运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N. 20120704. 1115. 003

# 加工时间可变最大流程时间排序的纳什合作博弈*

顾燕红[1]，金　霁[2]，唐国春[3]

(1. 深圳大学 数学与计算科学学院应用数学系，广东 深圳 518067；
2. 苏州市职业大学 基础部，江苏 苏州 215104；3. 上海第二工业大学 经济管理学院，上海 201209)

**摘要:**在现实世界中,往往存在一人无法承担一个项目中全部工件加工任务的情况,这就要考虑由多人合作加工的情形。本文研究工件加工时间是开工时间线性函数的情况下,以最小的最大流程时间作为加工成本的(两人)纳什合作(加工)博弈问题,每人有一台用于加工工件的机器。通过确定这批工件的一个恰当划分,把工件分配给两台机器,使得相应的合作(加工)收益分配合理,能够被双方接受。

**关键词:**排序；纳什博弈；合作收益；最大流程；线性函数

**中图分类号:**O221.7　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2012)04-0018-06

经典排序问题中只有一个“人”(一个自然人或某一个集体)参与工件加工,然而由于资金、技术和时间等原因,有时一个“人”无法独立承担一个项目中所有工件的加工任务,这时就可能要考虑寻找合作者。这种合作建立在存在所有参与者满意的工件分配方案的基础上,这就是合作博弈。

纳什[1-2]在研究两人合作博弈问题时定义了纳什博弈解[1](Nash bargaining solution,NBS),即是使得两人合作收益[8]乘积最大的利益分配方案。由此分配方案出发,任一人为增加自己的收益而主张的分配方案改变都会导致另一个人的收益减少,即此分配方案是帕累托有效的(Pareto efficiency)。纳什[1]进一步证明:如果可行博弈解的连续帕累托有效(子)集是闭凹的,那么 NBS 唯一。

当上述帕累托有效(子)集不连续时,称为离散(两人)合作博弈。Nagahisa 和 Tanaka[3],Mariotti[4]和 Lahiri[5]在离散合作博弈模型的研究中并没有假设合作收益函数取整数值,而是对离散的帕累托有效集提出某些假定,得到了类似 NBS 唯一性的性质。陈全乐[6]开创性地将 NBS 应用到整数化的离散合作博弈模型中,考虑成对的两个最优化目标函数 $P_t((r_1,\ r_2))$:$r_1v_1v_2+r_2\min\ \{v_1^2,v_2^2\}$,$(t=1,2)$。其中,$v_i$是第 $i$ 人的整数取值的合作收益,$r_i=0,1,\cdots,(i=1,2)$,$(r_1,\ r_2)$是 $\max\ v_1v_2$ 与 $\max$:$\min\ \{v_1^2,v_2^2\}$的权重系数向量。事实上,当 $r_1=1$,$r_2=0$ 时,就是最大化纳什的目标函数 $v_1v_2$。陈全乐[6]说明了满足 $\max\ v_1v_2$ 的最优解$(v_1^*,v_2^*)$确定的利益分配方案是在充分考虑能力高的一方收益情况下兼顾公平的结果。而目标函数 $\max$:$\min\ \{v_1^2,v_2^2\}$则强调合作收益分配的公平性。为此,将纳什的最优化模型加以扩展,通过选取不同的权重系数向量$(r_1,\ r_2)$得到满足不同主观决策要求——或偏重效率或偏重公平的最优解集(Discrete bargaining solutions,DBS),合作双方在 DBS 解集的基础上通过协商确定最终的利益分配方案,该方案未必是帕累托有效的,但却是双方都能接受的。

顾燕红[7]对文献[6]中提出的 $P_t((r_1,\ r_2))$进行改造,证明使函数 $P_t((r_1,\ r_2))$最大的$(v_1^*,v_2^*)$也是帕累托有效的,并改进文献[6]中提出的用于实现此离散博弈的博弈机制。

陈全乐[6]首先对两人合作加工工件的整数化离散合作博弈模型进行研究。在此博弈情形中,每个人的合作收益函数中的加工成本项是经典排序问题中的某个最小化费用。金霁等[8]最早给出此博弈情形的中文名称:排序博弈。文献[6,8-12]中对各种不同的最小化费用确定的加工成本,设计求解 $\max\ P_t((r_1,\ r_2))$的算法。陈全乐[6]和甘小冰等[10]设计的动态规划算法适用于所有的$(r_1,\ r_2)$。

