lambda_0$,则$\bar\lambda-u_2=\alpha(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2$,于是$\bar\lambda<\lambda_1$,这与(3)式矛盾。

类似地,当$\bar\lambda\leqslant\lambda_0$ 时,可推出与(4)式矛盾。综上所述,A 在$[0,1]$中稠密。 证毕

定理 1 设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,η 满足条件 C,函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上半连续且满足 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$,$\forall x,y\in K$,则 f 是 K 上关于 η 的强 G-预不变凸函数,当且仅当存在常数 $\beta>0$ 和 $\lambda\in(0,1)$,对 $\forall x,y\in K$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

成立。

证明 必要性。直接由 f 是关于 η 的强 G-预不变凸函数的定义可得。

充分性。由引理 1 知集合

$$A=\{\alpha\in[0,1]\,|\,f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\alpha G(f(x))+(1-\alpha)G(f(y))-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2,\forall x,y\in K\}$$

在$[0,1]$中稠密(显然 $0,1\in A$),则 $\forall\bar\alpha\in(0,1)$,$\exists\{\alpha_n\}\subseteq(0,1)\cap A$ 使得 $\alpha_n<\bar\alpha$,$\forall n\in\mathbf{N}$

对 $\forall x,y\in K$,记 $Z=y+\bar\alpha\eta(x,y)$,对每一个 n 定义

$$y_n=y+\frac{\bar\alpha-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y),\tag{6}$$

则 $y_n\to y,n\to\infty$。又因为 $0<\alpha_n<\bar\alpha<1$,则有 $0<\dfrac{\bar\alpha-\alpha_n}{1-\alpha_n}<1$,即 $y_n\in K$。

由(6)式,条件 C 及 K 的不变凸性,得到

$$y_n+\alpha_n\eta(x,y_n)=y+\frac{\bar\alpha-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)+\alpha_n\eta\left(x,y+\frac{\bar\alpha-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)\right)=$$
$$y+\left[\frac{\bar\alpha-\alpha_n}{1-\alpha_n}+\alpha_n\left(1-\frac{\bar\alpha-\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)\right]\eta(x,y)=y+\bar\alpha\eta(x,y)=Z。\tag{7}$$

因为 f 是上半连续的,所以对 $\forall\varepsilon>0$,当 n 充分大时有

$$f(y_n)\leqslant f(y)+\varepsilon。\tag{8}$$

由(7)、(8)式及 $\alpha_n\in A$ 有

$$f(Z)=f(y_n+\alpha_n\eta(x,y_n))\leqslant G^{-1}[\alpha_nG(f(x))+(1-\alpha_n)G(f(y_n))-\beta\alpha_n(1-\alpha_n)\|\eta(x,y_n)\|^2]\leqslant$$
$$G^{-1}[\alpha_nG(f(x))+(1-\alpha_n)G(f(y)+\varepsilon)-\beta\alpha_n(1-\alpha_n)\|\eta(x,y_n)\|^2]=$$
$$G^{-1}\left[\alpha_nG(f(x))+(1-\alpha_n)G(f(y)+\varepsilon)-\beta\alpha_n(1-\alpha_n)\left\|\eta\left(x,y+\frac{\bar\alpha-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)\right)\right\|^2\right]=$$
$$G^{-1}[\alpha_nG(f(x))+(1-\alpha_n)G(f(y)+\varepsilon)-\beta\alpha_n(1-\alpha_n)\left(1-\frac{\bar\alpha-\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)^2\ \|\eta(x,y)\|^2]\to$$
$$G^{-1}[\bar\alpha G(f(x))+(1-\bar\alpha)G(f(y)+\varepsilon)-\beta\bar\alpha(1-\bar\alpha)\|\eta(x,y)\|^2],n\to+\infty。$$

由 $\varepsilon>0$ 任意性,故有 $f(Z)\leqslant G^{-1}[\bar\alpha G(f(x))+(1-\bar\alpha)G(f(y))-\beta\bar\alpha(1-\bar\alpha)\|\eta(x,y)\|^2]$。所以 f 是关于 η

的强 G-预不变凸函数。　证毕

定理 2　设集合 $K\subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，η 满足条件 C，函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是下半连续的且满足 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$，$\forall x,y\in K$，则 f 是 K 上关于 η 的强 G-预不变凸函数，当且仅当存在常数 $\beta>0$，$\lambda\in(0,1)$，对 $\forall x,y\in K$ 有 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$成立。

证明　必然性显然，下证充分性。由引理 1 知 $\forall x,y\in K$，A 在$[0,1]$中稠密，则 $\forall\bar{\alpha}\in(0,1)$，$\exists\{\alpha_n\}\subseteq(0,1)\cap A$，s. t. $\alpha_n\to\bar{\alpha}$，$n\to+\infty$，又因为

$$f(y+\alpha_n\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\alpha_n G(f(x))+(1-\alpha_n)G(f(y))-\beta\alpha_n(1-\alpha_n)\|\eta(x,y)\|^2],$$