---

* **收稿日期:**2012-03-08　　**网络出版时间:**2012-07-04　11:15:00

**作者简介:**顾燕红,女,副教授,博士,研究方向为组合优化;**通讯作者:**金霁,E-mail:szjinji@126.com

**网络出版地址:**http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120704.1115.201204.18_003.html

文献[12]中的两个动态规划虽仅针对 $\max v_1v_2$，但也可以求解任意其他的 $\max P_t((r_1, r_2))$。当 $r_1=1$，$r_2=0$ 且加工成本较为简单时，金霁等[8]和窦文卿等[9]提出公式化的结论。顾燕红和陈全乐[11]考虑一方的能力大大高于另一方，并由此在协商工件分配方案时有一些特权的情况。当合作收益函数与工件的排序无关时，证明这个问题等价于背包问题，可以用求解背包问题的算法来确定双方都满意的收益分配方案。

与文献[8-9]相同，本文研究问题 $\max v_1v_2$。假定每人有一台机器用于工件加工，每个工件只需加工一次，加工时间是其开工时间的函数。研究这类加工时间与开工时间有关的问题有着积极的现实意义，它们广泛存在于钢铁、塑料工业和医疗等领域[13]。例如，有的工件加工有一定的温度要求，如果工件在加工前温度不够，那么无论是重新加温使其满足温度要求，还是在不满足温度要求下进行低温加工，都将导致加工时间的增加。加工成本是取为最小的最大流程时间 $\min F_{\max}$。第 2 节讨论工件的加工时间是开工时间的线性函数的情形，第 3 节讨论工件的加工时间是开工时间的分段线性函数的情形。这两个问题都能在多项式时间内求解。

## 1 问题的提出

设有工件集 $J=\{1,2,\cdots,n\}$，所有工件在时刻 $t_0(>0)$之后开始加工，每个工件只需加工一次。工件 $j$ 的加工时间 $p_j$ 是关于其开始加工时间 $t(\geqslant t_0)$ 的函数 $p_j=f(t)$，工件 $j$ 的完工时间 $C_j$ 也就是其紧后工件的开始加工时间，工件 $j$ 的流程时间 $F_j=C_j-t_0$。现在由两人合作一起加工这批工件，也就是要将工件集 $J$ 划分为两个互不相交的集合 $X_1$ 和 $X_2$，满足：$X_1\cup X_2=J$，$X_1\cap X_2=\varnothing$，集合 $X_i(i=1,2)$内的工件由第 $i$ 人加工。假设每人有一台加工机器，每加工单位时间的工件会使第 $i$ 人获得 $b_i$ 个单位的收益。如果以最小的最大流程时间 $\min F^i_{\max}$ 作为加工成本，那么收益函数[8] $u_i=b_i\sum\limits_{j\in X_i}p_j-\min F^i_{\max}$。本文第 2 节研究工件加工时间 $p_j=f(t)=\alpha t$ 的情形，其中 $\alpha(>0)$ 为比例系数；第 3 节研究工件加工时间 $p_j=f(t)=\begin{cases}\alpha t, t<T\\ \alpha T, t\geqslant T\end{cases}$ 的情形，其中 $T$ 是一个给定的常数。对于工件的加工时间是这两种函数时，这些工件都是相同的，都是从 $t_0$ 时刻可以开始加工，工件加工时间都只与开始加工的“位置”有关，而且比例系数是常数 $\alpha$，所以划分工件集时只需要考虑工件的个数。此时 $X_1$、$X_2$ 内的工件已经是 SPT 序(最小加工时间序)，已经使最大流程时间 $F^i_{\max}$ 为最小，因而不失一般性，$X_1$ 和 $X_2$ 可记为 $X_1=\{1,2,\cdots,k\}$ 和 $X_2=\{k+1,k+2,\cdots,n\}$。从而 $k$ 是把工件集 $J$ 划分成为两部分分别给两台机器加工的决策变量。此时，第 1 台机器加工的工件数是 $k$，第 2 台机器加工的工件数是 $n-k$。因此收益函数

$$u_i=u_i(k)=b_i\sum_{j\in X_i}p_j-\min F^i_{\max}=b_i\sum_{j\in X_i}p_j-F^i_{\max}=$$

$$b_i\sum_{j\in X_i}p_j-\left(\sum_{j\in X_i}p_j\right)=(b_i-1)\sum_{j\in X_i}p_j,$$

其中 $i=1,2$；并且，$u_1(0)=0$ 或 $u_2(n)=0$ 分别是第 1 台机器或第 2 台机器没有分配工件，都由第 2 台机器或第 1 台机器加工所有工件时的收益值。于是合作收益函数[8]

$$v_i=v_i(k)=u_i(k)-e_i, i=1,2,$$

其中$(e_1,e_2)$是合作博弈论中的无协议点[14]

$$e_1\geqslant u_1(0)=0, e_2\geqslant u_2(n)=0,$$

其中 $e_i$ 是第 $i$ 人不参加这次合作而参与别的商业活动所能获得的最低收益，也就是第 $i$ 人参加这个合作的机会成本。由此，只需要讨论 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 的情况。根据文献[6]离散化的假设，$\alpha$，$t_0$，$b_i$ 和 $p$ 都取正整数值，因而都大于或者等于 1，$e_i$ 取非负整数值。

本文研究以最小的流程时间作为加工成本使得两人的合作收益函数的乘积 $v_1v_2$ 为最大的两人排序合作博弈问题。按照参考文献[8]定义的三参数表示法，此问题(P)可以表示为

$$G2\,|\,p_j=f(t)\,|\,v_1v_2/F_{\max}。$$

如果存在某个 $k$，$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得合作收益函数 $v_i(k)>0\ (i=1,2)$，那么问题(P)的最优解 $k^*$ 有

$$v_1(k^*)v_2(k^*)=\max\{v_1(k)v_2(k)\mid v_1(k)>0,$$
$$v_2(k)>0,\ k\in\{1,\ 2,\cdots,\ n-1\}\}。$$

因此，问题(P)可以在 $O(n)$时间内解决。

## 2 加工时间是开工时间线性函数的排序博弈问题

本节中工件 $j$ 的加工时间为 $p_j=\alpha t$，所以 $X_1$ 中各个工件的完工时间为

$$C_1=t_0+\alpha t_0=(1+\alpha)t_0,$$

$$C_2=C_1+\alpha C_1=(1+\alpha)^2t_0,$$

$$\cdots$$

$$C_k=C_{k-1}+\alpha C_{k-1}=(1+\alpha)^kt_0。$$

同样地,注意到 $X_2$ 内的工件也从时刻 $t_0$ 开始加工,所以 $X_2$ 中各个工件的完工时间为

$$C_{k+1}=t_0+\alpha t_0=(1+\alpha)t_0,$$
$$C_{k+2}=C_{k+1}+\alpha C_{k+1}=(1+\alpha)^2 t_0,$$
$$\cdots$$
$$C_n=C_{n-1}+\alpha C_{n-1}=(1+\alpha)^{n-k}t_0。$$

因此,收益函数为

$$u_1(k)=u_1(X_1)=(b_1-1)\sum_{j\in X_1}p_j=$$
$$(b_1-1)(C_k-t_0)=t_0(b_1-1)[(1+\alpha)^k-1],$$
$$u_2(k)=u_2(X_2)=(b_2-1)\sum_{j\in X_2}p_j=$$
$$(b_2-1)(C_n-t_0)=t_0(b_2-1)[(1+\alpha)^{n-k}-1]。$$

由于收益函数要满足 $u_i(X_i)>0$,所以必须有 $b_i>1\ (i=1,2)$。

合作收益函数为

$$v_1(k)=v_1(X_1)=$$
$$u_1(X_1)-e_1=t_0(b_1-1)[(1+\alpha)^k-A],\quad(1)$$
$$v_2(k)=v_2(X_2)=$$
$$u_2(X_2)-e_2=t_0(b_2-1)[(1+\alpha)^{n-k}-B],\quad(2)$$

其中 $A=\dfrac{e_1}{t_0(b_1-1)}+1$,$B=\dfrac{e_2}{t_0(b_2-1)}+1$。

注意到 $e_i\geqslant 0$,$b_i>1\ (i=1,2)$,$t_0\geqslant 1$,故有 $A\geqslant 1$,$B\geqslant 1$。