所以
$$\liminf_{n\to+\infty} f(y+\alpha_n\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\bar{\alpha}G(f(x))+(1-\bar{\alpha})G(f(y))-\beta\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\|\eta(x,y)\|^2]。$$

由 f 在 K 上的下半连续性有 $f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y))\leqslant\liminf\limits_{n\to+\infty} f(y+\alpha_n\eta(x,y))$，则

$$f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\bar{\alpha}G(f(x))+(1-\bar{\alpha})G(f(y))-\beta\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\|\eta(x,y)\|^2],$$

所以 f 是 K 上关于 η 的强 G-预不变凸函数。　证毕

为了更好地刻画强 G-预不变凸函数并深入研究其性质，将用到函数的上图

$$E(f)=\{(x,\alpha):x\in K,\alpha\in\mathbf{R},f(x)\leqslant\alpha\}。$$

定理 3　设非空集合 K 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，则 $f:K\to\mathbf{R}$ 是强 G-预不变凸函数$\Leftrightarrow E(f)$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ 上的强 G-η-不变凸集。

证明　必要性。假设 $f:K\to\mathbf{R}$ 是强 G-预不变凸函数，令(x,α)，$(y,\beta)\in E(f)$，则有 $f(x)\leqslant\alpha$，$f(y)\leqslant\beta$。又因为 $f:K\to\mathbf{R}$ 是强 G-预不变凸函数，则存在 $\gamma>0$ 使得

$$\begin{aligned}f(y+\lambda\eta(x,y))&\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]\leqslant\\&G^{-1}[\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\beta)-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2],\ \forall\lambda\in[0,1]\end{aligned}$$

成立。于是有

$$(y+\lambda\eta(x,y),G^{-1}[\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\beta)-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2])\in E(f),\ \forall\lambda\in[0,1],$$

所以 $E(f)$是强 G-η-不变凸集。

充分性。假定 $E(f)$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ 上的强 G-η-不变凸集，令 $x,y\in K$，则有$(x,f(x))\in E(f)$，$(y,f(y))\in E(f)$，因而存在 $\gamma>0$，使得

$$(y+\lambda\eta(x,y),G^{-1}[\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\beta)-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2])\in E(f),\ \forall\lambda\in[0,1]。$$

于是对 $\forall\lambda\in[0,1]$有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]。$$

故 f 是 K 上的强 G-预不变凸函数。　证毕

定理 4　设映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，如果$(S_i)_{i\in I}$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ 上关于同一 G 和 η 的强 G-η-不变凸集，G 是实值增函数，则$\bigcap_{i\in I}S_i$ 也是强 G-η-不变凸集。

证明　令(x,α)，$(y,\beta)\in\bigcap_{i\in I}S_i$，则对 $\forall i\in I$，(x,α)，$(y,\beta)\in S_i$，因 S_i 是强 G-η-不变凸集，则存在 $\gamma_i>0$，对 $\forall\lambda\in[0,1]$有

$$(y+\lambda\eta(x,y),G^{-1}[\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\beta)-\gamma_i\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2])\in S_i,\ \forall i\in I,$$

取 $\gamma=\min\gamma_i$，则有　$(y+\lambda\eta(x,y),G^{-1}[\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\beta)-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2])\in S_i,\ \forall\lambda\in[0,1]$，

于是有　$(y+\lambda\eta(x,y),G^{-1}[\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\beta)-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2])\in\bigcap_{i\in I}S_i,\ \forall\lambda\in[0,1]$，

故$\bigcap_{i\in I}S_i$ 也是强 G-η-不变凸集。　证毕

定理 5　设非空集合 K 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集。如果 $\forall i\in I$，f_i 是 K 上的强 G-预不变凸函数，那么 $f(x)=\sup_{i\in I}f_i(x)$也是 K 上的强 G-预不变凸函数。

证明　因为 f_i 是 K 上的强 G-预不变凸函数，由定理 3 可知其上图 $E(f_i)=\{(x,a)\mid x\in K,\alpha\in\mathbf{R},f_i(x)\leqslant\alpha\}$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ 上的强 G-η-不变凸集。

然后，据定理 4 可得$\bigcap_{i\in I}E(f_i)=\{(x,a)\mid x\in K,\alpha\in\mathbf{R},f(x)\leqslant\alpha\}$也是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ 上的强 G-η-不变凸集，且$\bigcap_{i\in I}E(f_i)$是 f 的上图。最后再根据定理 3 即可得到 f 是 K 上的强 G-预不变凸函数。　证毕