因为两人要合作,所以要满足 $v_i(k)>0(i=1,2)$,从而有

$$\beta_1<k<\beta_2,\quad(3)$$

其中 $\beta_1=\dfrac{\ln A}{\ln(1+\alpha)}$,$\beta_2=n-\dfrac{\ln B}{\ln(1+\alpha)}$。

注意到 $A\geqslant 1$,$B\geqslant 1$,$\alpha\geqslant 1$,知

$$\beta_1\geqslant 0,\beta_2\leqslant n。\quad(4)$$

又由于两人要进行合作,故必有

$$1\leqslant k\leqslant n-1。\quad(5)$$

结合(3)、(4)以及(5)式,知

$$0\leqslant\beta_1<n-1,1<\beta_2\leqslant n,\beta_1<\beta_2,n\geqslant 2。\quad(6)$$

由(1)、(2)式,得

$$v_1(k)v_2(k)=$$
$$t_0^2(b_1-1)(b_2-1)[(1+\alpha)^k-A][(1+\alpha)^{n-k}-B]=$$
$$t_0^2(b_1-1)(b_2-1)[(1+\alpha)^n+AB]-$$
$$t_0^2(b_1-1)(b_2-1)[A(1+\alpha)^{n-k}+B(1+\alpha)^k]。(7)$$

当参数 $b_i$,$e_i(i=1,2)$,$t_0$、$\alpha$ 以及 $n$ 都给定的时候,(7)式中的第一项是常数。为此,令 $\varphi(k)=A(1+\alpha)^{n-k}+B(1+\alpha)^k$,只要使 $\varphi(k)$ 最小,目标函数 $v_1(k)v_2(k)$ 就最大。

注意到 $A(1+\alpha)^{n-k}>0$,$B(1+\alpha)^k>0$,所以根据均值不等式,得

$$\varphi(k)=A(1+\alpha)^{n-k}+B(1+\alpha)^k\geqslant$$
$$2\sqrt{AB(1+\alpha)^n}(\text{定值}),\quad(8)$$

当且仅当 $A(1+\alpha)^{n-k}=B(1+\alpha)^k$ 时,即 $k=\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$ 时,$\varphi(k)$ 取到最小值 $2\sqrt{AB(1+\alpha)^n}$。

事实上,$\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$ 未必是整数,故令 $\beta=\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$,且由(6)式知

$$\frac{1}{2}<\beta<n-\frac{1}{2}。\quad(9)$$

**性质1** 加工时间是开工时间线性函数的排序博弈问题 $G2|p_j=\alpha t|v_1v_2/F_{\max}$ 有解的充要条件是 $\beta_l\leqslant\beta_r$,其中 $\beta_l=\lfloor\beta_1\rfloor+1$,$\beta_r=\lceil\beta_2\rceil-1$。

**证明** 根据(3)、(5)式有,排序博弈问题(P)有解等价于 $(\beta_1,\beta_2)\cap[1,n-1]\neq\varnothing$,即至少存在一个正整数 $k$,有 $k\in(\beta_1,\beta_2)\cap[1,n-1]$。注意到 $k$ 是整数,于是令 $\beta_l=\lfloor\beta_1\rfloor+1$,$\beta_r=\lceil\beta_2\rceil-1$。由于 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 可能是整数,所以不能令 $\beta_l=\lceil\beta_1\rceil-1$,$\beta_r=\lfloor\beta_2\rfloor+1$。

由(6)式知,$1\leqslant\beta_l\leqslant n-1$,$1\leqslant\beta_r\leqslant n-1$。故问题(P)有解等价于 $\beta_l\leqslant\beta_r$,即闭区间 $[\beta_l,\beta_r]$ 中至少有一个正整数 $k$。 证毕

**定理1** 如果加工时间是开工时间线性函数的两人合作排序博弈问题 $G2|p_j=\alpha t|v_1v_2/F_{\max}$ 存在正整数解 $k$,那么其最优解(集)为

a) 如果 $\dfrac{1}{2}<\beta\leqslant 1$,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=1$。

b) 如果 $1<\beta<n-1$,当 $\beta$ 为整数时,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=\beta$;否则,若 $\varphi(\lfloor\beta\rfloor)<\varphi(\lceil\beta\rceil)$,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lfloor\beta\rfloor$;若 $\varphi(\lfloor\beta\rfloor)>\varphi(\lceil\beta\rceil)$,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lceil\beta\rceil$;若 $\varphi(\lfloor\beta\rfloor)=\varphi(\lceil\beta\rceil)$,那么该排序博弈问题的最优解集为 $\{\lfloor\beta\rfloor,\lceil\beta\rceil\}$。

c) 如果 $n-1\leqslant\beta<n-\dfrac{1}{2}$,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=n-1$。

**证明** 性质1表明,加工时间是开工时间线性函数的排序博弈问题 $G2|p_j=\alpha t|v_1v_2/F_{\max}$ 的最优解(集)只能是位于闭区间 $[\beta_l,\beta_r]$ 中的正整数。

a) 当 $\dfrac{1}{2}<\beta\leqslant 1$ 时,有 $1<\beta_1+\beta_2\leqslant 2$。注意到 $0\leqslant\beta_1<\beta_2$,故有 $2\beta_1<\beta_1+\beta_2\leqslant 2$,所以 $0\leqslant\beta_1<1$。因此,$\beta_l=\lfloor\beta_1\rfloor+1=1$。

另一方面，由 $1<\beta_1+\beta_2\leqslant 2$，$\beta_1\geqslant 0$ 以及 $\beta_2>1$，得 $1<\beta_2\leqslant 2$，所以 $\beta_r=\lceil\beta_2\rceil-1=1$。由于 $\beta_l=\beta_r=1$，从而该排序博弈问题的最优解 $k^*=1$。

b)当 $1<\beta<n-1$ 时，如果 $\beta$ 为整数，那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=\beta$；否则，比较 $\varphi(\lfloor\beta\rfloor)$ 与 $\varphi(\lceil\beta\rceil)$ 的大小。所以结论 b)成立。

c)当 $n-1\leqslant\beta<n-\frac{1}{2}$ 时，类似情况 a)的分析有 $\beta_l=\beta_r=n-1$，从而该排序博弈问题的最优解 $k^*=n-1$。 证毕

## 3 加工时间是开工时间的分段线性函数的排序博弈问题

本节中工件 $j$ 的加工时间为 $p_j=\begin{cases}\alpha t,t<T\\ \alpha T,t\geqslant T\end{cases}$。如果 $X_1$ 和 $X_2$ 内工件开始加工时间 $t_0\geqslant T$，此时工件 $j$ 的加工时间 $p_j=\alpha T$，是一个固定的常数，这就是文献[8]所讨论的问题。如果集合 $X_1$ 和 $X_2$ 内最后一个工件的完工时间分别为

$$C_k=(1+\alpha)^k t_0\leqslant T, C_n=(1+\alpha)^{n-k}t_0\leqslant T,$$

此时该问题就是第 2 节中讨论的情形。因此假定 $t_0<T$，且考虑 $X_1$、$X_2$ 内都有临界工件的情况。不妨设 $X_1$ 内第 $\rho_1(2\leqslant\rho_1\leqslant k-1)$ 个工件为临界工件，$X_2$ 内第 $\rho_2(2\leqslant\rho_2\leqslant n-k-1)$ 个工件为临界工件，即

$$C_{\rho_1-1}=(1+\alpha)^{\rho_1-1}t_0<T, C_{\rho_1}=(1+\alpha)^{\rho_1}t_0\geqslant T,$$
$$C_{k+\rho_2-1}=(1+\alpha)^{\rho_2-1}t_0<T, C_{k+\rho_2}=(1+\alpha)^{\rho_2}t_0\geqslant T,$$

事实上，由于 $\alpha$、$t_0$、$T$ 都是常数，所以 $\rho_1=\rho_2=\rho$，从而

$$C_{\rho_1-1}=C_{k+\rho_2-1}=(1+\alpha)^{\rho-1}t_0<T,$$
$$C_{\rho_1}=C_{k+\rho_2}=(1+\alpha)^{\rho}t_0\geqslant T。$$