3 强 G-预不变凸函数在数学规划中的应用

记对于 $x\in K$ 的求 $f(x)$ 的最小值的数学规划问题为(P)

$$\min \quad f(x),$$
$$\text{s.t.} \quad x\in K。$$

定理6 设非空集合 K 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上的强 G-预不变凸函数,G^{-1} 是严格凸的,如果 $\bar{x}$ 是关于问题(P)的局部最优点,则 $\bar{x}$ 是问题(P)的全局唯一的最优点。

证明 全局性证明。如果 $\bar{x}$ 是关于规划问题(P)的局部最优点,于是存在一个关于 $\bar{x}$ 的邻域 $N_\varepsilon(\bar{x})$,使得

$$f(\bar{x})\leqslant f(x),\ \forall x\in K\cap N_\varepsilon(\bar{x})。\tag{9}$$

假设 $\bar{x}$ 不是关于问题(P)的全局最优点,则必存在 $\bar{\bar{x}}\in K$,使得

$$f(\bar{\bar{x}})<f(\bar{x})。\tag{10}$$

因为 f 是 K 上关于 η 的强 G-预不变凸函数,故存在常数 $\beta>0$ 对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有

$$\begin{aligned}&f(\bar{x}+\lambda\eta(\bar{\bar{x}},\bar{x}))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(\bar{\bar{x}}))+(1-\lambda)G(f(\bar{x}))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\bar{\bar{x}},\bar{x})\|^2]\leqslant\\&G^{-1}[\lambda G(f(\bar{\bar{x}}))+(1-\lambda)G(f(\bar{x}))]<G^{-1}[\lambda G(f(\bar{x}))+(1-\lambda)G(f(\bar{x}))]\leqslant f(\bar{x})。\end{aligned}\tag{11}$$

当 $\lambda>0$ 充分小时有

$$\bar{x}+\lambda\eta(\bar{\bar{x}},\bar{x})\in K\cap N_\varepsilon(\bar{x})。\tag{12}$$

这与(9)式矛盾,假设不成立。故 $\bar{x}$ 一定是关于规划问题(P)的全局最优点。

唯一性的证明。假设 $x_0,x_1\in K$ 是问题(P)的两个相异全局最优点,则 $f(x_0)=f(x_1)$。因为 f 是 K 上关于 η 的强 G-预不变凸函数,故存在常数 $\beta>0$,对 $\forall\lambda\in[0,1]$有

$$x_1+\lambda\eta(x_0,x_1)\in K,$$

$$\begin{aligned}&f(x_1+\lambda\eta(x_0,x_1))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x_0))+(1-\lambda)G(f(x_1))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x_0,x_1)\|^2]\leqslant\\&G^{-1}[\lambda G(f(x_0))+(1-\lambda)G(f(x_1))]<\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_1)=f(x_0)。\end{aligned}\tag{13}$$

此与 x_0 是问题(P)的全局最优点矛盾,故问题(P)的全局最优点唯一。

综上所述,$\bar{x}$ 是问题(P)的全局唯一的最优点。 证毕

若 $f:X\to\mathbf{R},g_i:X\to\mathbf{R},i\in J$,且 X 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集。考虑如下的非线性规划问题(Q):

$$f(x)\to\min,$$
$$g_i(x)\leqslant 0,i\in J=\{1,2,\cdots,m\}。$$

记问题(Q)的可行域为 $D=\{x\in X\mid g_i(x)\leqslant 0,i\in J\}$。

定理7 设函数 f 是 D 上关于 η 的强 G-预不变凸函数,函数 $g_i,i\in J$ 是 D 上关于同一 η 的强 G_i-预不变凸函数,则规划问题(Q)的所有最优解的集合 A 是关于 η 的不变凸集。

证明 令 $\bar{x}_1,\bar{x}_2(\bar{x}_1\neq\bar{x}_2)$是问题(Q)的两个最优解,则 $f(\bar{x}_1)=f(\bar{x}_2)=\min_{x\in D}f(x)$。由 $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in D$,且 f 是 D 上关于 η 的强 G-预不变凸函数可得

$$\begin{aligned}&f(\bar{x}_2+\lambda\eta(\bar{x}_1+\bar{x}_2))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(\bar{x}_1))+(1-\lambda)G(f(\bar{x}_2))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\|^2]\leqslant\\&G^{-1}[\lambda G(f(\bar{x}_1))+(1-\lambda)G(f(\bar{x}_2))]=f(\bar{x}_1)=f(\bar{x}_2)。\end{aligned}$$