于是 $X_1$ 中各个工件的完工时间为

$$C_1=t_0+\alpha t_0=(1+\alpha)t_0,$$
$$\cdots$$
$$C_{\rho_1-1}=C_{\rho-1}=(1+\alpha)^{\rho-1}t_0<T,$$
$$C_{\rho_1}=C_{\rho}=(1+\alpha)^{\rho}t_0\geqslant T,$$
$$C_{\rho_1+1}=C_{\rho+1}=C_{\rho}+\alpha T=(1+\alpha)^{\rho}t_0+\alpha T,$$
$$\cdots$$
$$C_k=(1+\alpha)^{\rho}t_0+(k-\rho)\alpha T。$$

$X_2$ 中各个工件的完工时间为

$$C_{k+1}=t_0+\alpha t_0=(1+\alpha)t_0,$$
$$\cdots$$
$$C_{k+\rho-1}=(1+\alpha)^{\rho-1}t_0<T,$$
$$C_{k+\rho}=(1+\alpha)^{\rho}t_0\geqslant T,$$
$$C_{k+\rho+1}=C_{k+\rho}+\alpha T=(1+\alpha)^{\rho}t_0+\alpha T,$$
$$\cdots$$
$$C_n=(1+\alpha)^{\rho}t_0+(n-k-\rho)\alpha T。$$

此时，收益函数为

$$u_1(k)=u_1(X_1)=(b_1-1)\sum_{j\in X_1}p_j=(b_1-1)(C_k-t_0)=$$
$$(b_1-1)[(1+\alpha)^{\rho}t_0+(k-\rho)\alpha T-t_0],$$
$$u_2(k)=u_2(X_2)=(b_2-1)\sum_{j\in X_2}p_j=(b_2-1)(C_n-t_0)$$
$$(b_2-1)[(1+\alpha)^{\rho}t_0+(n-k-\rho)\alpha T-t_0]。$$

由于 $u_i(X_i)>0$，所以 $b_i>1$，$i=1,2$。

合作收益函数为

$$v_1(k)=v_1(X_1)=u_1(X_1)-e_1=$$
$$\alpha T(b_1-1)(k-\rho+C), \tag{10}$$
$$v_2(k)=v_2(X_2)=u_2(X_2)-e_2=$$
$$\alpha T(b_2-1)(n-k-\rho+D)。 \tag{11}$$

其中

$$C=\frac{t_0(1+\alpha)^{\rho}}{\alpha T}-\frac{t_0(b_1-1)+e_1}{\alpha T(b_1-1)},$$
$$D=\frac{t_0(1+\alpha)^{\rho}}{\alpha T}-\frac{t_0(b_2-1)+e_2}{\alpha T(b_2-1)}。$$

因为 $v_i(k)>0(i=1,2)$，所以

$$\theta_1<k<\theta_2, \tag{12}$$

其中 $\theta_1=\rho-C$，$\theta_2=n-(\rho-D)$。

又注意到 $2\leqslant\rho\leqslant k-1$ 且 $2\leqslant\rho\leqslant n-k-1$，所以

$$3\leqslant k\leqslant n-3。 \tag{13}$$

并且由(13)式，有

$$n\geqslant 6。 \tag{14}$$

结合(12)、(13)式，知

$$\theta_1<n-3, \theta_2>3, \theta_1<\theta_2。 \tag{15}$$

**性质 2** 加工时间是开工时间分段线性函数的排序博弈问题

$$G2\,|\,p_j=\alpha t,t<T;p_j=\alpha T,t\geqslant T\,|\,v_1v_2/F_{\max}$$

有解的充要条件是 $\theta_l\leqslant\theta_r$，其中 $\theta_l=\lfloor\theta_1\rfloor+1$，$\theta_r=\lceil\theta_2\rceil-1$。

证明同性质 1，略。

由(10)、(11)，得

$$v_1(k)v_2(k)=$$
$$\alpha^2T^2(b_1-1)(b_2-1)(k-\theta_1)(\theta_2-k)。 \tag{16}$$

即合作收益函数的乘积 $v_1(k)v_2(k)$ 是关于决策变量 $k$ 的二次函数，且开口向下。由于其对称轴 $\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$ 未必是整数，故令 $\theta=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$。

**定理 2** 如果加工时间是开工时间的分段线性

函数的排序博弈问题

$G2|p_j=\alpha t,t<T;p_j=\alpha T,t\geqslant T|v_1v_2/F_{\max}$

存在正整数解 $k$,那么其最优解(集)为:

a) 当 $\theta\leqslant 3$ 时,该排序博弈问题的最优解 $k^*=3$。

b) 当 $3<\theta<n-3$ 时,若 $\theta$ 为整数,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\theta$;否则,如果 $\theta-\lfloor\theta\rfloor<\theta-\lceil\theta\rceil$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lfloor\theta\rfloor$,如果 $\theta-\lfloor\theta\rfloor>\theta-\lceil\theta\rceil$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lceil\theta\rceil$,如果$\theta-\lfloor\theta\rfloor=\theta-\lceil\theta\rceil\neq 0$,则该排序博弈问题的最优解集为$\{\lfloor\theta\rfloor,\lceil\theta\rceil\}$。

c) 当 $\theta\geqslant n-3$ 时,该排序博弈问题的最优解 $k^*=n-3$。

**证明** 对 $\theta_1$、$\theta_2$ 分 4 种情况进行讨论。

1) 若 $\theta_1<3,\theta_2>n-3$,则 $\theta_l\leqslant 3,\theta_r\geqslant n-3$,即 $\theta_l<\theta_r$,根据性质 2,问题必定有正整数解 $k$。注意到该正整数解 $k$ 必定在闭区间$[3,n-3]$上,所以又分 3 种情况。

① 如果 $\theta\leqslant 3$,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=3$。

② 如果 $3<\theta<n-3$,当 $\theta$ 为整数时,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=\theta$;否则,如果 $\theta-\lfloor\theta\rfloor<\theta-\lceil\theta\rceil$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lfloor\theta\rfloor$,如果 $\theta-\lfloor\theta\rfloor>\theta-\lceil\theta\rceil$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lceil\theta\rceil$,如果 $\theta-\lfloor\theta\rfloor=\theta-\lceil\theta\rceil\neq 0$,则该排序博弈问题的最优解集为$\{\lfloor\theta\rfloor,\lceil\theta\rceil\}$。

③ 如果 $\theta\geqslant n-3$,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=n-3$。

2) 若 $\theta_1<3,3<\theta_2\leqslant n-3$,则 $\theta_l\leqslant 3,3\leqslant\theta_r\leqslant n-4$,即 $\theta_l\leqslant\theta_r$,因此问题必定有正整数解 $k$,$k\in[3,\theta_r]$。又 $\theta=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$,故 $\theta<\frac{n}{2}$。注意到 $\frac{n}{2}=n-\frac{n}{2}$ 以及$n\geqslant 6$,所以有 $\frac{n}{2}\leqslant n-3$,即总有 $\theta<n-3$。因此,类似 1)的分析,有结论 a)、b)成立。

3) 若 $3\leqslant\theta_1<n-3,\theta_2>n-3$,则 $4\leqslant\theta_l\leqslant n-3$,$\theta_r\geqslant n-3$,即 $\theta_l\leqslant\theta_r$,因此问题在闭区间$[\theta_l,\ n-3]$上必定有正整数解 $k$。同样由 $\theta=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$ 知,$\theta>\frac{n}{2}\geqslant 3$,即总有 $\theta>3$。同理可知结论 b)、c)成立。

4) 若 $3\leqslant\theta_1<n-3,3<\theta_2\leqslant n-3$,则 $4\leqslant\theta_l\leqslant n-3,3\leqslant\theta_r\leqslant n-4$。只要 $\theta_l\leqslant\theta_r$,则问题必定有解,且正整数解 $k\in[\theta_l,\ \theta_r]$。由 $\theta=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$ 知,$3<\theta<n-3$。所以,当 $\theta$ 为整数时,那么该排序博弈问题的最优解 $k^*=\theta$;否则,如果 $\theta-\lfloor\theta\rfloor<\theta-\lceil\theta\rceil$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lfloor\theta\rfloor$,如果 $\theta-\lfloor\theta\rfloor>\theta-\lceil\theta\rceil$,则该排序博弈问题的最优解 $k^*=\lceil\theta\rceil$,如果 $\theta-\lfloor\theta\rfloor=\theta-\lceil\theta\rceil\neq 0$,则该排序博弈问题的最优解集为$\{\lfloor\theta\rfloor,\lceil\theta\rceil\}$。