下面证明 $\bar{x}_2+\lambda\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in A,\forall\lambda\in[0,1]$成立。事实上,显然有 $\bar{x}_2+\lambda\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in D,\forall\lambda\in[0,1]$。因为 $g_i,i\in J$ 是 D 上的强 G_i-预不变凸函数,则对 $\forall i\in J$ 有

$$\begin{aligned}&g_i(\bar{x}_2+\lambda\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2))\leqslant G_i^{-1}[\lambda G_i(g_i(\bar{x}_1))+(1-\lambda)G_i(g_i(\bar{x}_2))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\|^2]\leqslant\\&G_i^{-1}[\lambda G_i(g_i(\bar{x}_1))+(1-\lambda)G_i(g_i(\bar{x}_2))]\leqslant G_i^{-1}[\lambda G_i(0)+(1-\lambda)G_i(0)]=G_i^{-1}[G_i(0)]=0。\end{aligned}$$

因此对 $\forall\lambda\in[0,1]$有 $g_i(\bar{x}_2+\lambda\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2))\leqslant 0$,所以集合 A 是关于 η 的不变凸集。 证毕

文献[9]中给出例3说明了强 G-预不变凸函数不必是关于同一 η 的严格 G-预不变凸函数。下面给出例子来说明半严格 G-预不变凸函数[9]不必是关于同一 η 的强 G-预不变凸函数。

例 2　令 $K=[-6,-2]\cup[-1,6]$，$G(t)=t$，$f(x)=\begin{cases}1, x=0\\0, x\neq 0, x\in K\end{cases}$，$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y, x\in[-1,6], y\in[-1,6]\\x-y, x\in[-6,-2], y\in[-6,-2]\\-2-y, x\in[-1,6], y\in[-6,-2]\\-y, x\in[-6,-2], y\in[-1,6], y\neq 0\\\frac{1}{6}y, x\in[-6,-2], y=0\end{cases}$，则由文献[12]中半严格 G-预不变凸函数的定义可得 f 是关于 η 的半严格 G-预不变凸函数，但对 $\forall\beta>0$，令 $x=1, y=2, \lambda=\frac{1}{2}$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=f\left(\frac{3}{2}\right)=0,$$

$$G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\parallel\eta(x,y)\parallel^{2}]=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(2)-\frac{\beta}{4}=-\frac{\beta}{4}。$$

于是得到 $f(u+\lambda\eta(x,u))>G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(u))-\lambda(1-\lambda)\beta\parallel\eta(x,u)\parallel^{2}]$。故 f 不是关于同一 η 的强 G-预不变凸函数。

参考文献：

[1] Craven B D. Invex functions and constrained local minima[J]. Bull Austral Math Soc, 1981, 24(2): 357-366.

[2] Weir T, Mond B. Preinvex functions in multiple objective optimization[J]. J Math Anal Appl, 1988, 13: 629-38.

[3] Mohan S R, Neogy S K. On Invex sets and Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl, 1995, 189: 901-908.

[4] 颜丽佳，刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2005，22 (1)：11-15.

[5] 彭再云，罗洪林. 关于强预不变凸函数的注记[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2006，23(3)：36-39.

[6] 彭再云，汪达成. 强预不变凸函数的新性质及应用[J]. 重庆交通大学学报：自然科学版，2008，27(5)：839-842.

[7] Tadeusz Antczak. G-pre-invex functions in mathematical programming[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 217: 212-226.

[8] Tadeusz Antczak. New optimality condictions and duality results of G type in differentiable mathematical programming[J]. Nonliner Analysis, 2007, 66: 1617-1632.

[9] 彭再云，房效亮，赵勇强. G-预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2011，28 (6)：1-4.

[10] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 258: 287-308.

[11] 赵勇，彭再云，刘顶峰，等. 半 B-(p,r)-预不变凸函数与非线性规划问题[J]. 北华大学学报：自然科学版，2012，13(2)：153-159.

[12] Luo H Z, Wu H X. On the relationships between G-preinvex functions and semistrictly G-preinvex functions [J]. JComput Appl Math, 2008, 222(2): 372- 380.

Operations Research and Cybernetics

Characteristics and Applications of Strongly G-preinvex Functions

PENG Zai-yun[1], ZHOU Xuan-lin[1], ZHAO Yong[2,1]

(1. College of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;

2. School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, strongly G-preinvex function is further studied. Firstly, another example has been given to show its existence. Then, we give two necessary and sufficient conditions of strongly G-preinvex function under the condition of semi-continuity. By using the epigraph $E(f)$, we also give a characterization and a property of strongly G-preinvex function respectively. Finally, by using strong G-preinvexity, important applications for two classes of mathematical programming problems are given. Our results extend and improve the exist ones in the literature.

Key words: invex set; G-preinvex functions; strongly G-preinvex functions; mathematical programming

（责任编辑　黄　颖）