综合上述 4 种情况,定理 2 成立。 证毕

## 4 总结

本文考虑了两人合作共同加工一批工件,工件的加工时间是开工时间的函数,当以最小的最大流程时间为加工成本时,定理 1 和定理 2 分别给出加工时间是开工时间的线形函数和分段线形函数时的最优解(集)。该最优解(集)充分体现了效率原则,今后可以考虑强调公平性的优化目标 max:min$\{v_1^2,v_2^2\}$,或考虑优化目标函数组 $P_t((r_1,\ r_2))$,通过选取不同的$(r_1,\ r_2)$得到一组最优工件划分解集,从而使模型能更好地贴近现实,更好地为决策提供依据。

**致谢**:本文的研究是在陈全乐博士的提议和资助下完成的,对此我们深表感谢!我们也感谢上海第二工业大学排序研究室师生的参与、讨论和帮助。

**参考文献**:

[1] Nash J F. The bargaining problem[J]. Econometrica, 1950, 18(2):155-162.

[2] Nash J F. Two person cooperative games[J]. Econometrica, 1953,21(1):128-140.

[3] Nagahisa R, Tanaka M. An axiomatization of the Kalai-Smorodinsky solution when the feasible sets can be finite [J]. Social Choice and Welfare,2002,19(4):751-761.

[4] Mariotti M. Nash bargaining theory when the number of alternatives can be finite[J]. Social Choice and Welfare, 1998, 15(3):413-421.

[5] Lahiri S. Axiomatic characterization of the Nash and Kalai-Smorodinsky solutions for discrete bargaining problems[J]. Pure Mathematics and Applications,2003,14(3): 207- 220.

[6] Chen Q L. A New discrete bargaining model on job partition between two manufacturers[D]. Hong Kong:The Chinese University of Hong Kong,2006.

[7] Gu Y H,Goh M,Chen Q L,et al. A new two-party bargaining mechanism [J/OL]. Journal of Combinatorial Optimization. Available online(2011-11-02)[2012-02-25]. http://www. springerlink. com/content/q4068403426/

hh62/.

[8] 金霁,顾燕红,唐国春. 最大完工时间排序的两人合作博弈[J]. 上海第二工业大学学报,2011,28(1):14-17.

[9] 窦文卿,顾燕红,唐国春. 总完工时间排序的两人合作博弈[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2012,29(5):待刊发.

[10] Gan X B,Gu Y H,Vairaktarakis G L,et al. A scheduling problem with one producer and the bargaining counterpart with two producers[J]. Lecture Notes in Computer Science,2007,4614:305-316.

[11] Gu Y H,Chen Q L. Some extended knapsack problems involving job partition between two parties[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B,2007,22(3):366-370.

[12] Gu Y H,Fan J,Tang G C,et al. Maximum latency scheduling problem on two-person cooperative games [J/OL]. Journal of Combinatorial Optimization,In Press(2011-11-16)[2012-02-25]. http://www.citeulike.org/article/10053270.

[13] Cheng T C E,Ding Q,Lin B M T. A concise survey of scheduling with time-dependent processing time[J]. European Journal of Operational Research,2004,152:1-13.

[14] Muthoo A. Bargaining theory with applications[M]. Cambridge,United Kingdom:Cambridge University Press,1999.

## Operations Research and Cybernetics

# Nash Bargaining on Maximum Flow Time Scheduling with Changeable Processing Time

GU Yan-hong[1], JIN Ji[2], TANG Guo-chun[3]

(1. Dept. of Applied Mathematics, Shenzhen University, Shenzhen Guangdong 518060;

2. Dept. of Foundation, Suzhou Vocational University, Suzhou Jiangsu 215104;

3. Economics & Management School, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

**Abstract**: In the real world, there often exists the situation where one person is not able to undertake all the jobs alone in a large project. In this paper, we consider the situation where two persons cooperate in the performance of a project. We discuss the (two-person) Nash Bargaining problem, where job processing time is a linear function of its start time, each person offers a single machine to process jobs, and his processing cost is defined as his minimized maximum flow time. By proposing a proper division of those jobs, we use the two corresponding subset of jobs, assigned to the two persons respectively, to yield a reasonable cooperative (processing) profit allocation scheme acceptable to them.

**Key words**: scheduling; Nash bargaining; cooperative profit; maximum flow time; linear function

(责任编辑 黄 颖)